

Contents

Préface	ix
Introduction	xi
Conventions and Notations	xv
Chapter I. Involutions and Hermitian Forms	1
§1. Central Simple Algebras	3
1.A. Fundamental theorems	3
1.B. One-sided ideals in central simple algebras	5
1.C. Severi-Brauer varieties	9
§2. Involutions	13
2.A. Involutions of the first kind	13
2.B. Involutions of the second kind	20
2.C. Examples	23
2.D. Lie and Jordan structures	27
§3. Existence of Involutions	31
3.A. Existence of involutions of the first kind	32
3.B. Existence of involutions of the second kind	36
§4. Hermitian Forms	41
4.A. Adjoint involutions	42
4.B. Extension of involutions and transfer	45
§5. Quadratic Forms	53
5.A. Standard identifications	53
5.B. Quadratic pairs	55
Exercises	63
Notes	67
Chapter II. Invariants of Involutions	71
§6. The Index	71
6.A. Isotropic ideals	72
6.B. Hyperbolic involutions	74
6.C. Odd-degree extensions	79
§7. The Discriminant	80
7.A. The discriminant of orthogonal involutions	80
7.B. The discriminant of quadratic pairs	83
§8. The Clifford Algebra	87
8.A. The split case	87
8.B. Definition of the Clifford algebra	91
8.C. Lie algebra structures	95

8.D. The center of the Clifford algebra	99
8.E. The Clifford algebra of a hyperbolic quadratic pair	106
§9. The Clifford Bimodule	107
9.A. The split case	107
9.B. Definition of the Clifford bimodule	108
9.C. The fundamental relations	113
§10. The Discriminant Algebra	114
10.A. The λ -powers of a central simple algebra	115
10.B. The canonical involution	117
10.C. The canonical quadratic pair	119
10.D. Induced involutions on λ -powers	123
10.E. Definition of the discriminant algebra	127
10.F. The Brauer class of the discriminant algebra	130
§11. Trace Form Invariants	132
11.A. Involutions of the first kind	133
11.B. Involutions of the second kind	138
Exercises	145
Notes	148
Chapter III. Similitudes	153
§12. General Properties	153
12.A. The split case	153
12.B. Similitudes of algebras with involution	158
12.C. Proper similitudes	163
12.D. Functorial properties	168
§13. Quadratic Pairs	172
13.A. Relation with the Clifford structures	172
13.B. Clifford groups	177
13.C. Multipliers of similitudes	190
§14. Unitary Involutions	193
14.A. Odd degree	193
14.B. Even degree	194
14.C. Relation with the discriminant algebra	195
Exercises	199
Notes	203
Chapter IV. Algebras of Degree Four	205
§15. Exceptional Isomorphisms	205
15.A. $B_1 \cong C_1$	207
15.B. $A_1^2 \cong D_2$	210
15.C. $B_2 \cong C_2$	216
15.D. $A_3 \cong D_3$	220
§16. Biquaternion Algebras	233
16.A. Albert forms	235
16.B. Albert forms and symplectic involutions	237
16.C. Albert forms and orthogonal involutions	245
§17. Whitehead Groups	253
17.A. SK_1 of biquaternion algebras	253
17.B. Algebras with involution	266

Exercises	270
Notes	274
Chapter V. Algebras of Degree Three	279
§18. Étale and Galois Algebras	279
18.A. Étale algebras	280
18.B. Galois algebras	287
18.C. Cubic étale algebras	296
§19. Central Simple Algebras of Degree Three	302
19.A. Cyclic algebras	302
19.B. Classification of involutions of the second kind	304
19.C. Étale subalgebras	307
Exercises	319
Notes	321
Chapter VI. Algebraic Groups	323
§20. Hopf Algebras and Group Schemes	324
20.A. Group schemes	325
§21. The Lie Algebra and Smoothness	334
21.A. The Lie algebra of a group scheme	334
§22. Factor Groups	339
22.A. Group scheme homomorphisms	339
§23. Automorphism Groups of Algebras	344
23.A. Involutions	345
23.B. Quadratic pairs	350
§24. Root Systems	352
24.A. Classification of irreducible root systems	354
§25. Split Semisimple Groups	355
25.A. Simple split groups of type $A, B, C, D, F,$ and G	357
25.B. Automorphisms of split semisimple groups	360
§26. Semisimple Groups over an Arbitrary Field	360
26.A. Basic classification results	364
26.B. Algebraic groups of small dimension	373
§27. Tits Algebras of Semisimple Groups	375
27.A. Definition of the Tits algebras	376
27.B. Simply connected classical groups	378
27.C. Quasisplit groups	379
Exercises	380
Notes	381
Chapter VII. Galois Cohomology	383
§28. Cohomology of Profinite Groups	383
28.A. Cohomology sets	383
28.B. Cohomology sequences	385
28.C. Twisting	387
28.D. Torsors	388
§29. Galois Cohomology of Algebraic Groups	391
29.A. Hilbert's Theorem 90 and Shapiro's lemma	392
29.B. Classification of algebras	395

29.C. Algebras with a distinguished subalgebra	398
29.D. Algebras with involution	399
29.E. Quadratic spaces	406
29.F. Quadratic pairs	408
§30. Galois Cohomology of Roots of Unity	413
30.A. Cyclic algebras	414
30.B. Twisted coefficients	416
30.C. Cohomological invariants of algebras of degree three	420
§31. Cohomological Invariants	423
31.A. Connecting homomorphisms	423
31.B. Cohomological invariants of algebraic groups	429
Exercises	442
Notes	446
Chapter VIII. Composition and Triality	451
§32. Nonassociative Algebras	451
§33. Composition Algebras	454
33.A. Multiplicative quadratic forms	454
33.B. Unital composition algebras	456
33.C. Hurwitz algebras	458
33.D. Composition algebras without identity	462
§34. Symmetric Compositions	463
34.A. Para-Hurwitz algebras	464
34.B. Petersson algebras	466
34.C. Cubic separable alternative algebras	469
34.D. Alternative algebras with unitary involutions	477
34.E. Cohomological invariants of symmetric compositions	480
§35. Clifford Algebras and Triality	481
35.A. The Clifford algebra	481
35.B. Similitudes and triality	483
35.C. The group Spin and triality	485
§36. Twisted Compositions	489
36.A. Multipliers of similitudes of twisted compositions	493
36.B. Cyclic compositions	495
36.C. Twisted Hurwitz compositions	499
36.D. Twisted compositions of type A'_2	504
36.E. The dimension 2 case	506
Exercises	507
Notes	509
Chapter IX. Cubic Jordan Algebras	513
§37. Jordan Algebras	513
37.A. Jordan algebras of quadratic forms	514
37.B. Jordan algebras of classical type	515
37.C. Freudenthal algebras	516
§38. Cubic Jordan Algebras	519
38.A. The Springer decomposition	522
§39. The Tits Construction	524
39.A. Symmetric compositions and Tits constructions	528

39.B. Automorphisms of Tits constructions	529
§40. Cohomological Invariants	533
40.A. Invariants of twisted compositions	539
§41. Exceptional Simple Lie Algebras	539
Exercises	540
Notes	542
Chapter X. Trialitarian Central Simple Algebras	547
§42. Algebras of Degree 8	547
42.A. Trialitarian triples	547
42.B. Decomposable involutions	550
§43. Trialitarian Algebras	552
43.A. A definition and some properties	552
43.B. Quaternionic trialitarian algebras	555
43.C. Trialitarian algebras of type 2D_4	558
§44. Classification of Algebras and Groups of Type D_4	560
44.A. Groups of trialitarian type D_4	561
44.B. The Clifford invariant	563
§45. Lie Algebras and Triality	565
45.A. Local triality	567
45.B. Derivations of twisted compositions	569
45.C. Lie algebras and trialitarian algebras	569
Exercise	571
Notes	571
Bibliography	573
Index	585
Notation	589

Préface

Quatre des meilleurs algébristes d'aujourd'hui (j'aimerais dire, comme jadis, «géomètres», au sens noble mais hélas désuet du terme) nous donnent ce beau *Livre des Involutions*, qu'ils me demandent de préfacer.

Quel est le propos de l'ouvrage et à quels lecteurs s'adresse-t-il? Bien sûr il y est souvent question d'involutions, mais celles-ci sont loin d'être omniprésentes et le titre est plus l'expression d'un état d'âme que l'affirmation d'un thème central. En fait, les questions envisagées sont multiples, relevant toutes de domaines importants des mathématiques contemporaines; sans vouloir être exhaustif (ceci n'est pas une introduction), on peut citer :

- les formes quadratiques et les algèbres de Clifford,
- les algèbres associatives centrales simples (ici les involutions, et notamment celles de seconde espèce, se taillent une place de choix!) mais aussi les algèbres alternatives et les algèbres de Jordan,
- les algèbres de Hopf,
- les groupes algébriques, principalement semi-simples,
- la cohomologie galoisienne.

Pour ce qui est du public concerné, la lecture ou la consultation du livre sera profitable à un large éventail de mathématiciens. Le non-initié y trouvera une introduction claire aux concepts fondamentaux des domaines en question; exposés le plus souvent en fonction d'applications concrètes, ces notions de base sont présentées de façon vivante et dépouillée, sans généralités gratuites (les auteurs ne sont pas adeptes de grandes théories abstraites). Le lecteur déjà informé, ou croyant l'être, pourra réapprendre (ou découvrir) quelques beaux théorèmes jadis «bien connus» mais un peu oubliés dans la littérature récente, ou au contraire, voir des résultats qui lui sont en principe familiers exposés sous un jour nouveau et éclairant (je pense par exemple à l'introduction des algèbres trialitaires au dernier chapitre). Enfin, les spécialistes et les chercheurs auront à leur disposition une référence précieuse, parfois unique, pour des développements récents, souvent dus aux auteurs eux-mêmes, et dont certains sont exposés ici pour la première fois (c'est par exemple le cas pour plusieurs résultats sur les invariants cohomologiques, donnés à la fin du chapitre 7).

Malgré la grande variété des thèmes considérés et les individualités très marquées des quatre auteurs, ce *Livre des Involutions* a une unité remarquable. Le ciment un peu fragile des involutions n'est certes pas seul à l'expliquer. Il y a aussi, bien sûr, les interconnexions multiples entre les sujets traités; mais plus déterminante encore est l'importance primordiale accordée à des structures fortes, se prêtant par exemple à des théorèmes de classification substantiels. Ce n'est pas un hasard si les algèbres centrales simples de petites dimensions (trois et quatre), les groupes exceptionnels de type G_2 et F_4 (on regrette un peu que Sa Majesté E_8

fasse ici figure de parent pauvre), les algèbres de composition, . . . , reçoivent autant d'attention.

On l'a compris, ce Livre est tout à la fois un livre de lecture passionnant et un ouvrage de référence d'une extrême richesse. Je suis reconnaissant aux auteurs de l'honneur qu'ils m'ont fait en me demandant de le préfacer, et plus encore de m'avoir permis de le découvrir et d'apprendre à m'en servir.

Jacques Tits