

Volume 19

CRM

CRM
MONOGRAPH
SERIES

Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal

Chirurgie des
grassmanniennes

L. Lafforgue



American Mathematical Society



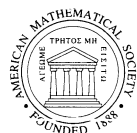
CRM MONOGRAPH SERIES

Centre de Recherches Mathématiques
Université de Montréal

Chirurgie des grassmanniennes

L. Lafforgue

The Centre de Recherches Mathématiques (CRM) of the Université de Montréal was created in 1968 to promote research in pure and applied mathematics and related disciplines. Among its activities are special theme years, summer schools, workshops, postdoctoral programs, and publishing. The CRM is supported by the Université de Montréal, the Province of Québec (FCAR), and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada. It is affiliated with the Institut des Sciences Mathématiques (ISM) of Montréal, whose constituent members are Concordia University, McGill University, the Université de Montréal, the Université du Québec à Montréal, and the Ecole Polytechnique. The CRM may be reached on the Web at www.crm.umontreal.ca.



American Mathematical Society
Providence, Rhode Island USA

The production of this volume was supported in part by the Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche (Fonds FCAR) and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14N20, 52B40, 14M15, 15A75, 14M25, 14D20.

For additional information and updates on this book, visit
www.ams.org/bookpages/crmm-19

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

Lafforgue, Laurent.

Chirurgie des grassmanniennes / L. Lafforgue.

p. cm. — (CRM monograph series, ISSN 1065-8599 ; v. 19)

Includes bibliographical references.

ISBN 0-8218-3358-8 (acid-free paper)

1. Grassmann manifolds. 2. Matroids. 3. Compactifications. 4. Surgery (Topology)

I. Title. II. Series.

QA613.6.L34 2003
514'.72—dc21

2003045105

Copying and reprinting. Individual readers of this publication, and nonprofit libraries acting for them, are permitted to make fair use of the material, such as to copy a chapter for use in teaching or research. Permission is granted to quote brief passages from this publication in reviews, provided the customary acknowledgment of the source is given.

Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any material in this publication is permitted only under license from the American Mathematical Society. Requests for such permission should be addressed to the Acquisitions Department, American Mathematical Society, 201 Charles Street, Providence, Rhode Island 02904-2294, USA. Requests can also be made by e-mail to reprint-permission@ams.org.

© 2003 by the American Mathematical Society. All rights reserved.
The American Mathematical Society retains all rights
except those granted to the United States Government.
Printed in the United States of America.

∞ The paper used in this book is acid-free and falls within the guidelines
established to ensure permanence and durability.

This volume was submitted to the American Mathematical Society
in camera ready form by the Centre de Recherches Mathématiques.

Visit the AMS home page at <http://www.ams.org/>

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 08 07 06 05 04 03

Introduction

Le cadre général pour l'ensemble de ce texte consiste en un espace vectoriel de dimension finie (c'est-à-dire un module libre de rang fini sur \mathbb{Z}) gradué

$$E = E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n,$$

somme de $n + 1$ facteurs directs E_α , $0 \leq \alpha \leq n$, et muni de toutes les sommes partielles

$$E_I = \bigoplus_{\alpha \in I} E_\alpha, \quad I \subseteq \{0, 1, \dots, n\}.$$

Pour tout rang r , la grassmannienne

$$\mathrm{Gr}^{r,E} = \{F \hookrightarrow E \mid \dim F = r\}$$

est un schéma projectif et lisse sur $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$. Elle se décompose en strates localement fermées

$$\mathrm{Gr}_{\underline{d}}^{r,E} = \{F \hookrightarrow E \mid \dim(F \cap E_I) = d_I, \quad \forall I \subseteq \{0, \dots, n\}\}$$

indexées par les familles $\underline{d} = (d_I)_{I \subseteq \{0, \dots, n\}}$ d'entiers $d_I \in \mathbb{N}$ qui vérifient

- $d_\emptyset = 0$, $d_{\{0, \dots, n\}} = r$,
- $d_I + d_J \leq d_{I \cup J} + d_{I \cap J}$, $\forall I, J$.

Dans la littérature mathématique, les familles $\underline{d} = (d_I)$ qui vérifient ces conditions sont appelées « matroïdes » de rang r sur $\{0, \dots, n\}$ et les strates associées $\mathrm{Gr}_{\underline{d}}^{r,E}$ sont appelées « cellules de Schubert minces ». Il faut dire tout de suite qu'en général l'adhérence d'une cellule de Schubert mince dans $\mathrm{Gr}^{r,E}$ n'est pas réunion de cellules de Schubert minces et qu'on ne sait pas donner de conditions nécessaires et suffisantes sur un matroïde \underline{d} pour que la strate $\mathrm{Gr}_{\underline{d}}^{r,E}$ ne soit pas vide. La condition

$$r - d_{\{0, \dots, n\} - \{\alpha\}} = r_\alpha \leq \mathrm{rg} E_\alpha, \quad \forall \alpha,$$

est évidemment nécessaire mais elle n'est pas suffisante.

Quoi qu'il en soit, chaque strate $\mathrm{Gr}_{\underline{d}}^{r,E}$ est respectée par l'action du groupe $\mathrm{Aut}(E_0) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(E_n) = \mathrm{Aut}(E_\bullet)$ et en particulier de son centre \mathbb{G}_m^{n+1} . L'action du tore \mathbb{G}_m^{n+1} se factorise à travers un tore quotient $\mathbb{G}_m^{n+1}/(\mathbb{G}_m^{n+1})_{\underline{d}}$ qui agit librement et on peut introduire le schéma quasi projectif

$$\overline{\mathrm{Gr}}_{\underline{d}}^{r,E} = \mathrm{Gr}_{\underline{d}}^{r,E} / (\mathbb{G}_m^{n+1}/(\mathbb{G}_m^{n+1})_{\underline{d}}).$$

Ce texte a pour objet de présenter et d'étudier un procédé général de compactification équivariante de tous les schémas quotients $\overline{\mathrm{Gr}}_{\underline{d}}^{r,E}$. Pour illustrer cette problématique, il convient d'examiner quelques exemples :

EXEMPLE 1. Si $E_\alpha = \mathbb{A}^r$, $0 \leq \alpha \leq n$, et $d_I = 0$, $\forall I \subsetneq \{0, \dots, n\}$, $\mathrm{Gr}_{\underline{d}}^{r,E}$ classe les sous-espaces de dimension r en position générale dans $(\mathbb{A}^r)^{n+1}$. Elle s'identifie

à $\mathrm{GL}_r^{n+1}/\mathrm{GL}_r$ et on a

$$\overline{\mathrm{Gr}}_d^{r,E} = \mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r.$$

Le problème de construire des compactifications équivariantes des quotients $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ est celui que l'auteur a rencontré en premier et qui l'a fait s'intéresser aux cellules de Schubert minces. Il y a été amené en cherchant à résoudre les singularités des compactifications des champs de chtoucas de Drinfeld avec structures de niveau. Le premier travail de l'auteur dans ce domaine est la prépublication [Lafforgue, 1998] qui traite le cas de $\mathrm{PGL}_r^3/\mathrm{PGL}_r$. Le procédé général de compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ est introduit dans l'article [Lafforgue, 1999].

Il faut signaler que de son côté G. Faltings a rencontré le même problème de compactification équivariante des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ en voulant résoudre les singularités des modèles locaux des variétés de Shimura en les places de mauvaise réduction. Cela est déjà évoqué dans les remarques de conclusion de l'article [Faltings, 1997]. Postérieurement à l'article de l'auteur, il a proposé une construction dans l'article [Faltings, 2001]. Comme on va voir, il s'avère que bien que le principe de construction de Faltings soit très différent de celui de l'auteur, les objets auxquels on parvient sont identiques : c'est-à-dire que coïncident non seulement les « structures logarithmiques » ou « champs toriques » de base mais aussi les compactifications elles-mêmes.

EXEMPLE 2. Si $r_\alpha = r - d_{\{0,\dots,n\}-\{\alpha\}}$ est égal à 1 pour tout α , on appelle « espace de configurations du matroïde \underline{d} » le sous-schéma localement fermé $C_{\underline{d}}^{r,n}$ de $(\mathbb{P}^{r-1})^{n+1}$ des familles de $n+1$ points $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{P}^{r-1}$ tels que pour toute partie $I \subseteq \{0, \dots, n\}$, le sous-espace projectif de \mathbb{P}^{r-1} engendré par les $P_\alpha, \alpha \in I$, soit de dimension $r - d_{\{0,\dots,n\}-I} - 1$.

Il est respecté par l'action du groupe projectif PGL_r et on introduit $\overline{C}_{\underline{d}}^{r,n} = C_{\underline{d}}^{r,n}/\mathrm{PGL}_r$. On a le théorème facile mais important :

THÉORÈME ([Gelfand et MacPherson, 1982]). *Si $r_\alpha = 1 = \mathrm{rg} E_\alpha, 0 \leq \alpha \leq n$, l'application*

$$(F \hookrightarrow E = E_0 \oplus \dots \oplus E_n) \mapsto (\mathrm{Ker}(F \twoheadrightarrow E_\alpha) \in \mathbb{P}(F^\vee))_{\alpha=0}^n$$

induit un isomorphisme

$$\overline{\mathrm{Gr}}_d^{r,E} \xrightarrow{\sim} \overline{C}_{\underline{d}}^{r,n}.$$

REMARQUES. – Comme Ofer Gabber l'a fait remarquer à l'auteur (citant en particulier le livre [Artin, 1957]), il résulte trivialement du théorème de Thalès que tout schéma intègre de type fini sur \mathbb{Z} contient comme ouvert un espace $\overline{C}_{\underline{d}}^{3,n}$ de configurations de points dans le plan projectif. En effet, le théorème de Thalès dit que la multiplication et l'addition, donc aussi tout polynôme à coefficients entiers, se modélisent par des relations d'alignement dans le plan.

– Le mathématicien russe Nikolai Mnëv a démontré en 1986 que pour tout schéma X affine et de type fini sur \mathbb{Z} , il existe un entier N et un ouvert $U \hookrightarrow X \times \mathbb{A}^N$ dont la projection sur X est surjective et qui est de la forme $U \cong \overline{C}_{\underline{d}}^{3,n}$.

Il résulte du théorème de Gelfand et MacPherson et de ces remarques que déjà les $\overline{\mathrm{Gr}}_d^{3,E}$ et *a fortiori* les $\overline{\mathrm{Gr}}_d^{r,E}$ sont universels au sens des motifs et ont des singularités arbitraires. Il peut donc paraître déraisonnable de vouloir étudier les $\overline{\mathrm{Gr}}_d^{r,E}$ en général et plus sage de se limiter aux schémas homogènes $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$

et à leurs compactifications. Mais il se produit que tous les schémas $\overline{\text{Gr}}_d^{r,E}$ sans exception vont apparaître comme « pierres de construction » des strates de bord des compactifications des $\text{PGL}_r^{n+1}/\text{PGL}_r$ et ne serait-ce que pour cette raison on est amené à les considérer tous.

Toutes les constructions de ce texte sont fondées sur le plongement de Plücker

$$\text{Gr}^{r,E} \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r E).$$

La graduation de l'espace E induit une graduation canonique de ses puissances extérieures

$$\Lambda^r E = \bigoplus_{\underline{i} \in S^{r,n}} \Lambda^{\underline{i}} E_{\bullet}$$

indexée par $S^{r,n} = \{\underline{i} = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1} \mid i_0 + \dots + i_n = r\}$ et où les facteurs directs sont les $\Lambda^{\underline{i}} E_{\bullet} = \Lambda^{i_0} E_0 \otimes \dots \otimes \Lambda^{i_n} E_n$.

Si $\underline{d} = (d_I)_{I \subseteq \{0, \dots, n\}}$ est un matroïde de rang r , on lui associe le polyèdre convexe

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid i_0 + \dots + i_n = r \text{ et } \sum_{\alpha \in I} i_{\alpha} \geq d_I, \forall I \right\}$$

et son sous-ensemble $S = S_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{N}^{n+1} = S_{\mathbb{R}} \cap S^{r,n}$ des points entiers. Dans le présent texte, les ensembles $S_{\mathbb{R}}$ ou S associés à des matroïdes \underline{d} seront appelés des « convexes entiers » (dans la littérature mathématique sur le sujet que l'auteur n'a commencé à découvrir que tardivement, on parle plutôt de « polytopes de matroïdes »). Ils apparaissent dans l'étude des cellules de Schubert minces à cause de la proposition fondamentale suivante :

PROPOSITION. *Si $S \subseteq S^{r,n}$ est un convexe entier associé à un matroïde \underline{d} , alors dans la grassmannienne*

$$\text{Gr}^{r,E} \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r E) = \left\{ (x_{\underline{i}})_{\underline{i} \in S^{r,n}} \in \mathbb{G}_m \setminus \left(\prod_{\underline{i}} \Lambda^{\underline{i}} E_{\bullet} - \{0\} \right) \right\},$$

la cellule de Schubert mince $\text{Gr}_{\underline{d}}^{r,E}$ est définie comme sous-schéma localement fermé par

$$\begin{aligned} x_{\underline{i}} &= 0, & \forall \underline{i} \notin S, \\ x_{\underline{i}} &\neq 0, & \forall \underline{i} \in S. \end{aligned}$$

Voici les propriétés des convexes entiers qui sont importantes pour ce que nous allons faire :

(1) Si $S_{\mathbb{R}}$ et S sont associés à un matroïde $\underline{d} = (d_I)$, on a pour toute partie I de $\{0, \dots, n\}$

$$d_I = \min \left\{ \sum_{\alpha \in I} i_{\alpha} \mid \underline{i} = (i_0, \dots, i_n) \in S \right\}$$

et $S_{\mathbb{R}}$ est le polyèdre convexe engendré par l'ensemble fini S .

La théorie des matroïdes est donc équivalente à celle des convexes entiers S ou $S_{\mathbb{R}}$. Dans tout le texte, on adoptera le point de vue des convexes entiers qui est meilleur pour nous (il permet de parler de faces, de pavages, ...) et on notera $\text{Gr}_S^{r,E}$, $\overline{\text{Gr}}_S^{r,E}$, ... au lieu de $\text{Gr}_{\underline{d}}^{r,E}$, $\overline{\text{Gr}}_{\underline{d}}^{r,E}$, ...

(2) Les faces d'un convexe entier sont des convexes entiers.

(3) Un polyèdre convexe qui admet un pavage par des convexes entiers est un convexe entier.

(4) Si $S \subseteq S^{r,n}$ est un convexe entier de dimension ($= \dim S_{\mathbb{R}}$) $n - p$, il existe une décomposition canonique

$$\begin{aligned} \{0, \dots, n\} &= J_0 \amalg \dots \amalg J_p, \quad r = r_0 + \dots + r_p, \\ S &= S^0 \times \dots \times S^p, \quad S_{\mathbb{R}} = S_{\mathbb{R}}^0 \times \dots \times S_{\mathbb{R}}^p, \end{aligned}$$

où chaque S^i est un « pavé entier » (c'est-à-dire un convexe entier de dimension maximale $n_i = |J_i| - 1$) dans

$$S^{r_i, n_i} = \left\{ (i_\alpha)_{\alpha \in J_i} \in \mathbb{N}^{J_i} \mid \sum_{\alpha \in J_i} i_\alpha = r_i \right\}.$$

(5) Tout pavé entier $S \subseteq S^{r,n}$ contient une base du réseau des points entiers.

Revenant aux coordonnées de Plücker, la proposition fondamentale ci-dessus est complétée par le lemme tout aussi fondamental :

LEMME. *Si $S \subseteq S^{r,n}$ est un convexe entier et S' est une face de S , l'oubli des coordonnées en dehors de S'*

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m \backslash \prod_{i \in S} (\Lambda^i E_\bullet - \{0\}) &\rightarrow \mathbb{G}_m \backslash \prod_{i \in S'} (\Lambda^i E_\bullet - \{0\}) \\ (x_i)_{i \in S} &\mapsto (x_i)_{i \in S'} \end{aligned}$$

définit un morphisme

$$\mathrm{Gr}_S^{r,E} \rightarrow \mathrm{Gr}_{S'}^{r,E}.$$

Quand S' est définie dans S par une seule équation $\sum_{\alpha \in I} i_\alpha = d_I^S$, il s'écrit

$$(F \hookrightarrow E) \mapsto ((F \cap E_I \oplus F/F \cap E_I) \hookrightarrow E_I \oplus E/E_I = E).$$

Cette proposition et ce lemme permettent de poser la définition suivante qui a fasciné l'auteur depuis qu'il s'en est aperçu en 1997 :

DÉFINITION. Si \underline{S} est un pavage d'un convexe entier $S \subseteq S^{r,n}$ tel que pour toutes cellules S' et S'' , $S' \cap S''$ est une face à la fois de S' et S'' , on introduit le sous-schéma fermé

$$\mathrm{Gr}_{\underline{S}}^{r,E} \hookrightarrow \mathbb{G}_m \backslash \prod_{i \in S} (\Lambda^i E_\bullet - \{0\})$$

des familles de vecteurs non nuls $(x_i \in \Lambda^i E_\bullet)_{i \in S}$ telles que pour toute cellule S' de S , la sous-famille $(x_i)_{i \in S'}$ définisse un point de $\mathrm{Gr}_{S'}^{r,E}$.

Si l'on fait décrire à S' l'ensemble des « facettes » du pavage \underline{S} (c'est-à-dire l'ensemble des cellules de \underline{S} et de leurs faces de toutes les dimensions), partiellement ordonné par la relation de face, il résulte du lemme précédent que les cellules de Schubert minces correspondantes $\mathrm{Gr}_{S'}^{r,E}$ constituent un système projectif fini, et le schéma $\mathrm{Gr}_{\underline{S}}^{r,E}$ n'est autre que la limite projective de ce système.

On note $(d_I^S)_{I \subseteq \{0, \dots, n\}}$ l'unique matroïde dont provient un convexe entier S . Presque par définition, les schémas $\mathrm{Gr}_{\underline{S}}^{r,E}$ ont la description modulaire suivante :

COROLLAIRE. *Le schéma quasi projectif $\mathrm{Gr}_{\underline{S}}^{r,E}$ classe les familles $(F_{S'})$ de sous-espaces de E indexés par les cellules S' de \underline{S} telles que :*

- $\dim(F_{S'} \cap E_I) = d_I^{S'}, \forall I, \forall S'$,
- si S' et S'' sont deux cellules ayant une face commune définie par une équation $\sum_{\alpha \in I} i_\alpha = d_I^{S'} = r - d_J^{S''}$ (avec $J = \{0, \dots, n\} - I$), on a les égalités croisées

$$\begin{aligned} F_{S'} \cap E_I &= F_{S''} / F_{S''} \cap E_J & \text{dans } E_I &= E / E_J, \\ F_{S''} \cap E_J &= F_{S'} / F_{S'} \cap E_I & \text{dans } E_J &= E / E_I, \end{aligned}$$

entre sous-objets et objets quotients dans les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow F_{S'} \cap E_I \rightarrow F_{S'} \rightarrow F_{S'} / F_{S'} \cap E_I \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow F_{S''} \cap E_J \rightarrow F_{S''} \rightarrow F_{S''} / F_{S''} \cap E_J \rightarrow 0. \end{aligned}$$

L'étape suivante dans les constructions consiste à « mettre en famille » les schémas $\text{Gr}_S^{r,E}$ associés aux différents pavages \underline{S} d'un même convexe entier $S \subseteq S^{r,n}$. On commence par « mettre en famille » les pavages eux-mêmes en construisant un « champ torique » $\mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S$ (le champ quotient d'une variété torique \mathcal{A}^S par son tore \mathcal{A}_\emptyset^S) dont ils sont les points :

Si \underline{S} est un pavage de S par des convexes entiers, on note $\mathcal{C}_S^{\underline{S}} \subseteq \mathbb{R}^S$ le cône des fonctions « convexes »

$$v: S \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que, pour toute cellule S' de \underline{S} , il existe une fonction affine $\ell: S \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\ell \leq v$ et $S' = \{\underline{i} \in S \mid \ell(\underline{i}) = v(\underline{i})\}$.

Quand $\mathcal{C}_S^{\underline{S}}$ n'est pas vide, on dit que \underline{S} est un « pavage entier convexe » de S . Si \emptyset désigne le pavage trivial de S , \mathcal{C}_\emptyset^S est le sous-espace des fonctions affines $\ell: S \rightarrow \mathbb{R}$; tous les cônes $\mathcal{C}_S^{\underline{S}}$ sont stabilisés par \mathcal{C}_\emptyset^S .

On montre que la famille des cônes quotients $\mathcal{C}_S^{\underline{S}} / \mathcal{C}_\emptyset^S \subset \mathbb{R}^S / \mathcal{C}_\emptyset^S$ constitue un éventail et donc définit une variété torique \mathcal{A}^S de tore le quotient $\mathcal{A}_\emptyset^S = \mathbb{G}_m^S / (\mathbb{G}_m^S)_\emptyset$ de \mathbb{G}_m^S par le sous-tore $(\mathbb{G}_m^S)_\emptyset$ des fonctions affines $S \rightarrow \mathbb{G}_m$. Les orbites $\mathcal{A}_S^{\underline{S}}$ sont indexées par les pavages entiers convexes \underline{S} de S et, étant donnés deux pavages \underline{S} et \underline{U} , on a $\mathcal{A}_S^{\underline{S}} \subset \overline{\mathcal{A}_S^{\underline{U}}}$ si et seulement si \underline{S} raffine \underline{U} .

Comme Valery Alexeev l'a fait remarquer à l'auteur, le livre [Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky, 1994] contient la construction, pour tout polyèdre convexe engendré par ses points entiers, de la variété torique de ses pavages par des polyèdres convexes engendrés par leurs points entiers. Dans le cas d'un convexe entier (en notre sens) S , la variété torique \mathcal{A}^S est simplement un ouvert dans celle de Gel'fand, Kapranov et Zelevinsky; son existence résulte de la propriété (3) des convexes entiers. Valery Alexeev a également appris à l'auteur que les éventails de fonctions convexes qui définissent les variétés toriques de pavages ont été introduits dès 1907 dans l'article [Voronoi, 1907].

Le premier théorème de ce texte est qu'on peut mettre en famille les schémas $\text{Gr}_S^{r,E}$ associés aux pavages entiers convexes \underline{S} de S pour obtenir une compactification de $\overline{\text{Gr}_S^{r,E}}$:

THÉORÈME. *Dans le schéma produit*

$$\mathcal{A}^S \times \mathbb{G}_m \setminus \prod_{\underline{i} \in S} (\Lambda^{\underline{i}} E_\bullet - \{0\}),$$

il existe un sous-schéma fermé $\Omega^{S,E}$ tel que :

(i) $\Omega^{S,E}$ est invariant par $\text{Aut}(E_\bullet) = \text{Aut}(E_0) \times \cdots \times \text{Aut}(E_n)$ et par $\mathbb{G}_m^S / \mathbb{G}_m$ (agissant sur \mathcal{A}^S via $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$ et sur le second facteur coordonnée par coordonnée).

(ii) La fibre de $\Omega^{S,E}$ au-dessus de $1 \in \mathcal{A}_\emptyset^S \subset \mathcal{A}^S$ est

$$\text{Gr}_S^{r,E}.$$

(iii) Plus généralement, la fibre de $\Omega^{S,E}$ au-dessus du point distingué $\alpha_{\underline{S}}$ de l'orbite $\mathcal{A}_{\underline{S}}^S$ associée à un pavage \underline{S} est

$$\text{Gr}_{\underline{S}}^{r,E}.$$

(iv) Le quotient $\overline{\Omega}^{S,E}$ de $\Omega^{S,E}$ par l'action libre de $\mathbb{G}_m^S / \mathbb{G}_m$ est un schéma projectif. Il est muni d'un morphisme

$$\overline{\Omega}^{S,E} \rightarrow \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S$$

et donc de strates localement fermées $\overline{\Omega}_{\underline{S}}^{S,E}$ qui sont les images réciproques des points $\mathcal{A}_{\underline{S}}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S$ de $\mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S$. Sa strate ouverte est

$$\overline{\Omega}_\emptyset^{S,E} = \text{Gr}_S^{r,E} / (\mathbb{G}_m^S)_\emptyset = \overline{\text{Gr}}_S^{r,E}.$$

Bien sûr, ce théorème définit le fermé $\Omega^{S,E}$ de manière unique comme ensemble mais *a priori* pas comme schéma. Pour lever toute ambiguïté, on définit $\Omega^{S,E}$ par des familles explicites d'équations obtenues en « tordant » les équations de Plücker au moyen des caractères de \mathcal{A}^S . On renvoie pour cela au paragraphe 2.3.

Dans le cas particulier des espaces de configurations, c'est-à-dire quand $\text{rg } E_\alpha = 1 = r_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq n$, on note simplement $\overline{\Omega}^S$ au lieu de $\overline{\Omega}^{S,E}$.

Tout de suite après la construction des schémas $\overline{\Omega}^{S,E}$, il convient de donner leurs propriétés fonctorielles dont voici les plus importantes :

Les morphismes de faces. Si S' est une face de S , on a des morphismes naturels s'inscrivant dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega}^{S,E} & \longrightarrow & \overline{\Omega}^{S',E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S & \longrightarrow & \mathcal{A}^{S'} / \mathcal{A}_\emptyset^{S'} \end{array}$$

Le morphisme du haut prolonge $\text{Gr}_S^{r,E} \rightarrow \text{Gr}_{S'}^{r,E}$ et celui du bas associe à tout pavage entier convexe de S le pavage induit de la face S' .

Les isomorphismes de factorisation. Si $S \subseteq S^{r,n}$ est un convexe entier de dimension $n - p$ avec les décompositions associées $\{0, \dots, n\} = J_0 \amalg \cdots \amalg J_p$, $S = S^0 \times \cdots \times S^p$, on a des isomorphismes canoniques compatibles :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega}^{S,E} & \xrightarrow{\sim} & \overline{\Omega}^{S^0, E_{J_0}} \times \cdots \times \overline{\Omega}^{S^p, E_{J_p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}^{S^0} / \mathcal{A}_\emptyset^{S^0} \times \cdots \times \mathcal{A}^{S^p} / \mathcal{A}_\emptyset^{S^p} \end{array}$$

En particulier, les pavages entiers convexes de S sont les produits de pavages entiers convexes de S^0, \dots, S^p .

Dans le cas des espaces de configurations, les composés des morphismes de faces et de factorisation compactifient les morphismes d'oubli d'une partie des points d'une configuration ou de passage à la configuration quotient par le sous-espace projectif engendré par une sous-famille.

On peut citer aussi :

Les isomorphismes de dualité. Si $r^\vee = \text{rg } E - r$, l'isomorphisme

$$\text{Gr}^{r,E} \xrightarrow{\sim} \text{Gr}^{r^\vee, E^\vee}$$

$$(F \hookrightarrow E) \mapsto (F^\perp \hookrightarrow E^\vee) = \text{Ker}(E^\vee \twoheadrightarrow F^\vee)$$

induit des isomorphismes entre cellules de Schubert minces

$$\text{Gr}_S^{r,E} \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_{S^\vee}^{r^\vee, E^\vee}$$

qui se prolongent naturellement aux compactifications :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega}^{S,E} & \xrightarrow{\sim} & \overline{\Omega}^{S^\vee, E^\vee} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}^{S^\vee} / \mathcal{A}_\emptyset^{S^\vee} \end{array}$$

La première question que pose le théorème ci-dessus est la suivante :

QUESTION 1. *Pour $E = E_0 \oplus \dots \oplus E_n$, r et $S \subseteq S^{r,n}$ arbitraires, est-il vrai ou faux que la strate ouverte $\overline{\Omega}_\emptyset^{S,E} = \overline{\text{Gr}}_S^{r,E}$ est schématiquement dense dans $\overline{\Omega}^{S,E}$?*

L'auteur ne connaît pas de contre-exemple. Mais il ne sait pas démontrer que la réponse est affirmative, même dans les « situations génériques » comme les compactifications des $\text{PGL}_r^{n+1} / \text{PGL}_r$ ou des espaces de configurations de $n + 1$ points en position générale dans \mathbb{P}^{r-1} . Il est clair que le théorème rend compte au moins en partie du phénomène selon lequel l'adhérence d'une cellule de Schubert mince n'est pas en général une réunion de cellules de Schubert minces (voir le corollaire 2.11). En un sens, la question 1 consiste à se demander s'il en rend compte complètement ou non.

Dans ce texte, on montre que $\overline{\Omega}_\emptyset^{S,E} = \overline{\text{Gr}}_S^{r,E}$ est schématiquement dense dans $\overline{\Omega}^{S,E}$ seulement dans les cas $n \leq 2$ ou $r = 2$ comme conséquence d'une propriété beaucoup plus forte :

THÉORÈME. *Si $n + 1 \leq 3$ ou bien si $r = 2$, on a :*

- (i) *Le morphisme de structure $\overline{\Omega}^{S,E} \rightarrow \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S$ est lisse.*
- (ii) *Pour toute face S' de S , le morphisme*

$$\overline{\Omega}^{S,E} \rightarrow \overline{\Omega}^{S',E} \times_{\mathcal{A}^{S'} / \mathcal{A}_\emptyset^{S'}} \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_\emptyset^S$$

est lisse.

REMARQUES. – Si $r = 2$ ou $n + 1 = 2$, les variétés toriques \mathcal{A}^S sont toujours lisses si bien que l'assertion (i) signifie que les $\overline{\Omega}^{S,E}$ sont lisses sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ et que leurs bords sont des diviseurs à croisements normaux relatifs. En revanche, si $n + 1 = 3$,

les variétés toriques \mathcal{A}^S ne sont pas lisses en général et les schémas $\overline{\Omega}^{S,E}$ ont les mêmes singularités qu'elles.

- Si $r = 2$ et $\text{rg } E_\alpha = 1 = r_\alpha$, $0 \leq \alpha \leq n$, les espaces de configurations $\overline{\Omega}_\emptyset^S = \overline{\text{Gr}}_S^{2,E} = \overline{C}_S^{2,n}$ s'identifient aux espaces de modules $\mathcal{M}_{0,n+1}$ de courbes de genre 0 (isomorphes à \mathbb{P}^1) avec $n+1$ points marqués, et les schémas projectifs $\overline{\Omega}^S$ s'identifient aux compactifications $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ construites par Grothendieck et Knudsen. Il faut signaler ici que la description de la combinatoire des strates de bord de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$ en termes de pavages de $S = \{(i_\alpha)_{\alpha=0}^n \mid 0 \leq i_\alpha \leq 1, \forall \alpha \text{ et } \sum i_\alpha = 2\}$ figure déjà dans l'article [Kapranov, 1993]. Plus généralement, Kapranov y construit des compactifications de tous les espaces de configurations « génériques », c'est-à-dire classifiant les familles de $n+1$ points en position générale dans \mathbb{P}^{r-1} , et montre qu'à chaque point du bord est associé un pavage (entier convexe dans notre terminologie) de l'« hypersimplexe » $S = \{(i_\alpha)_{\alpha=0}^n \mid 0 \leq i_\alpha \leq 1, \forall \alpha \text{ et } \sum i_\alpha = r\}$. C'est la même description combinatoire que pour les strates des $\overline{\Omega}^S$ correspondants mais l'auteur ignore encore quelle est la relation exacte entre les compactifications de Kapranov et les siennes dans la même situation.

- Si $r = 2$, $E_\alpha = \mathbb{A}^2$, $\forall \alpha$ et $S = S^{2,n}$, $\overline{\Omega}^{S,E}$ est une compactification équivariante et lisse de $\text{PGL}_2^{n+1}/\text{PGL}_2$. Ces compactifications sont aussi construites par une autre méthode dans l'article [Faltings, 2001] qui contient la première preuve correcte de leur lissité.

- Si $n = 1$, $E_\alpha = \mathbb{A}^r$, $\alpha \in \{0, 1\}$ et $S = S^{r,1}$, $\overline{\Omega}^{S,E}$ est la compactification de De Concini et Procesi de $\text{PGL}_r^2/\text{PGL}_r$. On remarque que ces compactifications font donc partie de la même théorie que les $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}$.

- Si $n = 2$, $E_\alpha = \mathbb{A}^r$, $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ et $S = S^{r,2}$, $\overline{\Omega}^{S,E}$ est une compactification équivariante de $\text{PGL}_r^3/\text{PGL}_r$ qui est lisse sur le champ torique des pavages du triangle $S^{r,2} = \{(i_0, i_1, i_2) \in \mathbb{N}^3 \mid i_0 + i_1 + i_2 = r\}$. Elle a été introduite dans la prépublication [Lafforgue, 1998] qui contient une preuve des propriétés de lissité différente de celle donnée dans le paragraphe 3.5 du présent texte. Munie des 3 morphismes de faces, elle compactifie la multiplication dans PGL_r . Cela permet de compactifier aussi le revêtement de Lang de PGL_r au-dessus d'un corps fini. On renvoie au paragraphe III.3c de l'article [Lafforgue, 2002] pour une application de cette construction à la résolution des singularités des compactifications des champs de chtoucas de Drinfeld avec structures de niveau sans multiplicités.

Dans l'article [Lafforgue, 1999], on prétendait et on croyait démontrer que dans le cas des compactifications des $\text{PGL}_r^{n+1}/\text{PGL}_r$ le morphisme de structure

$$\overline{\Omega}^{S,E} \rightarrow \mathcal{A}^S/\mathcal{A}_\emptyset^S$$

est toujours lisse. Cet énoncé est encore vrai pour $\text{PGL}_3^4/\text{PGL}_3$ mais il est faux en général. Le premier contre-exemple est $\text{PGL}_4^4/\text{PGL}_4$ où le morphisme de structure n'est pas plat (même sur \mathbb{Q}). On peut remarquer aussi que chaque fois que la strate ouverte d'un $\overline{\Omega}^{S,E}$ est non vide en caractéristique 0 mais que certaines strates de bord n'existent qu'en caractéristique p (ce qui se produit pour les compactifications des $\text{PGL}_r^{n+1}/\text{PGL}_r$ ou des espaces de configurations génériques quand $r \geq 3$ et que n est assez grand), le morphisme de structure considéré au-dessus de \mathbb{Z}_p ou même de $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ne peut être plat.

D'autre part, il résulte du théorème de Mnëv que déjà dans le cas des espaces de configurations de points dans le plan projectif la fibre générique du morphisme de structure

$$\overline{\Omega}^{S,E} \rightarrow \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_{\emptyset}^S$$

peut avoir des singularités arbitraires.

Cependant, pour que la théorie générale des schémas $\overline{\Omega}^{S,E}$ devienne intéressante, il faudrait certainement pouvoir produire des familles « grandes » (disons par exemple universelles au sens des motifs) de schémas $\overline{\Omega}^{S,E}$ dont on sache décrire et résoudre les singularités. Et l'auteur ne voit pas quelle autre propriété on pourrait demander que la lissité du morphisme de structure $\overline{\Omega}^{S,E} \rightarrow \mathcal{A}^S / \mathcal{A}_{\emptyset}^S$ considéré au-dessus de \mathbb{Q} ou de \mathbb{F}_p .

Voici une première idée simple qu'on peut avoir pour essayer de construire des schémas $\overline{\Omega}^S$ lisses sur leur base $\mathcal{A}^S / \mathcal{A}_{\emptyset}^S$ à partir d'un espace de configurations arbitraire $\overline{C}_{S_0}^{3,n_0}$ dans le plan projectif \mathbb{P}^2 et d'un point générique η de $\overline{C}_{S_0}^{3,n_0}$. Ajoutons aux configurations de $\overline{C}_{S_0}^{3,n_0}$ tous les points d'intersection de paires de droites reliant des points de la configuration, et mettons sur l'ensemble des anciens et des nouveaux points toutes les relations d'alignement ou de non-alignement qui sont vérifiées en η . Cela définit un nouvel espace de configurations $\overline{C}_{S_1}^{3,n_1}$ qui est relié au précédent par le morphisme d'oubli des nouveaux points

$$\overline{C}_{S_1}^{3,n_1} \rightarrow \overline{C}_{S_0}^{3,n_0};$$

ce morphisme est une immersion localement fermée dont l'image contient η . On peut recommencer la même construction à partir de $\overline{C}_{S_1}^{3,n_1}$ et obtenir ainsi une tour infinie

$$\dots \hookrightarrow \overline{C}_{S_2}^{3,n_2} \hookrightarrow \overline{C}_{S_1}^{3,n_1} \hookrightarrow \overline{C}_{S_0}^{3,n_0}$$

d'espaces de configurations $\overline{C}_{S_k}^{3,n_k}$ de plus en plus fins. Tous contiennent η mais deviennent arbitrairement petits. Il est clair qu'après un nombre fini de pas ils sont lisses sur le corps de base \mathbb{Q} ou \mathbb{F}_p . Passant maintenant à nos compactifications $\overline{\Omega}^{S_k}$ des $\overline{C}_{S_k}^{3,n_k}$, elles s'ordonnent en une tour

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & \overline{\Omega}^{S_2} & \longrightarrow & \overline{\Omega}^{S_1} & \longrightarrow & \overline{\Omega}^{S_0} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & \mathcal{A}^{S_2} / \mathcal{A}_{\emptyset}^{S_2} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{S_1} / \mathcal{A}_{\emptyset}^{S_1} & \longrightarrow & \mathcal{A}^{S_0} / \mathcal{A}_{\emptyset}^{S_0} \end{array}$$

qui prolonge la précédente et où les morphismes de transition sont des morphismes de faces.

QUESTION 2. *Se plaçant sur \mathbb{Q} ou sur \mathbb{F}_p , est-il vrai ou faux que dans la construction ci-dessus, la compactification $\overline{\Omega}^{S_k}$ de $\overline{C}_{S_k}^{3,n_k}$ devient automatiquement lisse sur $\mathcal{A}^{S_k} / \mathcal{A}_{\emptyset}^{S_k}$ dès que k est assez grand ?*

Si la réponse à cette question était affirmative sur \mathbb{F}_p , cela impliquerait une forme de résolution des singularités en caractéristique p d'après le théorème 3.10 du paragraphe 3.3 auquel nous renvoyons (et le théorème de résolution équivariante des singularités pour les variétés toriques).

Bien que jusqu'à présent nous ne sachions rien dire de la géométrie des schémas projectifs $\overline{\Omega}^{S,E}$ généraux et qu'en particulier nous ignorions la réponse aux questions 1 et 2, nous montrons dans ce texte que pour tout convexe entier S , $\overline{\Omega}^{S,E}$ est solution de deux problèmes de modules différents (et même de quatre si on tient compte des isomorphismes de dualité) associés à S . L'auteur a été amené à ces caractérisations modulaires par l'étude du travail de Faltings sur les compactifications des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$.

Rappelons quel est le point de vue de Faltings.

Il part d'un point g de $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ à valeurs dans le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète A et il cherche à le prolonger sur A d'une manière ou d'une autre. Pour cela, il relève ce point en un $(g_0, \dots, g_n) \in \mathrm{GL}_r^{n+1}(K)$ et il considère les positions relatives des réseaux $M_\alpha = g_\alpha(A^r)$, $0 \leq \alpha \leq n$, dans K^r . À multiplication près par des puissances de l'uniformisante, les réseaux de la forme $M = \lambda_0 \cdot M_0 + \dots + \lambda_n \cdot M_n$ avec $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K^\times$, sont en nombre fini, et les fibrés projectifs associés $\mathbb{P}(M)$ sur $\mathrm{Spec} A$ ont la même fibre générique $\mathbb{P}(K^r)$. L'adhérence schématique P_g de la diagonale $\mathbb{P}(K^r)$ dans le produit des $\mathbb{P}(M)$ est un schéma projectif et plat sur $\mathrm{Spec} A$ que Faltings appelle un « schéma de Deligne ». Il montre que P_g est semi-stable c'est-à-dire régulier avec un diviseur à croisements normaux pour fibre spéciale. Cependant, la formation du schéma de Deligne P_g ne commute pas avec les changements de base $A \rightarrow A'$ par des anneaux de valuation discrète A' ramifiés sur A . Faltings construit alors un autre schéma P_{\min} projectif et plat sur $\mathrm{Spec} A$ qu'il appelle un « modèle minimal de l'espace projectif » et qui est une contraction de P_g au sens qu'il est muni d'un morphisme birationnel surjectif $P_g \rightarrow P_{\min}$ dont la restriction au-dessus de $\mathrm{Spec} K$ est un isomorphisme. Le schéma P_{\min} n'est plus semi-stable et a des singularités toroïdales mais sa formation commute aux changements de base. Mieux, Faltings construit une compactification $\overline{\Omega}$ de $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$ munie d'une fibration projective et plate P telle que tout modèle minimal P_{\min} se déduit de P par le morphisme de changement de base $\mathrm{Spec} A \rightarrow \overline{\Omega}$ qui prolonge le point donné $\mathrm{Spec} K \rightarrow \mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$.

Au chapitre 5, nous construisons des fibrations projectives et plates généralisant celles de Faltings sur tous les schémas $\overline{\Omega}^{S,E}$ (pas seulement les compactifications des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$), nous décrivons leur géométrie et nous montrons qu'elles sont universelles relativement à un certain problème de modules.

Avant cela, on introduit et étudie au chapitre 4 un autre problème de modules, différent mais équivalent en définitive, et qui apparaît comme un intermédiaire naturel pour passer de la première construction des $\overline{\Omega}^{S,E}$ à leurs fibrations projectives universelles.

Afin de formuler ces deux problèmes de modules, on a besoin d'introduire une seconde variété torique $\tilde{\mathcal{A}}^S$ plus fine que celle \mathcal{A}^S des pavages d'un convexe entier $S \subseteq S^{r,n}$.

Si \underline{S} est un pavage entier convexe de S et S' une facette de \underline{S} (c'est-à-dire une cellule ou une face de cellule), on note $\tilde{\mathcal{C}}_{\underline{S}, S'}^S \subset \mathbb{R}^S$ le cône des fonctions convexes

$$v: S \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que $v \in \mathcal{C}_{\underline{S}}^S$ et $S' = \{\underline{i} \in S \mid v(\underline{i}) = \min(v)\}$. Les cônes $\tilde{\mathcal{C}}_{\underline{S}, S'}^S$ sont invariants par le sous-espace \mathbb{R} des fonctions constantes et on montre que la famille des cônes quotients $\tilde{\mathcal{C}}_{\underline{S}, S'}^S/\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^S/\mathbb{R}$ constitue un éventail. Elle définit une variété torique

$\tilde{\mathcal{A}}^S$ de tore $\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S = \mathbb{G}_m^S/\mathbb{G}_m$ dont les orbites $\tilde{\mathcal{A}}_{\underline{S}, S'}^S$ sont indexées par les pavages avec facette distinguée (\underline{S}, S') .

PROPOSITION. (i) *L'homomorphisme de quotient*

$$\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S = \mathbb{G}_m^S/\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m^S/(\mathbb{G}_m^S)_\emptyset = \mathcal{A}_\emptyset^S$$

se prolonge en un morphisme équivariant d'« oubli de la facette distinguée »

$$\tilde{\mathcal{A}}^S \rightarrow \mathcal{A}^S.$$

(ii) *Ce morphisme est projectif et plat (de dimension relative $\dim S$) et ses fibres sont géométriquement réduites.*

Comme on va voir, la fibration projective, plate et équivariante $\tilde{\mathcal{A}}^S \rightarrow \mathcal{A}^S$ formalise en termes de géométrie algébrique le recollement des cellules entre elles pour constituer un pavage, en plus des relations de raffinement entre pavages déjà formalisées par \mathcal{A}^S .

Cette fibration est respectée par le tore \mathbb{G}_m^{n+1} agissant via

$$\mathbb{G}_m^{n+1} \rightarrow (\mathbb{G}_m^S)_\emptyset \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto (\underline{i} = (i_0, \dots, i_n) \mapsto \lambda_0^{i_0} \dots \lambda_n^{i_n}).$$

Si \underline{S} est un pavage de S , la fibre $Y_{\underline{S}}$ de $\tilde{\mathcal{A}}^S \rightarrow \mathcal{A}^S$ au-dessus du point distingué $\alpha_{\underline{S}}$ de l'orbite $\mathcal{A}_{\underline{S}}^S$ est un schéma projectif géométriquement réduit muni d'une action de \mathbb{G}_m^{n+1} . Voici sa description géométrique :

LEMME. (i) $Y_{\underline{S}}$ est réunion finie d'orbites $\dot{Y}_{S'}$ indexées par les facettes S' du pavage \underline{S} .

(ii) Si $\dim S' = n - p$ et $\{0, \dots, n\} = J_0 \amalg \dots \amalg J_p$ est la décomposition associée, le fixateur dans \mathbb{G}_m^{n+1} de n'importe quel point de $\dot{Y}_{S'}$ est le sous-tore « diagonal »

$$(\mathbb{G}_m^{n+1})_{S'} = \mathbb{G}_m^{p+1} = \mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{G}_m^{J_0} \times \dots \times \mathbb{G}_m^{J_p} = \mathbb{G}_m^{n+1}.$$

(iii) L'adhérence schématique $Y_{S'}$ de $\dot{Y}_{S'}$ dans $Y_{\underline{S}}$ est une variété torique (normale) projective de tore $\mathbb{G}_m^{n+1}/(\mathbb{G}_m^{n+1})_{S'}$. Ses orbites sont les $\dot{Y}_{S''}$ indexées par les faces S'' de S' .

Ainsi, les composantes irréductibles des fibres du morphisme $\tilde{\mathcal{A}}^S \rightarrow \mathcal{A}^S$ sont indexées naturellement par les cellules des pavages de S . Ce sont les variétés toriques des faces de ces cellules et elles sont recollées entre elles pour constituer les fibres suivant les mêmes règles combinatoires que les cellules d'un pavage pour constituer ce pavage.

Revenant maintenant au schéma $\Omega^{S,E}$ au-dessus de \mathcal{A}^S , le produit fibré $\Omega^{S,E} \times_{\mathcal{A}^S} \tilde{\mathcal{A}}^S$ est muni d'une action de $\mathbb{G}_m^S/\mathbb{G}_m = \tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S$ (qu'on fait agir sur $\tilde{\mathcal{A}}^S$ via $\lambda \mapsto \lambda^{-1}$). La première caractérisation modulaire de $\bar{\Omega}^{S,E} = \Omega^{S,E}/\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S$ repose sur le résultat suivant :

PROPOSITION. *On a un morphisme canonique*

$$\Omega^{S,E} \times_{\mathcal{A}^S} \tilde{\mathcal{A}}^S \rightarrow \text{Gr}^{r,E}$$

qui est respecté par l'action de $\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S$ et équivariant sous celles de $\text{Aut}(E_\bullet)$ et en particulier de \mathbb{G}_m^{n+1} .

Si $(F_{S'} \hookrightarrow E)_{S' \in \underline{S}}$ est un point de la fibre $\text{Gr}_{\underline{S}}^{r,E}$ de $\Omega^{S,E}$ au-dessus de $\alpha_{\underline{S}}$ et les $\alpha_{\underline{S},S'}$ sont les points distingués des orbites $\mathring{Y}_{S'} \hookrightarrow Y_{\underline{S}}$, ce morphisme envoie chaque $((F_{S'})_{S' \in \underline{S}}; \alpha_{\underline{S},S'})$ sur $F_{S'}$.

On note \mathcal{E}^S le fibré équivariant et localement libre de rang r sur $\Omega^{S,E} \times_{\mathcal{A}^S} \tilde{\mathcal{A}}^S$ image réciproque du fibré canonique de la grassmannienne $\text{Gr}^{r,E}$. On peut aussi le voir comme un fibré \mathbb{G}_m^{n+1} -équivariant sur

$$(\Omega^{S,E} \times_{\mathcal{A}^S} \tilde{\mathcal{A}}^S) / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S = \bar{\Omega}^{S,E} \times_{\mathcal{A}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S} \tilde{\mathcal{A}}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S.$$

Pour tout schéma X qui, comme $\bar{\Omega}^{S,E} = \Omega^{S,E} / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S$, est muni d'un morphisme vers le champ quotient $\mathcal{A}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S$ (et donc en particulier de strates localement fermées indexées par les pavages \underline{S} de S), on note \tilde{X} le produit fibré

$$\tilde{X} = X \times_{\mathcal{A}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S} \tilde{\mathcal{A}}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S.$$

C'est une fibration projective, plate et \mathbb{G}_m^{n+1} -équivariante sur X dont les fibres sont isomorphes (non canoniquement) aux schémas $Y_{\underline{S}}$.

Le fibré \mathcal{E}^S ci-dessus est un point à valeurs dans $\bar{\Omega}^{S,E}$ du champ qu'on peut maintenant définir :

DÉFINITION. Soit $\overline{\text{Vec}}^{r,S}$ le champ algébrique sur $\mathcal{A}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S$ qui associe à tout schéma X muni d'un morphisme

$$X \rightarrow \mathcal{A}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S$$

le groupoïde des fibrés \mathcal{E} localement libres de rang r et \mathbb{G}_m^{n+1} -équivariants sur la fibration \tilde{X} qui vérifient la propriété discrète suivante :

En tout point de \tilde{X} qui est dans la strate indexée par un pavage avec facette distinguée (\underline{S}, S') , et si $\{0, \dots, n\} = J_0 \amalg \dots \amalg J_p$ est la décomposition associée à S' , l'action sur la fibre de \mathcal{E} du sous-tore fixateur $\mathbb{G}_m^{p+1} = (\mathbb{G}_m^{n+1})_{S'} \hookrightarrow \mathbb{G}_m^{n+1}$ se fait par les caractères $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \mapsto \lambda_i$, $0 \leq i \leq p$, chacun apparaissant avec la multiplicité $d_{J_i}^{S'}$.

À cause de la forme particulière de la condition discrète qui est imposée dans la définition du champ $\overline{\text{Vec}}^{r,S}$, on a :

PROPOSITION. Si $(X \rightarrow \mathcal{A}^S / \tilde{\mathcal{A}}_{\emptyset}^S, \mathcal{E})$ est un point de $\overline{\text{Vec}}^{r,S}$ à valeurs dans un schéma X , on peut lui associer canoniquement des fibrés \mathcal{E}_{α} de rangs $r_{\alpha} = r - d_{\{0, \dots, n\} - \{\alpha\}}^S$, $0 \leq \alpha \leq n$, sur X et un homomorphisme linéaire \mathbb{G}_m^{n+1} -équivariant

$$\mathcal{E} \rightarrow \bigoplus_{\alpha=0}^n \text{pr}_X^* \mathcal{E}_{\alpha}$$

(où pr_X désigne la projection $\tilde{X} \rightarrow X$).

On note $\text{Vec}^{r,S}$ le sous-champ ouvert de $\overline{\text{Vec}}^{r,S}$ où l'homomorphisme $\mathcal{E} \rightarrow \bigoplus_{\alpha=0}^n \text{pr}_X^* \mathcal{E}_{\alpha}$ est injectif en tout point de \tilde{X} .

Voici la première caractérisation modulaire des schémas $\bar{\Omega}^{S,E}$:

THÉORÈME. *On a un carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega}^{S,E} & \longrightarrow & \mathcal{V}ec^{r,S} \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \prod_{\alpha=0}^n \mathrm{Gr}^{r_\alpha, E_\alpha} & \longrightarrow & \prod_{\alpha=0}^n \mathrm{BGL}_{r_\alpha} \end{array}$$

où la première flèche horizontale (qui donc est lisse et surjective) est définie par \mathcal{E}^S et la seconde flèche verticale est $\mathcal{E} \mapsto (\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha=0}^n$.

Cheminant maintenant vers la seconde caractérisation modulaire, on considère un point $(X \rightarrow \mathcal{A}^S/\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S, \mathcal{E})$ du champ $\mathcal{V}ec^{r,S}$ à valeurs dans un schéma X . Par définition de $\mathcal{V}ec^{r,S}$ comme ouvert de $\overline{\mathcal{V}ec}^{r,S}$, le fibré \mathcal{E} sur \tilde{X} est muni d'un plongement canonique

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha=0}^n \mathrm{pr}_X^* \mathcal{E}_\alpha.$$

On note $\mathring{\mathcal{E}}$ l'ouvert de \mathcal{E} image réciproque de $\prod_{\alpha=0}^n (\mathcal{E}_\alpha - \{0\})$ puis $\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ le quotient de $\mathring{\mathcal{E}}$ par l'action libre de \mathbb{G}_m^{n+1} .

PROPOSITION. *Pour \mathcal{E} comme ci-dessus, $\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ est une fibration projective et plate sur X qui est munie d'un morphisme*

$$\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E}) \rightarrow \tilde{X}/\mathbb{G}_m^{n+1}$$

lisse de dimension relative r .

La géométrie des fibrations $\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ est décrite dans le paragraphe 5.3. Leur construction est universelle au sens du théorème suivant :

THÉORÈME. *Soit $\mathcal{P}roj^{r,S}$ le champ algébrique sur $\mathcal{A}^S/\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S$ qui associe à tout schéma X muni d'un morphisme*

$$X \rightarrow \mathcal{A}^S/\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S$$

le groupoïde des fibrations projectives et plates

$$p: P \rightarrow X$$

vérifiant $p_\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_X$ et $R^i p_*\mathcal{O}_P = 0$, $\forall i \geq 1$, et munies d'un morphisme lisse de dimension relative r qui relève p*

$$\tilde{p}: P \rightarrow \tilde{X}/\mathbb{G}_m^{n+1}.$$

Alors le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{V}ec^{r,S} &\rightarrow \mathcal{P}roj^{r,S} \\ \mathcal{E} &\mapsto \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E}) \end{aligned}$$

est une immersion ouverte.

Ce théorème qui occupe le chapitre 5 et dernier du présent texte appelle plusieurs commentaires et questions.

Tout d'abord, l'auteur doit dire qu'il ne sait pas caractériser $\mathcal{V}ec^{r,S}$ comme ouvert dans le champ algébrique $\mathcal{P}roj^{r,S}$. Mais on peut poser la question suivante :

QUESTION 3. *Est-il vrai ou faux que l'immersion ouverte*

$$\mathcal{V}ec^{r,S} \hookrightarrow \mathcal{P}roj^{r,S}$$

est aussi fermée, autrement dit que son image est une réunion de composantes connexes ?

Quand on réfléchit au sens concret de cette question, le premier cas qui se présente est celui d'un schéma projectif et lisse sur le spectre d'un anneau de valuation discrète A dont la fibre générique est un espace projectif. Est-il vrai alors que la fibre spéciale est aussi un espace projectif ? Comme Fabrizio Catanese l'a montré à l'auteur, la réponse est oui, même si A est de caractéristique positive ou mixte.

Pour démontrer le théorème ci-dessus, on doit prouver en particulier qu'un point de $\mathcal{V}ec^{r,S}$ admet les mêmes déformations que son image dans $\mathcal{P}roj^{r,S}$. Pour ce faire, l'auteur a été inspiré par l'étude cohomologique des déformations des « schémas de Deligne » qui figurait dans une version préliminaire de l'article [Faltings, 2001] (mais a disparu de la version définitive publiée). On montre en fait (c'est l'objet des paragraphes 5.4 et 5.5) que les complexes cotangents relatifs associés aux deux problèmes de modules $\mathcal{V}ec^{r,S}$ et $\mathcal{P}roj^{r,S}$ ont la même cohomologie non seulement en degrés 0, 1 et 2 comme il aurait suffi mais en tous degrés. On vérifie au paragraphe 5.8 qu'au moins sur la strate ouverte un phénomène identique se produit pour les isomorphismes de dualité : quand deux fibrations de type $\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E})$ sont duales l'une de l'autre, leurs fibrés tangents logarithmiques ont même cohomologie en tous degrés bien que les dimensions de ces fibrations soient différentes en général.

Cela suggère qu'à la façon par exemple de l'article [Ciocan-Fontanine et Kapranov, 2001], tous les schémas projectifs $\bar{\Omega}^{S,E}$ devraient se relever naturellement en des « schémas différentiels gradués » qui seraient lisses sur les champs toriques de pavages $\mathcal{A}^S/\mathcal{A}_\emptyset^S$. Si d'ailleurs on relit la fausse démonstration de la lissité du morphisme de structure $\bar{\Omega}^{S,E} \rightarrow \mathcal{A}^S/\mathcal{A}_\emptyset^S$ dans l'article [Lafforgue, 1999] (dans le cas des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$), on y trouve un faux calcul de dimension qui est en fait un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré. Il doit pouvoir s'interpréter comme un calcul de dimension d'un « schéma différentiel gradué » lisse qui relève $\bar{\Omega}^{S,E}$.

Cependant, les remarques et questions qui intéressent le plus l'auteur à propos du théorème ci-dessus sont peut-être celles relatives à la définition même des champs $\mathcal{P}roj^{r,S}$.

Ces champs sont munis d'un morphisme de structure sur $\mathcal{A}^S/\tilde{\mathcal{A}}_\emptyset^S$ et *a fortiori* sur $\mathcal{A}^S/\mathcal{A}_\emptyset^S$ si bien qu'ils sont réunions de strates localement fermées $\mathcal{P}roj_{\underline{S}}^{r,S}$ indexées par les pavages entiers convexes \underline{S} des convexes entiers S .

La strate ouverte $\mathcal{P}roj_{\emptyset}^{r,S}$ associée au pavage trivial d'un S classe des variétés projectives munies d'un morphisme lisse sur le champ quotient Y_S/\mathbb{G}_m^{n+1} de la variété torique Y_S des faces de S par le tore \mathbb{G}_m^{n+1} . Cela revient à classer des variétés projectives munies de structures logarithmiques d'un type donné relativement auxquelles elles sont lisses. Autrement dit encore, on classe des variétés projectives dont les singularités sont prescrites et qui sont munies d'une famille de diviseurs dont les intersections mutuelles ont des singularités prescrites.

Si maintenant \underline{S} est un pavage entier convexe de S , la strate de bord $\mathcal{P}roj_{\underline{S}}^{r,S}$ classe des schémas projectifs munis d'un morphisme lisse sur le champ quotient

$Y_{\underline{S}}/\mathbb{G}_m^{n+1}$ du schéma équivariant $Y_{\underline{S}}$ des facettes de \underline{S} par \mathbb{G}_m^{n+1} . Les composantes irréductibles de ces schémas projectifs sont les images réciproques de celles $Y_{S'}/\mathbb{G}_m^{n+1}$ de $Y_{\underline{S}}/\mathbb{G}_m^{n+1}$, elles sont indexées par les cellules S' du pavage \underline{S} , ce sont des points des champs $\mathcal{P}roj_{\emptyset}^{r,S'}$ et elles sont recollées entre elles suivant les mêmes règles combinatoires que les cellules S' pour constituer le pavage \underline{S} .

On reconnaît là une situation fréquente en géométrie algébrique (fibrés stables, chtoucas de Drinfeld, variétés abéliennes et semi-abéliennes, ...) où, en voulant compactifier des espaces de modules classifiant un certain type d'objets prescrit par une donnée combinatoire, on voit apparaître au bord des strates localement fermées qui classifient des familles d'objets de types similaires mais prescrits par des données combinatoires « plus petites » et qui sont recollés entre eux suivant certaines règles.

Dans notre situation, aussi bien les types d'objets classifiés que les règles de recollement pour les strates de bord et que le passage continu de la strate ouverte aux strates de bord (où les singularités prescrites changent) sont formalisés par le système simple des deux variétés toriques l'une sur l'autre, celle \mathcal{A}^S des pavages et celle $\tilde{\mathcal{A}}^S$ des pavages avec facette distinguée.

Il est frappant de constater que dans la définition des champs $\mathcal{P}roj^{r,S}$ le caractère linéaire de la construction initiale des schémas projectifs $\bar{\Omega}^{S,E}$ a complètement disparu et on peut se demander jusqu'où la théorie peut être généralisée pour englober peut-être certains espaces de modules classiques de la géométrie algébrique et leurs compactifications. Il semble clair que la théorie classique la plus proche de celle des $\bar{\Omega}^{S,E}$ est celle des champs modulaires $\mathcal{M}_{g,n}$ de courbes de genre g avec n points marqués et de leurs compactifications $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$: les « morphismes de faces » reliant les différents $\bar{\Omega}^{S,E}$ correspondent aux morphismes d'oubli d'une partie des points marqués ou aux morphismes « triviaux » consistant à oublier tout sauf tel ou tel point marqué et les strates localement fermées du bord des $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ se construisent en recollant des $\mathcal{M}_{g',n'}$ au moyen de ces morphismes.

QUESTION 4. *Existe-t-il une généralisation commune de la théorie des $\bar{\Omega}^{S,E}$ et de celle des $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$?*

En particulier, est-il possible de formaliser la combinatoire des $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ et de leurs strates de bord au moyen d'une famille de paires de champs reliés ($\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$) dont les points de l'un correspondraient à des pavages d'un certain type d'objets et les points de l'autre à des pavages avec facette distinguée ?

Comme on a vu, la théorie des $\bar{\Omega}^{S,E}$ et celle des $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$ ont une intersection non vide consistant en les $\bar{\mathcal{M}}_{0,n}$. Si on se rappelle que les courbes elliptiques dégénèrent en « polygones de Néron » c'est-à-dire en familles de droites projectives recollées circulairement, on est tenté de penser que la combinatoire des $\bar{\mathcal{M}}_{1,n}$ pourrait s'exprimer en termes de pavages d'objets ayant le même type d'homotopie que le cercle (alors que dans la situation « linéaire » du présent texte, les objets qu'on pave pour exprimer la combinatoire des $\bar{\Omega}^{S,E}$ et en particulier des $\bar{\mathcal{M}}_{0,n}$ sont des polyèdres convexes, donc homotopiquement triviaux).

Quoi qu'il en soit de la question 4, l'auteur pense que les schémas $\bar{\Omega}^{S,E}$ ne doivent pas être étudiés isolément mais reliés entre eux par les différents morphismes fonctoriels, en particulier les morphismes de faces, et par les processus de passage

aux strates de bord et de décomposition de ces strates, de même que la théorie de la « tour de Teichmüller » consiste à regarder les $\mathcal{M}_{g,n}$ tous ensemble.

Remerciements

À la fin de cette introduction, je suis particulièrement heureux de remercier les personnes qui à un moment ou un autre m'ont manifesté leur intérêt pour cette recherche longue, difficile et balbutiante, Gérard Laumon depuis le jour où j'ai commencé à lui parler de pavages du triangle et de recollement de morceaux de grassmanniennes, Alain Genestier, Ngo Bao Chau, Michael Rapoport qui m'a appris que dans la littérature mathématique les $\text{Gr}_S^{r,E}$ s'appelaient des cellules de Schubert minces et qui m'a renvoyé aux articles [Gel'fand, Goresky, MacPherson et Serganova, 1987] et [Gel'fand et Serganova, 1987], Jean-François Boutot qui m'a appris l'existence du théorème de Mnëv, Michel Brion, C.S. Seshadri, C. De Concini, Fedor Bogomolov, Vladimir Drinfeld, . . .

Je remercie aussi beaucoup les quelques auditeurs de la série d'exposés que j'ai faite sur les schémas $\overline{\Omega}^{S,E}$ au printemps 2001 à l'IHÉS. J'exprime en particulier ma profonde reconnaissance envers Ofer Gabber qui par ses très nombreuses questions, remarques et corrections a énormément contribué à améliorer et clarifier le contenu des exposés. Au cours de la rédaction du texte, j'ai aussi souvent bénéficié de son aide pour répondre à des questions de géométrie algébrique. Plus que tout, sa remarque (facile mais que je n'avais pas faite) en novembre 2000 que les espaces de configurations sont universels au sens des motifs a relancé pour moi l'intérêt de toute la théorie.

Je remercie également le Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal et en particulier son directeur, Jacques Hurtubise, de m'avoir invité dans le cadre de la « chaire Aisenstadt », de m'avoir ainsi donné l'occasion de faire une nouvelle série d'exposés sur le contenu de ce livre, à Montréal en mai 2002, puis de m'avoir proposé de le publier dans la série des monographies du CRM.

Enfin c'est vraiment un très grand plaisir pour moi de remercier Mme Cécile Cheikhchoukh de l'IHÉS pour son travail de frappe de l'ensemble du manuscrit, effectué avec une rapidité impressionnante, avec perfection et toujours dans la bonne humeur, et de remercier aussi beaucoup Mme Marie-Claude Vergne qui a réalisé tous les dessins.

Sommaire

| | |
|--|-------|
| Introduction | iii |
| Remerciements | xviii |
| Chapitre 1. Cellules de Schubert minces et espaces de configurations de matroïdes | |
| 1.1. Matroïdes, convexes entiers et cellules de Schubert minces | 1 |
| 1.2. Propriétés des convexes entiers | 3 |
| 1.3. Restriction aux faces | 5 |
| 1.4. Morphismes simpliciaux | 7 |
| 1.5. Le cas où tous les E_α sont de rang r | 8 |
| 1.6. Lien avec les espaces de configurations quand les E_α sont de rang 1 | 9 |
| 1.7. Application du théorème de Thalès | 12 |
| 1.8. Le théorème de Mnëv | 14 |
| Chapitre 2. Compactifications : Pavages de convexes entiers et recollement des cellules de Schubert minces | |
| 2.1. Le champ torique des pavages d'un convexe entier | 19 |
| 2.2. Recollement des cellules de Schubert minces | 23 |
| 2.3. Mise en famille. Projectivité | 23 |
| 2.4. Restriction aux faces | 28 |
| 2.5. Morphismes simpliciaux | 34 |
| 2.6. Restriction d'un pavage à une de ses facettes | 37 |
| 2.7. Changement des espaces ambiants | 39 |
| 2.8. Dualité | 40 |
| Chapitre 3. Étude de quelques familles simples de compactifications | |
| 3.1. Les cas des rangs $r = 1$ et $r = 2$ | 43 |
| 3.2. Espaces de configurations en rangs $r = 1$ et $r = 2$ et leurs duaux | 48 |
| 3.3. Un lemme de Chow pour les espaces de configurations | 53 |
| 3.4. Conséquences de l'action du groupe $\text{Aut}(E_0) \times \cdots \times \text{Aut}(E_n)$ | 56 |
| 3.5. Lissité pour les multiplicités $n + 1 \leq 3$ | 63 |
| 3.6. Relation entre strates des compactifications et produits fibrés d'espaces de configurations | 69 |
| 3.7. Les pavés entiers petits en dimension $n = 3$ | 73 |
| 3.8. Examen des rangs $r = 2, 3$ et 4 en dimension $n = 3$ | 75 |
| Chapitre 4. Le fibré équivariant universel sur la variété torique des facettes des pavages | |
| 4.1. Le champ torique des pavages avec facette distinguée | 81 |
| 4.2. Le morphisme d'oubli des facettes distinguées | 83 |

| | | |
|--|--|-----|
| 4.3. | Le fibré équivariant canonique | 88 |
| 4.4. | Le champ des fibrés équivariants | 91 |
| 4.5. | Décomposition d'un convexe entier en facteurs et fibrés équivariants | 96 |
| 4.6. | Restrictions aux faces d'un convexe entier ou aux facettes d'un pavage | 100 |
| 4.7. | Universalité du fibré équivariant canonique | 103 |
| 4.8. | Cohomologie équivariante et déformations | 115 |
| Chapitre 5. Variations de variétés projectives rationnelles avec structures logarithmiques | | 121 |
| 5.1. | La fibration projective canonique | 121 |
| 5.2. | Résolution canonique du champ torique des faces d'un convexe entier | 124 |
| 5.3. | Géométrie des fibres | 129 |
| 5.4. | Cohomologie cohérente des fibrés tangents relatifs | 135 |
| 5.5. | Le cas d'un pavé entier et de son pavage trivial | 140 |
| 5.6. | Fibrés inversibles sur la fibration projective canonique | 151 |
| 5.7. | Universalité de la fibration projective canonique | 157 |
| 5.8. | Retour sur la dualité | 163 |
| Références bibliographiques | | 169 |

Références bibliographiques

- E. ARTIN, *Geometric algebra*, Interscience, New York-Londres, 1957; traduction française, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK et L. ILLUSIE (éd.), *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Math., vol. 569, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- I. CIOCAN-FONTANINE et M. KAPRANOV, *Derived Quot schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), n° 3, 403–440.
- C. DE CONCINI et C. PROCESI, *Complete symmetric varieties*, Invariant Theory, (Montecatini, 1982) (F. GHERARDELLI, éd.) Lecture Notes in Math., vol. 996, Springer, Berlin, 1983, p. 1–44
- G. FALTINGS, Explicit resolution of local singularities of moduli-spaces, J. Reine Angew. Math **483** (1997), 183–196.
- , *Toroidal resolutions for some matrix singularities*, Moduli of Abelian Varieties (Texel, 1999) (C. FABER, G. VAN DER GEER et F. OORT, éd), Progr. Math., vol. 195, Birkhäuser, Bâle, 2001, p. 157–184.
- I.M. GEL'FAND, R.M. GORESKY, R.D. MACPHERSON et V.V. SERGANOVA, *Combinatorial geometries, convex polyhedra and Schubert cells*, Adv. in Math. **63** (1987), n° 3, 301–316.
- I.M. GEL'FAND, M.M. KAPRANOV et A.V. ZELEVINSKY, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
- I.M. GEL'FAND et R.D. MACPHERSON, *Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm*, Adv. in Math. **44** (1982), n° 3, 279–312.
- I.M. GEL'FAND et V.V. SERGANOVA, Combinatorial geometries and torus strata on compact homogeneous spaces, Uspekhi Mat. Nauk **42** (1987), n° 2, p. 107–134 (russe); traduction anglaise, Russian Math. Surveys **42** (1987), n° 2, 133–168.
- A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique*. I. Le langage des schémas, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., n° 4, 1960; II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, n° 8, 1961; III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I, n° 11, 1961; III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II, n° 17, 1963; IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I, n° 20, 1964; IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II, n° 24, 1965; IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III, n° 28, 1966; IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV, n° 32, 1967.
- , *Fondements de la géométrie algébrique*, Séminaire Bourbaki 1957–62, Secrétariat mathématique, Paris, 1962.
- H. GÜNZEL, *The universal partition theorem for oriented matroids*, Discrete Comput. Geom. **15** (1996), n° 2, 121–145.
- L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations*. I, Lecture Notes in Math., vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971; II, vol. 283, 1972.
- M.M. KAPRANOV, *Chow quotients of Grassmannians*. I, I.M. Gelfand Seminar (S. Gelfand et S. Gindikin, éd.), Adv. Soviet Math., vol. 16, 2^e partie, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, p. 29–110.
- L. LAFFORGUE, *Compactification de $(\mathrm{PGL}_r \times \mathrm{PGL}_r \times \mathrm{PGL}_r)/\mathrm{PGL}_r$ et de l'isogénie de Lang dans PGL_r , et dégénérescence des structures de niveau simple des chtoucas de Drinfeld*, Prépublication d'Orsay (1^{er} trimestre 1998).

- , *Pavages des simplexes, schémas de graphes recollés et compactification des $\mathrm{PGL}_r^{n+1}/\mathrm{PGL}_r$* , Invent. Math. **136** (1999), n° 1, 233–271.
- , *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), n° 1, 1–241.
- G. LAUMON et L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- N.E. MNEV, *The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties*, Topology and Geometry—Rohlin Seminar, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer, Berlin, 1988, p. 527–543.
- D. MUMFORD et F. FOGARTY, *Geometric invariant theory*, 2^eédition, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- J. RICHTER-GEBERT, *Realization spaces of polytopes*, Lecture Notes in Math., vol. 1643, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- B. SAINT-DONAT et G. KEMPF, *Equivariant embeddings of tori*, Toroidal Embeddings. I, Lecture Notes in Math., vol. 339, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, p. 1–52.
- G. VORONOI, *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques*, J. Reine Angew. Math **133** (1907), p. 97-178.

Titles in This Series

- 19 **L. Lafforgue**, Chirurgie des grassmanniennes, 2003
- 18 **G. Lusztig**, Hecke algebras with unequal parameters, 2003
- 17 **Michael Barr**, Acyclic models, 2002
- 16 **Joel Feldman, Horst Knörrer, and Eugene Trubowitz**, Fermionic functional integrals and the renormalization group, 2002
- 15 **José I. Burgos Gil**, The regulators of Beilinson and Borel, 2002
- 14 **Eyal Z. Goren**, Lectures on Hilbert modular varieties and modular forms, 2002
- 13 **Michael Baake and Robert V. Moody, Editors**, Directions in mathematical quasicrystals, 2000
- 12 **Masayoshi Miyanishi**, Open algebraic surfaces, 2001
- 11 **Spencer J. Bloch**, Higher regulators, algebraic K -theory, and zeta functions of elliptic curves, 2000
- 10 **James D. Lewis**, A survey of the Hodge conjecture, Second Edition, 1999
- 9 **Yves Meyer**, Wavelets, vibrations and scaling, 1998
- 8 **Ioannis Karatzas**, Lectures on the mathematics of finance, 1996
- 7 **John Milton**, Dynamics of small neural populations, 1996
- 6 **Eugene B. Dynkin**, An introduction to branching measure-valued processes, 1994
- 5 **Andrew Bruckner**, Differentiation of real functions, 1994
- 4 **David Ruelle**, Dynamical zeta functions for piecewise monotone maps of the interval, 1994
- 3 **V. Kumar Murty**, Introduction to Abelian varieties, 1993
- 2 **M. Ya. Antimirov, A. A. Kolyshkin, and Rémi Vaillancourt**, Applied integral transforms, 1993
- 1 **D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica**, Free random variables, 1992

Les compactifications diverses de variétés de modules sont un thème important et récurrent des mathématiques modernes, et elles connaissent un grand nombre d'applications. Ce livre traite le cas de cellules de Schubert minces, qui sont de sous-variétés naturelles de grassmanniennes. L'auteur a été amené à traiter ces questions par un cas particulier lié à ses travaux sur le programme de Langlands. Dans cette monographie, il en développe une théorie plus systématique, présentant les fortes similarités avec celle des modules du courbes stables.

The various compactifications of moduli spaces are an important recurrent theme of modern mathematics, and they have a large number of applications. This book treats the case of thin Schubert varieties, which are natural subvarieties of Grassmannians. The author was led to these questions by a particular case linked to his work on the Langlands program. In this monograph, he develops the theory in a more systematic way, which exhibits strong similarities with the case of moduli of stable curves.



For additional information
and updates on this book, visit

www.ams.org/bookpages/crmm-19

ISBN 0-8218-3358-8



9 780821 833582

CRMM/19

AMS on the Web
www.ams.org