COMPLETELY CONTINUOUS TRANSFORMATIONS IN HILBERT SPACE

F. SMITHIES

Let $\mathfrak{H}$ be a real or complex Hilbert space; we do not assume that $\mathfrak{H}$ is separable. The following theorem is well known:*

THEOREM. *Let T be a linear symmetric completely continuous transformation defined throughout $\mathfrak{H}$ and not identically zero. Then there exist an element x of $\mathfrak{H}$ and a real number λ such that $x \neq 0$, $\lambda \neq 0$, and $Tx = \lambda x$.*

The proof presented below is rather simpler than Rellich's, though based on the same fundamental idea.

We first state a familiar lemma.

LEMMA.† *If T is a linear symmetric transformation defined throughout $\mathfrak{H}$ such that $|(Tx, x)| \leqq A$ whenever $\|x\| = 1$, then $\|Tx\| \leqq A$ whenever $\|x\| = 1$.*

The range of values of the expression (Tx, x), for elements x such that $\|x\| = 1$, is a bounded set of real numbers. For some such x, $(Tx, x) \neq 0$; if not, by the lemma, T would vanish identically. Let

$$\lambda = \sup |(Tx, x)|, \qquad \|x\| = 1. \tag{1}$$

Without loss of generality, we may suppose that

$$0 < \lambda = \sup (Tx, x), \qquad \|x\| = 1.$$

Otherwise we consider $-T$ instead of T. We can choose $\{x_n\}$ such that $\|x_n\| = 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$, and $(Tx_n, x_n) \to \lambda$, $n \to \infty$. Since T is completely continuous, $\{Tx_n\}$ contains a convergent subsequence, which we may take to be $\{Tx_n\}$ itself. Suppose that $Tx_n \to y$. Then because T is symmetric and $\|x_n\| = 1$,

$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda(Tx_n, x_n) + \lambda^2.$$

Hence, letting $n \to \infty$, we have

$$0 \leqq \lim_{n \to \infty} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|y\|^2 - \lambda^2. \tag{2}$$

---

* F. Rellich, *Spektraltheorie in nichtseparabeln Räumen*, Mathematische Annalen, vol. 110 (1934), pp. 342–356; 348.

† For a proof of this lemma, see M. H. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 15, New York, 1932, pp. 54–56.

By (1) and the lemma, $\|Tx_n\| \leqq \lambda$, $(n=1, 2, \cdots)$, so that $\|y\| \leqq \lambda$. It therefore follows from (2) that

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = 0. \tag{3}$$

Now $Tx_n \to y$; hence by (3), $\lambda x_n \to y$. Since $\lambda \neq 0$ and T is continuous, it follows that $Tx_n \to Ty/\lambda$, so that $Ty = \lambda y$. Finally, by (2) and (3), $\|y\| = \lambda \neq 0$, and the theorem is therefore proved.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES NOMBRES RATTACHÉ AUX POLYNÔMES DE TSCHEBYCHEFF

ERVIN FELDHEIM

Considérons *le polynôme de Tschebycheff particulier*

$$B_n(x) = \frac{[x + (x^2+4)^{1/2}]^{n+1} - [x - (x^2+4)^{1/2}]^{n+1}}{2^{n+1}(x^2+4)^{1/2}}, \tag{1}$$

$$n = -1, 0, 1, 2, \cdots .$$

Si l'on donne à la variable x la valeur $x=2$, ce polynôme prend, comme il est très facile de le vérifier, *des valeurs entières*, et la suite de ces nombres entiers possède des propriétés intéressantes que nous nous proposons de démontrer dans cette note.

Nous déduirons d'abord quelques relations valables pour les polynômes $B_n(x)$; la propriété des nombres mentionnés tout à l'heure que nous voulons établir s'en résultera facilement. Nous écrivons, pour simplifier, B_n au lieu de $B_n(x)$, de sorte que B_n désigne toujours un polynôme et non pas un nombre; pour $x=2$ nous introduirons une nouvelle notation.

La relation principale qui nous servira est bien connue, et se démontre d'ailleurs facilement en partant de (1). C'est la relation

$$B_{n+m} = B_n B_m + B_{n-1} B_{m-1}, \qquad n, m = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2}$$

En tenant compte des valeurs initiales du polynôme B_n, calculées au moyen de (1),

$$B_{-1} = 0, \qquad B_0 = 1, \qquad B_1 = x, \qquad B_2 = x^2 + 1,$$

on déduit de (2) une série de relations utiles. On a d'abord