MOSCOW MATHEMATICAL JOURNAL
Volume 4, Number 1, January–March 2004, Pages 217–244

LES VARIÉTÉS SUR LE CORPS À UN ÉLÉMENT

CHRISTOPHE SOULÉ

A Pierre Cartier

Abstract. We propose a definition of varieties over "the field with one element", a notion which had been imagined by Tits, Manin and others. Such a variety has an extension to the integers which is a usual algebraic variety. Examples include smooth toric varieties and euclidean lattices. We also define and compute a zeta function for these objects, and we propose a motivic interpretation of the image of Adams J-homomorphism.

2000 Math. Subj. Class. 14A99, 14M25, 11M99, 55Q50.

Key words and phrases. Algebraic varieties, toric varieties, euclidean lattices, zeta functions, J-homomorphism.

Une fantaisie récurrente de plusieurs mathématiciens ([23], [15], [20], [12], ...) est l'existence d'un "corps à un élément", noté $\mathbb{F}_1$, et d'une géométrie algébrique sur ce corps. On pense par exemple que le groupe des points de SL_N dans $\mathbb{F}_1$ est le groupe symétrique des permutations de N lettres, et que ces N lettres sont les points dans $\mathbb{F}_1$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^{N-1}$. Et l'on s'est aperçu depuis longtemps que des formules connues pour les points d'un groupe de Chevalley dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, $q > 1$, donnent par la spécialisation $q = 1$ des formules vraies pour le groupe de Weyl correspondant. Par ailleurs, l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions incite à chercher un corps de base pour la courbe affine $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Enfin, il y a un intérêt croissant en géométrie arithmétique pour les variétés algébriques sur $\mathbb{Z}$ issues de constructions combinatoires sur les ensembles finis.

Le but de cet article est de proposer une définition des variétés sur $\mathbb{F}_1$. Pour ce faire, on part de l'idée qu'une variété X (de type fini) sur $\mathbb{F}_1$ doit avoir une extension des scalaires à $\mathbb{Z}$, qui sera un schéma $X_{\mathbb{Z}}$ de type fini sur $\mathbb{Z}$. Les points de X (dans un anneau ad hoc) sont alors une partie, qu'on supposera finie, de l'ensemble des points de $X_{\mathbb{Z}}$. Par exemple, l'ensemble des points du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{F}_1$ dans un tel anneau R est l'ensemble des racines de l'unité de R.

La variété $X_{\mathbb{Z}}$ doit être entièrement déterminée par X (à isomorphisme unique près). Autrement dit, les variétés sur $\mathbb{Z}$ obtenues par extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ possèdent une description "combinatoire finie". Notre résultat principal (Théorème 1) est que les variétés toriques lisses peuvent être définies sur $\mathbb{F}_1$. Un autre exemple, inspiré de la théorie d'Arakelov, consiste à associer à tout réseau

Received May 6, 2003; in revised form August 28, 2003.

$\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d$ muni d'une norme hermitienne sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ une variété affine sur le corps $\mathbb{F}_1$. Cependant, nous n'avons pas su, à ce stade, définir sur $\mathbb{F}_1$ les groupes de Chevalley et les variétés de drapeaux.

Pour en revenir à la définition d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$, il se trouve que la donnée des points de X ne suffit pas à déterminer la variété algébrique $X_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$. C'est pourquoi nous sommes conduits à adjoindre à la donnée des points celle de fonctions, à savoir une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}_X$, qui sera dans nos exemples une algèbre de Banach commutative. La définition de X permet aussi d'évaluer les fonctions de $\mathcal{A}_X$ aux points de X. Dans le cas de $\mathbb{G}_m$ par exemple, l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathbb{G}_m}$ est celle des fonctions continues sur le cercle unité.

Une variété V sur $\mathbb{Z}$ définit un "objet sur $\mathbb{F}_1$", constitué du foncteur des points de V et de l'algèbre des fonctions algébriques sur $V(\mathbb{C})$. Si X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, son extension $X_{\mathbb{Z}}$ à $\mathbb{Z}$ est un objet initial parmi toutes les variétés V sur $\mathbb{Z}$ telles qu'il existe un morphisme d'objets sur $\mathbb{F}_1$ de X vers V (Définitions 3 et 5). L'existence de $X_{\mathbb{Z}}$ est une propriété non triviale de l'objet X.

Ce texte est organisé comme suit. Le premier paragraphe est un bref historique du corps $\mathbb{F}_1$ et des spéculations auxquelles il a donné lieu. Le second explique quels raisonnements ont conduit aux définitions présentées ici, qui font l'objet du troisième paragraphe. La section 4 donne quelques propriétés des variétés sur $\mathbb{F}_1$, qui indiquent une certaine cohérence de la théorie envisagée. On peut par exemple définir des variétés sur $\mathbb{F}_1$ par recollement (Proposition 5). La section suivante montre que les variétés toriques lisses et les réseaux hermitiens sont des exemples de variétés sur $\mathbb{F}_1$.

Dans le paragraphe 6 nous définissons, dans certains cas, la fonction zêta $\zeta_X(s)$ d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$, à partir du nombre de points de X dans les extensions finies de $\mathbb{F}_1$. Cette fonction $\zeta_X(s)$ est un polynôme de la variable s, qui est bien celui prévu par Manin dans son article [15] sur le sujet.

Le dernier paragraphe propose des spéculations sur l'image de la K-théorie algébrique de $\mathbb{F}_1$ dans celle de $\mathbb{Z}$. Il est naturel de penser que ce groupe est l'image de l'homomorphisme J d'Adams, qui prend ses valeurs dans les groupes d'homotopie stable des sphères. Un résultat de Totaro sur les variétés toriques [24] se révèle tout à fait cohérent avec une interprétation de cette image de J en termes d'extensions de motifs de Tate mixtes sur $\mathbb{F}_1$.

Ce travail n'est bien sûr qu'une tentative. Il serait intéressant de trouver d'autres exemples de variétés sur $\mathbb{F}_1$ et démontrer davantage de propriétés, quitte à modifier les définitions. Par exemple, on aimerait disposer de produits fibrés dans la catégorie des schémas sur $\mathbb{F}_1$. On signalera au cours du texte quelques variantes possibles des définitions présentées.

Une version préliminaire de cet article est la courte prépublication [21].

1. Un Historique

1.1. J. Tits parle dans [23, §13] du "corps de caractéristique un". Si G est un groupe de Chevalley, simple et simplement connexe, le groupe des points de G dans $\mathbb{F}_1$ n'est autre que le groupe de Weyl W de G:

$$W = G(\mathbb{F}_1). \tag{1}$$

Tits montre qu'on peut associer à G une "géométrie" finie, dont W est le groupe d'automorphismes et dont les propriétés sont comparables à celles du groupe fini $G(\mathbb{F}_q)$ pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, $q > 1$. Par exemple, la géométrie associée à $G_2(\mathbb{F}_1)$ est l'hexagone.

La théorie des représentations fournit aussi de nombreux exemples justifiant la formule (1). R. Steinberg avait déjà construit dans [22] des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{F}_q)$ de façon parallèle à celle des représentations du groupe symétrique de N lettres Σ_N. Leurs caractères sont des q-analogues des formules connues pour le groupe symétrique. Par exemple, si $N = N_1 + \cdots + N_r$, $N_i \geq 1$, est une partition de l'entier N et si $P \subset \mathrm{SL}_N$ est le sous-groupe parabolique standard associé à cette partition, le cardinal de l'ensemble fini $\mathrm{SL}_N(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)$ est

$$\#(\mathrm{SL}_N(\mathbb{F}_q)/P(\mathbb{F}_q)) = \{N\}/\{N_1\}\{N_2\}\dots\{N_r\},$$

avec

$$\{n\} = \prod_{i=1}^{n} [i]$$

et

$$[n] = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1.$$

Une telle formule, vraie si $q > 1$, demeure valable quand $q = 1$ si l'on pose

$$\Sigma_N = \mathrm{SL}_N(\mathbb{F}_1)$$

(cf. (1)) et

$$P(\mathbb{F}_1) = \prod_{i=1}^{r} \Sigma_{N_i}.$$

Si G est un groupe de Chevalley quelconque, les représentations "unipotentes" de $G(\mathbb{F}_q)$ sont des q-analogues des représentations de W. Les travaux plus récents de M. Broué, G. Malle et J. Michel [4], [5], [6] montrent qu'il est possible d'étendre cette analogie en faisant de q une variable abstraite.

1.2. Y. Manin aborde d'un autre point de vue la discussion du corps à un élément $\mathbb{F}_1$ [15]. L'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions [25], dont est issue la théorie d'Arakelov, fait du schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ l'analogue d'une courbe affine sur un corps. On peut voir dans $\mathbb{F}_1$ le corps de définition de la courbe $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Manin demande alors quel sens donner au produit fibré

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \underset{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)}{\times} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Une telle question est naturelle si l'on se souvient du rôle joué par la surface $C \times_{\mathbb{F}_q} C$ dans la preuve par Weil de l'hypothèse de Riemann pour une courbe projective et lisse C sur le corps fini $\mathbb{F}_q$.

Manin propose aussi de développer une géométrie algébrique sur le corps $\mathbb{F}_1$ ([15, 1.7]), ainsi qu'une théorie des motifs et des fonctions zêtas associées. Par exemple, l'espace projectif $\mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_1}$ de dimension d sur $\mathbb{F}_1$ devrait avoir pour fonction zêta le polynôme

$$\zeta_{\mathbb{P}^d_{\mathbb{F}_1}}(s) = s(s-1)(s-2)\dots(s-d). \tag{3}$$

1.3. Ces spéculations ont été poursuivies par Smirnov [20] et Kapranov–Smirnov [12], [11] (non publiés). Ceux-ci proposent une algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_1$ (un espace vectoriel linéaire sur $\mathbb{F}_1$ est un ensemble fini pointé) et expliquent en ces termes la loi de réciprocité de Gauss (voir [1] pour le cas géométrique). Ils proposent aussi que, si $n \geq 1$, le corps $\mathbb{F}_1$ a une extension finie de degré n, dont les éléments inversibles sont les racines de l'unité d'ordre n.

2. Préliminaires

2.1. Notre objectif est de définir les variétés algébriques sur le corps à un élément.

Notons d'abord que l'on ne s'attend pas à voir figurer $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ parmi ces variétés. En effet sa fonction zêta, la fonction zêta de Riemann, a un nombre infini de zéros, ce qui indique que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ n'est pas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$. Et nous ne chercherons pas à donner un sens au produit fibré (2).

Par contre, si X est une variété (de type fini) sur $\mathbb{F}_1$, on s'attend à ce que $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ soit une variété algébrique (de type fini) sur $\mathbb{Z}$. Si de plus X est lisse sur $\mathbb{F}_1$, la variété $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ aura bonne réduction partout, de réduction en p la variété algébrique $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{F}_p$, lisse que $\mathbb{F}_p$. Ceci nous conduit à la question suivante:

Question 1. *Quelles sont les variétés sur $\mathbb{Z}$ obtenues par extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$?*

On aimerait par exemple que les variétés toriques ou les variétés de drapeaux d'un groupe de Chevalley puissent être définies sur $\mathbb{F}_1$.

2.2. Un point de départ pour nos définitions est cette définition très économique des schémas: un schéma est un foncteur covariant de la catégorie des anneaux vers celle des ensembles qui est localement représentable par un anneau. On trouvera dans [8] la preuve que cette définition est équivalente à la définition usuelle. Ceci suggère de définir les variétés sur $\mathbb{F}_1$ comme foncteurs d'une catégorie d'anneaux vers celle des ensembles finis.

2.3. Puisqu'à une variété X sur $\mathbb{F}_1$ on souhaite associer une variété algébrique $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ sur les entiers, il convient de comprendre quel est le foncteur associé à l'extension des scalaires d'une variété algébrique.

Soit k un corps, $\mathcal{A}_k$ la catégorie des k-algèbres unitaires commutatives, et Ω un objet de $\mathcal{A}_k$. Si R est un objet de $\mathcal{A}_k$, on note $R_\Omega = R \otimes_k \Omega$ son extension des scalaires de k à Ω. De même, si X est un schéma sur k, on pose $X_\Omega = X \otimes_k \Omega$.

Notons $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. Si X est un schéma sur k, on désigne par

$$\underline{X} \colon \mathcal{A}_k \to \mathcal{E}ns$$

le foncteur covariant qui à R associe $X(R)$. De même, si S est un schéma sur Ω, on désigne par

$$\underline{S} \colon \mathcal{A}_k \to \mathcal{E}ns$$

le foncteur covariant qui à R associe $S(R_\Omega)$. La proposition suivante montre que le foncteur $\underline{X}_\Omega$ vérifie une propriété universelle.

Proposition 1. (i) *Pour tout objet R de $\mathcal{A}_k$ et tout schéma X sur k il existe une inclusion canonique naturelle*

$$X(R) \subset X_\Omega(R_\Omega).$$

On note $i\colon \underline{X} \to \underline{X}_\Omega$ la transformation naturelle ainsi définie.

(ii) *Si S est un schéma sur Ω et si*

$$\varphi\colon \underline{X} \to \underline{S}$$

est une transformation naturelle, il existe un unique morphisme algébrique sur Ω

$$\varphi_\Omega\colon X_\Omega \to S$$

tel que la transformation composée

$$\underline{X} \xrightarrow{i} \underline{X}_\Omega \xrightarrow{\underline{\varphi_\Omega}} \underline{S}$$

de i avec la transformation induite par φ_Ω coïncide avec φ, i. e., $\varphi = \underline{\varphi_\Omega} \circ i$.

Preuve. Puisque k est contenu dans Ω et que $X_\Omega(R_\Omega)$ coïncide avec l'ensemble des points de X dans la k-algèbre R_Ω, l'énoncé (i) est clair. Pour montrer (ii) supposons d'abord que X est affine et soit $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ la k-algèbre des fonctions globales sur X. L'identité de A définit un point $\mathrm{id}_A \in X(A)$, dont l'image par φ est un morphisme algébrique sur Ω:

$$\varphi_\Omega \in \mathrm{Hom}_\Omega(X_\Omega, S) = X_\Omega(A_\Omega).$$

Si R est une k-algèbre et $f \in X(R)$ un morphisme de A vers R, on a, par fonctorialité de φ,

$$\varphi(f) = f^*(\varphi(\mathrm{id}_A)) = f^*(\varphi_\Omega) = \varphi_\Omega \circ f_\Omega.$$

Cela montre que $\varphi = \underline{\varphi_\Omega} \circ i$.

Dans le cas général, soit $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ un recouvrement ouvert de X par des variétés affines et

$$\varphi\colon \underline{X} \to \underline{S}$$

une transformation naturelle. La restriction de $\underline{\varphi}$ à $\underline{X}_j$ (resp. $\underline{X_j \cap X_{j'}}$) est induite par un morphisme algébrique $\varphi_{j\Omega}\colon X_{j\Omega} \to S$ (resp. $\varphi_{jj'\Omega}\colon (X_j \cap X_{j'})_\Omega \to S$) et, par fonctorialité et unicité, la restriction de $\varphi_{j\Omega}$ à $(X_j \cap X_{j'})_\Omega$ coïncide avec $\varphi_{jj'\Omega}$ quels que soient les indices j et j' dans J. Par conséquent, les morphismes $\varphi_{j\Omega}$, $j \in J$, se recollent pour donner un morphisme

$$\varphi_\Omega\colon X \to S$$

algébrique sur Ω. Si R est une k-algèbre et $f\colon \mathrm{Spec}(R) \to X$ un point de $X(R)$, considérons les k-schémas affines $U_j = f^{-1}(X_j)$, $j \in J$. La restriction de $(\varphi_\Omega \circ i)(f)$ à $U_{j\Omega}$ coïncide par définition avec celle de $\varphi_{j\Omega} \circ f$, c'est-à-dire avec la restriction de $\varphi(f)$. Comme les $U_{j\Omega}$, $j \in J$, forment un recouvrement ouvert de U_Ω, on en conclut que $\varphi_\Omega \circ i = \varphi$. □

2.4. On voudrait qu'un énoncé tel que la Proposition 1 soit vrai quand $k = \mathbb{F}_1$ et $\Omega = \mathbb{Z}$. Mais cela suppose qu'on sache d'abord répondre à la question suivante:

Question 2. *Quels sont les anneaux obtenus par extension des scalaires de* $\mathbb{F}_1$ *à* $\mathbb{Z}$*?*

Or, d'après Kapranov et Smirnov, pour tout entier $n \geq 1$, le corps $\mathbb{F}_1$ possède une extension $\mathbb{F}_{1^n}$ de degré n, obtenue par l'adjonction des racines n-ièmes de l'unité. La $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ est alors de rang n sur $\mathbb{Z}$. Cela conduit à poser

$$\mathbb{F}_{1^n} \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1). \tag{4}$$

Cet anneau R_n est donc une des réponses à la Question 2, et d'après la Proposition 1, si X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, il existe une inclusion naturelle

$$X(\mathbb{F}_{1^n}) \subset (X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z})(R_n).$$

Plus généralement, *nous noterons* $\mathcal{R}$ *la sous-catégorie pleine des anneaux engendrée par les anneaux* R_n*,* $n \geq 1$*, et leurs produits tensoriels* , et nous admettrons que l'extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ induit une équivalence de catégorie entre une catégorie de $\mathbb{F}_1$-algèbres et la catégorie $\mathcal{R}$. Une variété X sur $\mathbb{F}_1$ doit donc définir un foncteur covariant $\underline{X}$ de la catégorie $\mathcal{R}$ dans celle des ensembles, contenu dans le foncteur qui à R associe l'ensemble $(X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(R)$.

Pour définir les variétés sur $\mathbb{F}_1$ nous procéderons en deux temps. La catégorie $\mathcal{A}$ des variétés affines sur $\mathbb{F}_1$ sera définie par une propriété universelle inspirée de la Proposition 1 pour des foncteurs de $\mathcal{R}$ vers $\mathcal{E}ns$. Celle des variétés sur $\mathbb{F}_1$ sera alors obtenue en considérant une propriété universelle pour des foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{E}ns$.

3. Définitions

3.1. Définition 1. Un *truc sur* $\mathbb{F}_1$ est le couple $X = (\underline{X}, \mathcal{a}_X)$ d'un foncteur covariant

$$\underline{X} \colon \mathcal{R} \to \mathcal{E}ns$$

et d'une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{a}_X$. Pour tout morphisme d'anneaux unitaires $\sigma \colon R \to \mathbb{C}$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, et pour tout élément $x \in \underline{X}(R)$ on suppose de plus donné un morphisme d'algèbres (dit "d'évaluation")

$$e_{x,\sigma} \colon \mathcal{a}_X \to \mathbb{C}.$$

Si $f \colon R' \to R$ est un morphisme de $\mathcal{R}$ et si $y \in \underline{X}(R')$, l'égalité suivante doit être satisfaite:

$$e_{f(y),\sigma} = e_{y,\sigma \circ f} \tag{5}$$

pour tout morphisme $\sigma \colon R \to \mathbb{C}$.

Remarques. (i) Comme l'a remarqué D.Grayson, les objets de $\mathcal{R}$ sont les algèbres sur $\mathbb{Z}$ des groupes abéliens finis. On pourrait imposer aux morphismes de $\mathcal{R}$ d'être ceux induits par les morphismes entre groupes abéliens finis.

(ii) L'idée d'ajouter à $\underline{X}$ une "donnée topologique à l'infini" est due à J.-B. Bost. Il n'y a pas lieu de supposer que $\mathcal{a}_X$ est commutative. Un objectif est de faire le lien avec la théorie d'A. Connes (voir par exemple [7]), un truc X sur $\mathbb{F}_1$ disposant d'une extension au point à l'infini de Spec($\mathbb{Z}$), essentiellement donnée par l'algèbre

$\mathcal{a}_X$. Par ignorance, nous resterons très évasifs sur les propriétés requises sur cette $\mathbb{C}$-algèbre.

3.2. Définition 2. (i) Un truc $X = (\underline{X}, \mathcal{a}_X)$ sur $\mathbb{F}_1$ est *fini* quand tous les ensembles $\underline{X}(R)$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, sont finis.

(ii) Un *morphisme* $\varphi\colon X \to Y$ entre deux trucs sur $\mathbb{F}_1$ est la donnée d'une transformation naturelle

$$\underline{\varphi}\colon \underline{X} \to \underline{Y}$$

et d'un morphisme d'algèbres

$$\varphi^*\colon \mathcal{a}_Y \to \mathcal{a}_X$$

tels que, si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, si $\sigma\colon R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, et si $x \in \underline{X}(R)$, on a

$$e_{\sigma,\underline{\varphi}(x)}(\alpha) = e_{\sigma,x}(\varphi^*(\alpha)) \tag{6}$$

pour toute fonction $\alpha \in \mathcal{a}_Y$.

(iii) Un morphisme

$$\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*)\colon X \to Y$$

est une *injection* si φ^* est injectif et si l'application

$$\underline{\varphi}\colon \underline{X}(R) \to \underline{Y}(R)$$

est injective quel que soit l'anneau $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$.

Si $\varphi = (\underline{\varphi}, \varphi^*)\colon X \to Y$ et $\psi = (\underline{\psi}, \psi^*)\colon Y \to Z$ sont deux morphismes, leur composé est le couple

$$\psi \circ \varphi = (\underline{\psi} \circ \underline{\varphi}, \varphi^* \circ \psi^*)\colon X \to Z.$$

On note $\mathcal{T}$ la catégorie des trucs sur $\mathbb{F}_1$.

3.3. Soit $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie des variétés sur $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire les schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si V et W sont deux objets de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$, on désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$ l'ensemble des morphismes de V vers W.

Si V est un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$, on lui associe un truc $V = (\underline{V}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}))$ sur $\mathbb{F}_1$ de la façon suivante. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ on pose

$$\underline{V}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R), V)$$

et si $f\colon R' \to R$ est une flèche de $\mathcal{R}$, l'application

$$\underline{V}(f)\colon \underline{V}(R') \to \underline{V}(R)$$

est la composition avec f. La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ est celle des fonctions globales (i. e., les sections du faisceau canonique) sur la variété $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Si $\sigma\colon R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires et si $x \in \underline{V}(R)$, l'image de x par σ est un point complexe $\sigma(x)$ de $V_{\mathbb{C}}$. On note

$$e_{x,\sigma}\colon \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{C}$$

l'évaluation au point $\sigma(x)$ des fonctions sur $V_{\mathbb{C}}$. La formule (5) est évidemment vérifiée. Tout morphisme algébrique $f\colon V \to W$ induit un morphisme dans $\mathcal{T}$, également noté f.

3.4. Définition 3. Une *variété affine sur* $\mathbb{F}_1$ est un truc fini X sur $\mathbb{F}_1$ tel qu'il existe une variété algébrique affine $X_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ et une injection $i\colon X \to X_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{T}$ vérifiant la propriété suivante.

Quels que soient la variété affine $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et le morphisme de $\mathcal{T}$

$$\varphi\colon X \to V,$$

il existe un unique morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}}\colon X_{\mathbb{Z}} \to V$$

tel que $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$.

On voit que la variété $X_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ est uniquement déterminée par X. On la note aussi $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$. Par ailleurs, si X et Y sont deux variétés affines sur $\mathbb{F}_1$ et si $f\colon X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{T}$, il existe un unique morphisme $f_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, Y_{\mathbb{Z}})$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbb{Z}} \arrow[r, "f_{\mathbb{Z}}"] & Y_{\mathbb{Z}} \\ X \arrow[u] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On notera $\mathcal{A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ dont les objets sont les variétés affines.

3.5. Définition 4. (i) Un *objet sur* $\mathbb{F}_1$ est la donnée $X = (\underline{\underline{X}}, \mathcal{a}_X)$ d'un foncteur contravariant

$$\underline{\underline{X}}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{E}ns$$

et d'une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{a}_X$ ainsi que d'un morphisme d'algèbres

$$e_x\colon \mathcal{a}_X \to \mathcal{a}_A$$

pour objet A de $\mathcal{A}$ et tout élément x de $\underline{\underline{X}}(A)$. Si $f\colon A \to B$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ et $x \in \underline{\underline{X}}(B)$, on suppose de plus que l'égalité

$$e_{f^*(x)} = f^* \circ e_x \tag{7}$$

est vérifiée, avec $f^*(x) = \underline{\underline{X}}(f)(x) \in \underline{\underline{X}}(A)$.

(ii) Un objet X sur $\mathbb{F}_1$ est *fini* si $\underline{\underline{X}}(\mathrm{Spec}\, R)$ est fini quel que soit $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ (d'après la Proposition 2(ii) ci-dessous, la catégorie $\mathcal{R}^{\mathrm{opp}}$ est contenue dans $\mathcal{A}$).

(iii) Un *morphisme* $\varphi\colon X \to Y$ entre objets sur $\mathbb{F}_1$ est la donnée d'une transformation naturelle

$$\underline{\underline{\varphi}}\colon \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{Y}}$$

et d'un morphisme d'algèbres $\varphi^*\colon \mathcal{a}_Y \to \mathcal{a}_X$ tels que, si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et $x \in \underline{\underline{X}}(A)$, on ait

$$e_{\underline{\underline{\varphi}}(x)} = e_x \circ \varphi^*. \tag{8}$$

(iv) On dit que le morphisme φ est une *injection* si $\underline{\underline{\varphi}}$ et φ^* sont injectifs.

Le composé de deux morphismes est défini de la façon évidente, et l'on note $\mathcal{OB}$ la catégorie des objets sur $\mathbb{F}_1$.

3.6. Si $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_\mathbb{Z})$, on lui associe comme suit un objet $V = (\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_\mathbb{C}))$ sur $\mathbb{F}_1$.
Si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ on pose

$$\underline{\underline{V}}(A) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A_\mathbb{Z}, V)$$

et si $f\colon A \to B$ est une flèche de $\mathcal{A}$ on désigne par $\underline{\underline{V}}(f)$ la composition avec $f_\mathbb{Z}$. Si $x \in \underline{\underline{V}}(A)$, l'évaluation e_x est le morphisme composé

$$\mathcal{O}(V_\mathbb{C}) \xrightarrow{x^*} \mathcal{O}(A_\mathbb{C}) \xrightarrow{i^*} \mathfrak{a}_A,$$

où $i\colon A \to A_\mathbb{Z}$ est l'injection associée à A.

En associant à $f \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(V, W)$ le morphisme de composition avec f et celui d'image inverse $f^*\colon \mathcal{O}(W_\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(V_\mathbb{C})$, on obtient ainsi un foncteur

$$\mathcal{V}_\mathbb{Z} \to \mathcal{OB}.$$

3.7. Définition 5. Une *variété sur* $\mathbb{F}_1$ est la donnée d'un objet X sur $\mathbb{F}_1$ tel qu'il existe une variété algébrique $X_\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$ et une injection $i\colon X \to X_\mathbb{Z}$ de $\mathcal{OB}$ ayant la propriété suivante. Pour toute variété $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_\mathbb{Z})$ et tout morphisme

$$\varphi\colon X \to V$$

dans $\mathcal{OB}$, il existe un unique morphisme algébrique

$$\varphi_\mathbb{Z}\colon X_\mathbb{Z} \to V$$

tel que $\varphi = \varphi_\mathbb{Z} \circ i$.

La variété $X_\mathbb{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_\mathbb{Z})$ est uniquement déterminée (à isomorphisme unique près) par la variété X sur $\mathbb{F}_1$. On la note aussi $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ et on l'appelle *extension des scalaires de* X de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$. Si X et Y sont deux variétés sur $\mathbb{F}_1$ et $f\colon X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{OB}$, il existe un unique morphisme algébrique $f_\mathbb{Z} \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(X_\mathbb{Z}, Y_\mathbb{Z})$ qui induit f sur X (cf. paragraphe 3.4). Autrement dit, si $\mathcal{V}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{OB}$ dont les objets sont les variétés sur $\mathbb{F}_1$, l'extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ est un foncteur fidèle de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{V}_\mathbb{Z}$.

3.8. Variantes.

3.8.1. Pour éviter le choix trop trivial $\mathfrak{a}_X = \mathcal{O}(X_\mathbb{C})$ (où $X_\mathbb{C} = X_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$) dans la définition d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$ (cf. Proposition 4 ci-dessous) on pourrait par exemple imposer (dans les définitions 3 et 5) que l'algèbre $\mathfrak{a}_X$ est une algèbre de Banach commutative. Ce sera le cas pour les exemples discutés dans la section 5 ([19, 18.11]).

3.8.2. Comme l'a suggéré R. Pink, pour tout entier $n \geq 1$, on peut aussi définir les variétés sur $\mathbb{F}_{1^n}$ en remplaçant dans les définitions précédentes la catégorie $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{V}_\mathbb{Z}$) par la sous-catégorie pleine des anneaux R_m tels que n divise m et de leurs produits tensoriels (resp. par la catégorie des schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(R_n)$).

4. Quelques Propriétés

4.1. La catégorie opposée à $\mathcal{R}$ est contenue dans $\mathcal{A}$:

Proposition 2. (i) *Si* $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ *et* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$, *l'ensemble* $\underline{X}(R)$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), X)$.

(ii) *Si* $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, *le truc sur* $\mathbb{F}_1$ *associé à* $\mathrm{Spec}(R)$ *est une variété affine sur* $\mathbb{F}_1$ *dont l'extension à* $\mathbb{Z}$ *coïncide avec* $\mathrm{Spec}(R)$. *On obtient ainsi un foncteur contravariant pleinement fidèle de* $\mathcal{R}$ *dans* $\mathcal{A}$.

Preuve. (i) Soient $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ un anneau fini et plat sur $\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Spec}(R)$ le schéma associé. Si $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ et si

$$\varphi\colon \mathrm{Spec}(R) \to X$$

est un morphisme de $\mathcal{T}$, l'image par $\underline{\varphi}$ de l'application identique

$$\mathrm{id}_R \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Spec}(R))$$

est un élément $\underline{\varphi}(\mathrm{id}_R) \in \underline{X}(R)$.

Inversement, étant donné $x \in \underline{X}(R)$, pour tout morphisme de $\mathcal{R}$

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(R, R') = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R'), \mathrm{Spec}(R)),$$

l'image de x par l'application

$$\underline{X}(f)\colon \underline{X}(R) \to \underline{X}(R')$$

définit un élément $f(x) \in \underline{X}(R')$ et l'on obtient ainsi une transformation naturelle

$$\underline{x}\colon \underline{\mathrm{Spec}}(R) \to \underline{X}.$$

Par ailleurs, si Σ est l'ensemble (fini) des morphismes unitaires $\sigma\colon R \to \mathbb{C}$, on dispose d'isomorphismes canoniques

$$\mathcal{O}(\mathrm{Spec}(R)_{\mathbb{C}}) = R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} = \mathbb{C}^{\Sigma}.$$

La collection des morphismes d'évaluation en x

$$e_{x,\sigma}\colon \mathcal{A}_X \to \mathbb{C}, \quad \sigma \in \Sigma,$$

définit donc un morphisme d'algèbres

$$x^*\colon \mathcal{A}_X \to R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C}$$

qui vérifie la condition (6) avec $\underline{x}$. On obtient ainsi un morphisme $(\underline{x}, x^*)$ de $\mathrm{Spec}(R)$ vers X dans $\mathcal{T}$.

On vérifie que les applications $\varphi \mapsto \underline{\varphi}(\mathrm{id}_R)$ et $x \mapsto (\underline{x}, x^*)$ sont des bijections inverses entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), X)$ et $\underline{X}(R)$.

(ii) Si R et R' sont des anneaux de $\mathcal{R}$, l'ensemble $\underline{\mathrm{Spec}\,(R)}(R')$ des morphismes d'anneaux de R vers R' est fini. En effet, comme R est engendré sur $\mathbb{Z}$ par un nombre fini de racines de l'unité, il suffit de remarquer que l'ensemble des racines de l'unité de R' est fini. Mais cela résulte de la remarque 3.1(i) et du théorème de Higman [10] selon lequel les racines de l'unité dans l'algèbre (sur $\mathbb{Z}$) d'un groupe abélien fini G sont les éléments de la forme $\pm g$, $g \in G$.

Par ailleurs, si V est un objet de $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$ et R un objet de $\mathcal{R}$ on sait, d'après (i), que

$$\underline{V}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), V).$$

Comme $\underline{V}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}(R), V)$ par définition de V, on voit que tout morphisme de $\mathrm{Spec}(R)$ vers V dans $\mathcal{T}$ est algébrique. Cela montre que $\mathrm{Spec}(R)$ est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension à $\mathbb{Z}$ est $\mathrm{Spec}(R)$.

En choisissant $V = \mathrm{Spec}(R')$, $R' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, dans l'argument précédent on voit aussi que tout morphisme

$$\mathrm{Spec}(R) \to \mathrm{Spec}(R')$$

dans $\mathcal{T}$ provient d'un unique morphisme $R' \to R$ dans $\mathcal{R}$. Par conséquent le foncteur $R \mapsto \mathrm{Spec}(R)$ de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{A}$ est pleinement fidèle. □

Exemple. On note $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$ la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ associée à R_n. Pour tout truc X sur $\mathbb{F}_1$ on a alors la formule

$$X(\mathbb{F}_{1^n}) = \underline{X}(R_n), \tag{9}$$

où le terme de gauche désigne les morphismes dans $\mathcal{T}$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$ vers X.

4.2. On définit un foncteur

$$\varepsilon \colon \mathcal{T} \to \mathcal{OB}$$

en associant à un truc $X = (\underline{X}, \mathfrak{a}_X)$ le couple $(\underline{\underline{X}}, \mathfrak{a}_X)$ où $\underline{\underline{X}}$ est le foncteur sur $\mathcal{A}$ représenté par X:

$$\underline{\underline{X}}(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A, X).$$

Si $u \in \underline{\underline{X}}(A)$ l'évaluation en u est l'image inverse u^*:

$$e_u = u^* \colon \mathfrak{a}_X \to \mathfrak{a}_A.$$

Ce foncteur ε va nous permettre de considérer les variétés affines sur $\mathbb{F}_1$ comme des variétés sur $\mathbb{F}_1$:

Proposition 3. (i) *Le foncteur $\varepsilon \colon \mathcal{T} \to \mathcal{OB}$ est pleinement fidèle.*

(ii) *L'image essentielle de $\mathcal{A}$ par ε est la catégorie des variétés sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ est affine.*

Preuve. (i) Considérons le foncteur

$$\rho \colon \mathcal{OB} \to \mathcal{T}$$

qui à l'objet $(\underline{\underline{X}}, \mathfrak{a}_X)$ sur $\mathbb{F}_1$ associe le truc $(\underline{X}, \mathfrak{a}_X)$, où $\underline{X}$ est la restriction à $\mathcal{R}$ du foncteur $\underline{\underline{X}}$ (cf. Proposition 2(ii)).

Si X est dans $\mathcal{T}$, le truc $\rho \circ \varepsilon(X)$ vérifie

$$\underline{\rho \circ \varepsilon(X)}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R), X) = \underline{X}(R)$$

(Proposition 2(i)). Par conséquent

$$\rho \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathcal{T}}. \tag{10}$$

De plus ρ est l'adjoint à gauche de ε: si Y est un truc sur $\mathbb{F}_1$ et X un objet sur $\mathbb{F}_1$ il existe un isomorphisme canonique et naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{OB}}(X, \varepsilon(Y)). \tag{11}$$

En effet, si

$$\psi \colon X \to \varepsilon(Y)$$

est un morphisme de $\mathcal{OB}$, le morphisme

$$\rho(\psi)\colon \rho(X) \to \rho \circ \varepsilon(Y) = Y$$

est un morphisme de $\mathcal{T}$.

Inversement, étant donné un morphisme

$$\varphi\colon \rho(X) \to Y$$

de $\mathcal{T}$, pour tout objet A de $\mathcal{A}$ et tout $x \in \underline{\underline{X}}(A)$, si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et

$$f \in \underline{A}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathrm{Spec}(R),\, A)$$

(Prop. 2(i)), puisque $\underline{\underline{X}}$ est un foncteur contravariant, on obtient un élément $\underline{\underline{X}}(f)(x) \in \underline{\underline{X}}(R) = \underline{\rho(X)}(R)$, et donc un élément

$$\underline{\varphi}(\underline{\underline{X}}(f)(x)) \in \underline{Y}(R).$$

L'application $f \mapsto \underline{\varphi}(\underline{\underline{X}}(f)(x))$ définit une transformation naturelle de $\underline{A}$ vers $\underline{Y}$ qui, jointe au morphisme d'algèbres

$$x^* \circ \varphi^*\colon \mathfrak{a}_Y \to \mathfrak{a}_A,$$

définit un élément de

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A,\, Y) = \underline{\underline{\varepsilon(Y)}}(A)$$

qui dépend fonctoriellement de $x \in \underline{\underline{X}}(A)$. D'où une transformation naturelle

$$\underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{\varepsilon(Y)}}$$

qui, jointe au morphisme d'algèbres

$$\varphi^*\colon \mathfrak{a}_Y \to \mathfrak{a}_X,$$

fournit un morphisme $\alpha(\varphi)$ de X vers $\varepsilon(Y)$. On vérifie que les applications $\varphi \mapsto \alpha(\varphi)$ et $\psi \mapsto \rho(\psi)$ sont des bijections inverses naturelles entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X),\, Y)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{OB}}(X,\, \varepsilon(Y))$. Cela démontre (11).

Il résulte de (10) et (11) que $\varepsilon\colon \mathcal{T} \to \mathcal{OB}$ est pleinement fidèle.

(ii) Considérons une variété affine X sur $\mathbb{F}_1$, $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et

$$\varphi\colon \varepsilon(X) \to V$$

un morphisme de $\mathcal{OB}$. L'image par $\underline{\underline{\varphi}}$ du morphisme identique

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,\, X) = \underline{\underline{\varepsilon(X)}}(X)$$

est un morphisme algébrique $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}},\, V)$. Si A est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ et

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(A,\, X) = \underline{\underline{X}}(A),$$

on sait que f est par un morphisme algébrique $f_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}},\, X_{\mathbb{Z}})$ (Définition 3) et donc

$$\underline{\underline{\varphi}}(f) = \underline{\underline{\varphi}}(f^*(\mathrm{id}_X)) = f_{\mathbb{Z}}^*(\underline{\underline{\varphi}}(\mathrm{id}_X)) = f_{\mathbb{Z}}^*(\varphi_{\mathbb{Z}}) = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ f_{\mathbb{Z}}$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_{\mathbb{Z}},\, V)$. Il en résulte que φ est le morphisme induit par $\varphi_{\mathbb{Z}}$ sur $\varepsilon(X)$, et donc $\varepsilon(X)$ est une variété sur $\mathbb{F}_1$ dont $X_{\mathbb{Z}}$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$.

Inversement, supposons que X soit une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que $X_{\mathbb{Z}}$ soit affine. Soient $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ une variété algébrique affine et

$$\varphi\colon \rho(X) \to V$$

un morphisme de $\mathcal{T}$. Puisque V est affine on a

$$\varepsilon(\underline{V}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})) = (\underline{\underline{V}}, \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})).$$

Donc φ induit un morphisme

$$\varepsilon(\varphi)\colon \varepsilon \circ \rho(X) \to V$$

dans $\mathcal{OB}$. L'isomorphisme d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\rho(X), \rho(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{OB}}(X, \varepsilon \circ \rho(X))$$

associe à l'identité de $\rho(X)$ un morphisme canonique

$$X \to \varepsilon \circ \rho(X).$$

Puisque X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, le composé du morphisme précédent avec $\varepsilon(\varphi)$ dans $\mathcal{OB}$ est induit par un morphisme algébrique

$$\varphi_{\mathbb{Z}}\colon X_{\mathbb{Z}} \to V.$$

En appliquant le foncteur ρ, on voit que $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ i$ coïncide avec le morphisme

$$\varphi\colon \rho(X) \to V$$

dans $\mathcal{T}$. Par conséquent $\rho(X)$ est une variété affine dont $X_{\mathbb{Z}}$ est l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$. Cela démontre (ii). □

4.3. En général une variété sur $\mathbb{Z}$ peut être l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ de plusieurs variétés sur $\mathbb{F}_1$.

Proposition 4. *Soit X une variété sur $\mathbb{F}_1$. Supposons que l'injection $i\colon X \to X_{\mathbb{Z}}$ soit la composée dans $\mathcal{OB}$ d'une injection $u\colon X \to Y$ et d'une injection $j\colon Y \to X_{\mathbb{Z}}$.*

Supposons de plus que X est affine ou que $\underline{\underline{u}}$ est une équivalence. Alors Y est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que

$$Y \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = X_{\mathbb{Z}}.$$

Preuve. Soient $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et

$$\varphi\colon Y \to V$$

un morphisme de $\mathcal{OB}$. Puisque X est une variété sur $\mathbb{F}_1$, la restriction de φ à X est induite par un morphisme algébrique $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_{\mathbb{Z}}, V)$: $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ i = \varphi \circ u$. Il s'agit de vérifier que $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ j = \varphi$.

Or le composé des morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}^*} \mathcal{O}(X_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{A}_X$$

coïncide avec

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{A}_Y \xrightarrow{u^*} \mathcal{A}_X.$$

Comme $i^* = u^* \circ j^*$ et comme u^* est injectif, on en déduit que

$$\varphi^* = j^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*. \tag{12}$$

Si le foncteur $\underline{\underline{u}}\colon \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{Y}}$ est une équivalence on a $\underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{j}} = \underline{\underline{\varphi}}$ donc (12) suffit à montrer que $\varphi_{\mathbb{Z}} \circ j = \varphi$.

Dans le cas où X est affine, on peut supposer que V est affine (Proposition 3(ii)). Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, si $x \in \underline{\underline{Y}}(R)$, si $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ et si $\sigma\colon R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, on a, d'après (8) et (12)

$$e_{\sigma,\underline{\underline{\varphi}}(x)}(\alpha) = e_{\sigma,x}(\varphi^*(\alpha)) = e_{\sigma,x}(j^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*(\alpha)) = e_{\sigma,\underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{j}}(x)}(\alpha). \tag{13}$$

Comme R est plat sur $\mathbb{Z}$, le morphisme canonique

$$R \to R \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{C} = R^{\Sigma}$$

est injectif. Et comme V est affine les fonctions de $\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ séparent les points de $V(\mathbb{C})$. Par conséquent les égalités (13) avec $\sigma \in \Sigma$ et $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$ montrent que

$$\underline{\underline{\varphi}}(x) = \underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{j}}(x).$$

Par conséquent $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ j$. □

4.4. L'énoncé suivant permet de définir des variétés sur $\mathbb{F}_1$ par recollement.

Proposition 5. *Soient $V \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et $V = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert fini de V. On suppose données des variétés X_i, $i \in I$, et $X_{ij} = X_{ji}$, $i \neq j$, sur $\mathbb{F}_1$ et des injections*

$$X_{ij} \to X_i \quad \text{et} \quad X_i \to V$$

dans $\mathcal{OB}$ dont les extensions à $\mathbb{Z}$ sont les inclusions

$$U_i \cap U_j \to U_i \quad \text{et} \quad U_i \to V.$$

On suppose de plus que l'injection composée

$$X_{ij} \to X_i \to V$$

coïncide avec

$$X_{ij} \to X_j \to V$$

si $i \neq j$. Pour tout objet A de $\mathcal{A}$ on pose

$$\underline{\underline{X}}(A) = \bigcup_i \underline{\underline{X_i}}(A)$$

(réunion dans $\underline{\underline{V}}(A)$) et l'on note $\mathfrak{a}_X$ la sous-algèbre du produit des $\mathfrak{a}_{X_i}$, $i \in I$, formée des familles $(\alpha_i)_{i \in I}$ telles que, si $i \neq j$, les images de α_i et α_j dans $\mathfrak{a}_{X_{ij}}$ coïncident.

Alors l'objet $X = (\underline{\underline{X}}, \mathfrak{a}_X)$ sur $\mathbb{F}_1$ (avec les morphismes d'évaluation évidents) est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que

$$X \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = V.$$

Preuve. Les composés des morphismes d'algèbres

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{a}_{X_i} \to \mathfrak{a}_{X_{ij}}$$

et

$$\mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{a}_{X_j} \to \mathfrak{a}_{X_{ij}}$$

coïncident. Il existe donc une injection

$$u\colon X \to V$$

dans $\mathcal{OB}$. Par ailleurs, si $W \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ et si

$$\varphi\colon X \to W$$

est un morphisme de $\mathcal{OB}$, la restriction φ_i (resp. φ_{ij}) de φ à X_i (resp. X_{ij}) est induite par un unique morphisme algébrique $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ (resp. $\varphi_{ij\mathbb{Z}}$) de U_i (resp. $U_i \cap U_j$) vers W. Comme la restriction de $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ à X_{ij} coïncide avec celle de φ, la restriction de $\varphi_{i\mathbb{Z}}$ à $U_i \cap U_j$ est égale à $\varphi_{ij\mathbb{Z}}$ (unicité). C'est donc aussi la restriction de $\varphi_{j\mathbb{Z}}$ à $U_i \cap U_j$. Par conséquent, la collection des morphismes $\varphi_{i\mathbb{Z}}$, $i \in I$, définit par recollement un morphisme $\varphi_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, W)$ dont la restriction à U_i est égale à $\varphi_{i\mathbb{Z}}$, quel que soit $i \in I$. Par suite, si $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, l'application

$$\underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{u}}\colon \underline{\underline{X}}(A) \to \underline{\underline{W}}(A)$$

coïncide avec $\underline{\underline{\varphi}}_i$ sur le sous-ensemble $\underline{\underline{X}}_i(A)$. Comme $\underline{\underline{X}}(A)$ est, par définition, la réunion des $\underline{\underline{X}}_i(A)$, $i \in I$, on voit que

$$\underline{\underline{\varphi}} = \underline{\underline{\varphi}}_{\mathbb{Z}} \circ \underline{\underline{u}}.$$

Par ailleurs, le morphisme d'algèbres composé

$$\mathcal{O}(W_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}^*} \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{u^*} \mathfrak{a}_X \longrightarrow \mathfrak{a}_{X_i}$$

coïncide avec φ_i^* et $\mathfrak{a}_X$ est contenue dans le produit des algèbres $\mathfrak{a}_{X_i}$, donc

$$\varphi^* = u^* \circ \varphi_{\mathbb{Z}}^*.$$

Par conséquent $\varphi = \varphi_{\mathbb{Z}} \circ u$. □

5. Exemples

5.1. Soient $N \simeq \mathbb{Z}^d$ un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $d \geq 1$, et Δ un éventail de $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Notons $\mathbb{P}(\Delta)$ la variété torique associée à Δ [9], [14]. Supposons que Δ est régulier et que, par conséquent, $\mathbb{P}(\Delta)$ est une variété lisse sur $\mathbb{Z}$. On se propose de montrer que $\mathbb{P}(\Delta)$ est l'extension à $\mathbb{Z}$ d'une variété $X(\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$.

Par définition, Δ est une famille finie $\{\tau\}$ de cônes stricts de $N_{\mathbb{R}}$. A chaque cône τ est associée une variété torique affine

$$U_\tau = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\mathcal{S}_\tau]),$$

où $\mathcal{S}_\tau$ est le monoïde intersection de $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ avec le dual $\tau^* \subset M_{\mathbb{R}}$ du cône τ. La variété $\mathbb{P}(\Delta)$ est obtenue par recollement des variétés U_τ le long de leurs ouverts $U_{\tau\cap\tau'}$.

Si $m \in \mathcal{S}_\tau$ on note

$$\chi^m\colon U_\tau \to \mathbb{A}^1$$

le morphisme associé à m. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, on note $\mu(R)$ l'ensemble des racines de l'unité de R (il est fini d'après la preuve de la Proposition 2(ii)) et

$$\underline{X}_\tau(R) \subset U_\tau(R)$$

l'ensemble (fini) des éléments $x \in U_\tau(R)$ tels que

$$\chi^m(x) \in \mu(R) \cup \{0\}$$

quel que soit $m \in \mathcal{S}_\tau$.

Par ailleurs, suivant Batyrev et Tschinkel [2], on désigne par C_τ l'ensemble des points $x \in U_\tau(\mathbb{C})$ tels que

$$|\chi^m(x)| \leq 1$$

quel que soit $m \in \mathcal{S}_\tau$, et

$$C_\Delta = \bigcup_\tau C_\tau$$

dans $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$. On désigne par C_τ^{int} l'ensemble des points $x \in C_\tau$ tels que

$$|\chi^m(x)| < 1$$

quand m est dans $\mathcal{S}_\tau$ et n'est pas orthogonal à τ. Notons $\mathcal{a}_\tau$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur C_τ dont la restriction à C_τ^{int} est holomorphe. On note aussi $\mathcal{a}_\Delta$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur C_Δ dont la restriction à chaque C_τ^{int}, $\tau \in \Delta$, est holomorphe.

Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et si $\sigma \in R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, l'application

$$U_\tau(R) \to U_\tau(\mathbb{C})$$

induite par σ envoie $\underline{X}_\tau(R)$ dans C_τ. On peut donc évaluer les fonctions de $\mathcal{a}_\tau$ en chaque point $x \in \underline{X}_\tau(R)$. On obtient ainsi un truc $X_\tau = (\underline{X}_\tau, \mathcal{a}_\tau)$ sur $\mathbb{F}_1$. Si A est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ on pose

$$\underline{\underline{X(\Delta)}}(A) = \bigcup_\tau \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A_\mathbb{Z}, U_\tau)$$

dans $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A_\mathbb{Z}, \mathbb{P}(\Delta))$. Par image inverse et l'énoncé (i) ci-dessous, un point $x \in \underline{\underline{X(\Delta)}}(A)$ définit une évaluation $e_x \colon \mathcal{a}_\Delta \to \mathcal{a}_A$.

Théorème 1. (i) *Pour tout cône ouvert τ de Δ, le truc X_τ est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ et*

$$U_\tau = X_\tau \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z}.$$

(ii) *L'objet $X(\Delta) = (\underline{\underline{X(\Delta)}}, \mathcal{a}_\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$ est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que*

$$X(\Delta) \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{P}(\Delta).$$

Preuve. Montrons d'abord que (i) implique (ii). Il résulte de (i) que, si A est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ et $\tau \in \Delta$,

$$\mathrm{Hom}_\mathcal{T}(A, X_\tau) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A_\mathbb{Z}, U_\tau). \tag{14}$$

Par conséquent, la Proposition 5 permet de recoller les variétés X_τ le long des sous-variétés $X_{\tau \cap \tau'}$ pour obtenir une variété sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ est la variété $\mathbb{P}(\Delta)$. Si τ et τ' sont deux cônes de Δ, les morphismes d'algèbres

$$\mathcal{a}_\Delta \to \mathcal{a}_\tau \to \mathcal{a}_{\tau \cap \tau'}$$

et

$$\mathcal{a}_\Delta \to \mathcal{a}_{\tau'} \to \mathcal{a}_{\tau\cap\tau'}$$

coïncident, donc, d'après la Proposition 4, et la définition de $\underline{\underline{X(\Delta)}}$, l'objet $X(\Delta) = (\underline{\underline{X(\Delta)}}, \mathcal{a}_\Delta)$, muni des évaluations déduites de (14), est une variété sur $\mathbb{F}_1$ telle que $X(\Delta) \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{P}(\Delta)$.

Il reste à démontrer (i). Soit donc V une variété affine sur $\mathbb{Z}$ et

$$\varphi\colon X_\tau \to V$$

un morphisme de $\mathcal{T}$. Supposons d'abord que V soit la droite affine $\mathbb{A}^1_\mathbb{Z} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$. On a $\mathcal{O}(\mathbb{A}^1_\mathbb{C}) = \mathbb{C}[T]$ et l'on peut décrire comme suit la fonction

$$\alpha = \varphi^*(T) \in \mathcal{a}_\tau.$$

Puisque Δ est régulier, il existe une base $\{m_1, \dots, m_d\}$ de M telle que $\{m_1, \dots$ $\dots, m_r\}$ soit une famille génératrice du semi-groupe $\mathcal{S}_\tau$, où r est la dimension de τ. Soit τ' le cône ouvert $\mathbb{R}_+m_1 + \dots + \mathbb{R}_+m_d$. La carte affine

$$\chi\colon U_{\tau'}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^d$$

donnée par

$$\chi(x) = (\chi^{m_1}(x), \dots, \chi^{m_d}(x))$$

identifie C_τ (resp. C_τ^{int}) avec l'ensemble des points (x_i) de $\mathbb{C}^d$ tels que

$$|x_1| \leq 1, \ \dots, \ |x_{d-r}| \leq 1, \ |x_{d-r+1}| = \dots = |x_d| = 1$$

(resp.

$$|x_1| < 1, \ \dots, \ |x_{d-r}| < 1, \ |x_{d-r+1}| = \dots = |x_d| = 1).$$

Autrement dit C_τ (resp. C_τ^{int}) est le produit de $d-r$ disques fermés (resp. ouverts) et de r cercles (cf. [14, Proposition 3.2.9]).

La restriction de $\alpha(x_1, \dots, x_d)$ au produit des d cercles $|x_j| = 1$, $j = 1, \dots, d$, admet un développement de Fourier, convergent pour la norme L^2,

$$\alpha(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}) = \sum_{I\subset\mathbb{Z}^d} a_I e^{iI\cdot\theta},$$

où $a_I \in \mathbb{C}$ et $I\cdot\theta = \sum_{j=1}^d i_j\theta_j$ si $I = (i_1, \dots, i_d)$. Comme α est holomorphe dans C_τ^{int}, les coefficients a_I sont nuls si l'un des indices $i_1, \dots, i_{d-r}$ est strictement négatif.

Par ailleurs, pour tout entier $n \geq 1$, considérons l'anneau

$$R_{d,n} = \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_d]/(T_j^n = 1, j = 1, \dots, d),$$

et le point $x_n \in X_\tau(R_{d,n})$ de coordonnées

$$\chi^{m_j}(x_n) = T_j \in R_{d,n},$$

quel que soit $j = 1, \dots, d$. Son image $\underline{\varphi}(x_n)$ dans $\mathbb{A}^1_\mathbb{Z}(R_{d,n}) = R_{d,n}$ est la classe d'un polynôme de Laurent

$$P_n(T_1, \dots, T_d) = \sum_{I\in\mathbb{Z}^d} a_I(n) T_1^{i_1} \dots T_d^{i_d},$$

où les coefficients $a_I(n)$ sont entiers et presque tous nuls.

Tout morphisme $\sigma\colon R_{d,n} \to \mathbb{C}$ est obtenu en envoyant chaque T_j, $j \in J$, sur une racine n-ième ζ_j de l'unité. On a donc, d'après la condition (6),

$$P_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \alpha(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$$

dès que $\zeta_1^n = \zeta_2^n = \cdots = \zeta_d^n = 1$. Pour tout multi-indice $I \subset \mathbb{Z}^d$ le coefficient de Fourier a_I se calcule par la formule

$$a_I = (2\pi)^{-d} \int_{(S^1)^d} \alpha(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_d}) e^{-iI\cdot\theta}\, d\theta_1 \ldots d\theta_d.$$

C'est donc la limite quand n tend vers l'infini de

$$a_I(n) = n^{-d} \sum_{\zeta_1^n = \cdots = \zeta_d^n = 1} P_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \prod_{j=1}^{d} \zeta_j^{-i_j}.$$

Puisque $a_I(n)$ est un entier quel que soit $n \geq 1$, a_I doit être un entier, nul pour presque tout I (puisque la série de Fourier définissant α converge dans la topologie L^2). Il en résulte que la fonction $\alpha = \varphi^*(T)$ est un polynôme

$$P(T_1, \ldots, T_d) \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_{d-r}, T_{d-r+1}^{\pm 1}, \ldots, T_d^{\pm 1}],$$

c'est-à-dire un élément de $\mathbb{Z}[\mathcal{S}_\tau]$. Elle définit donc un morphisme

$$\varphi_{\mathbb{Z}}\colon U_\tau \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$$

tel que $\varphi^*\colon \mathcal{O}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{a}_\tau$ soit le composé de $\varphi^*_{\mathbb{Z}}$ et de la restriction à C_τ. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ et si $\sigma\colon R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, il résulte alors de (8) que le morphisme composé

$$\underline{X_\tau}(R) \xrightarrow{\varphi} \underline{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}}(R) = R \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}$$

coïncide avec

$$\underline{X_\tau}(R) \longrightarrow U_\tau(R) \xrightarrow{\varphi_{\mathbb{Z}}} R \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}.$$

Comme le produit des morphismes σ est injectif on voit que φ est la restriction de $\varphi_{\mathbb{Z}}$ à X_τ.

Soit maintenant

$$\varphi\colon X_\tau \to V$$

un morphisme de $\mathcal{T}$ où $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ est une variété affine arbitraire. Soit W la réunion des composantes horizontales de V, c'est à dire le spectre de l'anneau des fonctions de V modulo torsion, et $W \to V$ l'inclusion canonique. Pour tout $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, l'application $W(R) \to V(R)$ est bijective. On peut donc supposer que $V = W$, c'est à dire que la variété V est plate sur $\mathbb{Z}$. Chacune des coordonnées

$$\pi_j\colon V \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}},$$

$j = 1, \ldots, n$, définit un morphisme $\pi_j \circ \varphi$ de X_τ vers $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{T}$, dont on vient de voir qu'il est induit par un morphisme $\psi_{j\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U_\tau, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$. Notons

$$\psi_{\mathbb{Z}}\colon U_\tau \to \mathbb{A}^n$$

le produit des morphismes $\psi_{j\mathbb{Z}}$, $j = 1, \ldots, n$. La restriction de $\psi_{\mathbb{Z}}$ à X_τ coïncide avec le morphisme composé

$$X_\tau \xrightarrow{\varphi} V \longrightarrow \mathbb{A}^n.$$

Par ailleurs l'image de $\psi_{\mathbb{Z}}$ est contenue dans V, car C_τ est Zariski dense dans $U_\tau(\mathbb{C})$ et donc

$$\psi_{\mathbb{Z}}(U_\tau(\mathbb{C})) \subset \overline{\psi_\tau(C_\tau)} \subset V(\mathbb{C}).$$

La deuxième inclusion ci-dessus est due au fait que si $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^d_{\mathbb{C}})$, la restriction de $\alpha \circ \psi_{\mathbb{Z}}$ à C_τ est égale à $\varphi^*(\alpha | V(\mathbb{C}))$; elle est donc nulle si α s'annule sur $V(\mathbb{C})$. Puisque V est plate sur $\mathbb{Z}$ on en conclut que $\psi_{\mathbb{Z}}$ se factorise par un morphisme algébrique $\varphi_{\mathbb{Z}} \colon U_\tau \to V$, dont la restriction à X_τ est égale à φ. Cela démontre le théorème. □

5.2. En prenant pour Δ les éventails habituels on obtient les exemples suivants de variétés $X(\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$.

5.2.1. La *droite affine* $\mathbb{A}^1$ sur $\mathbb{F}_1$ est la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ définie par

$$\underline{\mathbb{A}}^1(R) = \mu(R) \cup \{0\}, \quad \text{si} \;\; R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R}),$$

(rappelons que $\mu(R)$ désigne l'ensemble des racines de l'unité de R), $\mathcal{A}_{\mathbb{A}^1}$ étant l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$ qui sont holomorphes dans l'intérieur de D, avec les évaluations évidentes. On a

$$\mathbb{A}^1 \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}.$$

On notera qu'il n'existe apparemment pas d'addition $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ définie sur $\mathbb{F}_1$.

5.2.2. Le *groupe multiplicatif* $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{F}_1$ est la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ définie par

$$\underline{\mathbb{G}}_m(R) = \mu(R) \quad \text{si} \;\; R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R}),$$

l'algèbre $\mathcal{A}_{\mathbb{G}_m}$ étant celle des fonctions continues sur le cercle unité. Son extension des scalaires

$$\mathbb{G}_m \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \mathbb{Z} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$$

est le schéma en groupe multiplicatif sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

5.2.3. On définit de même les produits $\mathbb{A}^a \times \mathbb{G}_m^b$ sur $\mathbb{F}_1$, a, $b \in \mathbb{N}$.

5.2.4. L'espace projectif $\mathbb{P}^d$ sur $\mathbb{F}_1$ est une variété sur $\mathbb{F}_1$ obtenue par recollement de $d+1$ espaces affines $\mathbb{A}^d$ sur $\mathbb{F}_1$. Son extension à $\mathbb{Z}$ est l'espace projectif $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}$ de dimension d sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, l'ensemble fini $\underline{\mathbb{P}}^d(\mathrm{Spec}(R))$ est formé des points de $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Z}}(R)$ dont on peut choisir un système de coordonnées homogènes dans $(\mu(R) \cup \{0\})^{d+1}$. On a $\mathcal{A}_{\mathbb{P}^d} = \mathbb{C}$ et, plus généralement, $\mathcal{A}_\Delta = \mathbb{C}$ quand l'éventail Δ est complet.

5.3. Soit Λ un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini et $\| \cdot \|$ une norme hermitienne sur $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On pose $\overline{\Lambda} = (\Lambda, \| \cdot \|)$.

Soit $B = \{x \in \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \colon \|x\| \leq 1\}$ la boule unité et Φ une partie de $(B \cap \Lambda) - \{0\}$ telle que si $v \in (B \cap \Lambda) - \{0\}$, un et un seul des vecteurs v et $-v$ est dans Φ. Si $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$ on désigne par $\underline{X}(R)$ l'ensemble fini des éléments de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R$ qui peuvent s'écrire

$$x = \sum_{v \in \Phi} v \otimes \zeta_v, \tag{15}$$

où $\zeta_v \in \mu(R) \cup \{0\}$. L'ensemble fini $\underline{X}(R)$ ne dépend pas de Φ et définit un foncteur

$$\underline{X} \colon \mathcal{R} \to \mathcal{E}ns.$$

Par ailleurs, notons $\Lambda_0 \subset \Lambda$ le réseau engendré par Λ et par C le sous-ensemble de $\Lambda_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ formé des vecteurs de norme au plus égale à $t = \operatorname{card}(\Phi)$. Soit $\mathcal{a}$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur C qui sont holomorphes dans l'intérieur de C. Si $x \in \underline{X}(R)$ et si $\sigma \colon R \to \mathbb{C}$ est un morphisme d'anneaux unitaires, il résulte de (15) que

$$\|\sigma(x)\| = \left\| \sum_{v \in \Phi} v \otimes \sigma(\zeta_v) \right\| \leq t.$$

On peut donc évaluer les fonctions de $\mathcal{a}$ en $\sigma(x)$.

Proposition 6. *Le couple $X(\overline{\Lambda}) = (\underline{X}, \mathcal{a})$, muni des évaluations précédentes, est une variété affine sur $\mathbb{F}_1$ dont l'extension des scalaires à $\mathbb{Z}$ est le spectre $X_{\mathbb{Z}}$ de l'algèbre symétrique du dual de Λ_0.*

Preuve. Considérons le morphisme de groupes abéliens

$$\pi \colon \mathbb{Z}^{\Phi} \to \Lambda$$

tel que

$$\pi((n_v)) = \sum_{v \in \Phi} n_v v \in \Lambda.$$

Si $\mathbb{A}^{\Phi}$ est l'espace affine sur $\mathbb{F}_1$ de rang t, π induit un morphisme de trucs sur $\mathbb{F}_1$ de $\mathbb{A}^{\Phi}$ vers $X(\overline{\Lambda})$, qu'on note aussi π (on remarquera que si $(z_v) \in \mathbb{C}^{\Phi}$ et $|z_v| \leq 1$ quel que soit $v \in \Phi$, le vecteur $\sum_{v \in \Phi} z_v v$ est dans C).

Si $V \in \operatorname{Ob}(\mathcal{V}_{\mathbb{Z}})$ est une variété affine et si

$$\varphi \colon X(\overline{\Lambda}) \to V$$

est un morphisme de $\mathcal{T}$, le morphisme composé

$$\varphi \circ \pi \colon \mathbb{A}^{\Phi} \to V$$

est, d'après le Théorème 1, la restriction d'un morphisme

$$\psi_{\mathbb{Z}} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}^{\Phi}_{\mathbb{Z}}, V).$$

Le choix d'une section s de la projection $\mathbb{Z}$-linéaire π de $\mathbb{Z}^{\Phi}$ sur Λ_0 induit une section algébrique

$$s_{\mathbb{Z}} \colon X_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{A}^{\Phi}_{\mathbb{Z}}$$

de la projection $\pi_{\mathbb{Z}} \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}^{\Phi}_{\mathbb{Z}}, X_{\mathbb{Z}})$. Notons

$$\varphi_{\mathbb{Z}} \colon X_{\mathbb{Z}} \to V$$

le morphisme composé $\psi_{\mathbb{Z}} \circ s_{\mathbb{Z}}$. Si $\alpha \in \mathcal{O}(V_{\mathbb{C}})$, la restriction de $\varphi^*_{\mathbb{Z}}(\alpha)$ à C coïncide avec

$$s^* \circ \pi^* \circ \varphi^*(\alpha) = \varphi^*(\alpha).$$

Il en résulte, comme dans la fin de la preuve du Théorème 1, que la restriction de $\varphi_{\mathbb{Z}}$ à $X(\overline{\Lambda})$ est égale à φ. $\square$

Remarque. Du point de vue de la théorie d'Arakelov, le couple $\overline{\Lambda} = (\Lambda, \|\cdot\|)$ est un fibré vectoriel sur la courbe $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \cup \{\infty\}$ et les éléments de $B \cap \Lambda$ sont les sections globales de ce fibré. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_1$ au sens de Kapranov et Smirnov (cf. [12] et paragraphe 1.3). On peut sans doute voir $X(\overline{\Lambda})$ comme la variété affine sur $\mathbb{F}_1$ associé à cet espace vectoriel.

5.4. Il faudrait bien sûr trouver d'autres exemples que les précédents. Par exemple, si G est un schéma en groupes de Chevalley sur $\mathbb{Z}$, peut-on le définir sur $\mathbb{F}_1$? Et qu'en est-il des variétés de drapeaux associées?

Par exemple la variété de Grassmann $G(2,\, 4)$ est aussi la conique Q de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{Z}}$ d'équation homogène

$$xy - zt + uv = 0. \tag{16}$$

Si l'on veut que le nombre des points de $\underline{\underline{X}}(R_n)$, $n \geq 1$, vérifie le Théorème 2(iii) ci-dessous, on peut définir comme suit un objet X sur $\mathbb{F}_1$ contenu dans celui associé à Q. Notons $S_{1,\mathbb{Z}}$, $S_{2,\mathbb{Z}}$, $S_{3,\mathbb{Z}}$ et $S_{4,\mathbb{Z}}$ les sous-variétés localement fermées de Q suivantes

$$S_{1,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^4_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées z/x, t/x, u/x, v/x),

$$S_{2,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x = 0,\, z \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^3_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées y/z, u/z, v/z),

$$S_{3,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x = z = 0,\, u \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées y/u, t/u), et

$$S_{4,\mathbb{Z}} = Q \cap \{x = z = u = 0\} \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}}$$

(coordonnées homogènes $(y,\, t,\, v)$).

Notons S_1, S_2, S_3, S_4 les variétés sur $\mathbb{F}_1$ correspondantes (cf. paragraphe 5.2), munies des injections évidentes $S_\alpha \to Q$ dans $\mathcal{OB}$. Si $A \in \mathcal{A}$ on pose

$$\underline{\underline{X}}(A) = \underline{\underline{S}}_1(A) \cup \underline{\underline{S}}_2(A) \cup \underline{\underline{S}}_3(A) \cup \underline{\underline{S}}_4(A)$$

dans $\underline{\underline{Q}}(A)$ et $\mathcal{a}_X = \mathbb{C}$.

Question 3. *L'objet* $X = (\underline{\underline{X}}, \mathbb{C})$ *sur* $\mathbb{F}_1$ *est-il une variété sur* $\mathbb{F}_1$ *telle que* $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = Q$?

6. Fonctions Zêta

6.1. Soit X une variété sur $\mathbb{F}_1$. On cherche à lui associer une fonction $\zeta_X(s)$. Si $n \geq 1$, rappelons que $R_n = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$ et que l'ensemble fini $\underline{\underline{X}}(R_n)$ est aussi celui des morphismes de $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_{1^n})$ vers X (cf. (9) si X est affine; le cas général se montre de la même façon grâce à la Proposition 3). Puisque la fonction zêta d'une variété algébrique sur le corps $\mathbb{F}_q$, $q > 1$, s'obtient à partir du nombre de ses points dans les corps $\mathbb{F}_{q^n}$, $n \geq 1$, il est naturel de définir $\zeta_X(s)$ à l'aide des nombres entiers $\#\underline{\underline{X}}(R_n)$. On fera l'hypothèse simplificatrice suivante:

(Z) Il existe un polynôme $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tel que, quel que soit l'entier $n \geq 1$,

$$\#\underline{\underline{X}}(R_n) = N(2n + 1).$$

En imitant A. Weil, introduisons alors la série formelle des variables q et T

$$Z(q,\,T) = \exp\left(\sum_{r\geq 1} N(q^r)T^r/r\right).$$

Pour tout nombre réel s on considère alors la fonction $Z(q,\,q^{-s})$ au voisinage de $q = 1$.

Lemme 1. (i) *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ la fonction $Z(q,\,q^{-s})^{-1}$ a un zéro d'ordre $\chi = N(1)$ en $q = 1$. On a de plus*

$$\lim_{q\to 1} Z(q,\,q^{-s})^{-1}(q-1)^{-\chi} = \zeta_X(s),$$

où $\zeta_X(s)$ est la valeur en s d'un polynôme à coefficients entiers.

(ii) *Si $N(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ on a*

$$\zeta_X(s) = \prod_{i=0}^{d}(s-i)^{a_i}.$$

Preuve. Si $N(x)$ est la somme de deux polynômes $N'(x)$ et $N''(x)$, les fonctions $Z(q,\,T)$ et $\zeta_X(s)$ associées à N sont les produits de celles associées à N' et N''. Par conséquent il suffit de traiter le cas où $N(x) = x^d$. On a alors

$$Z(q,\,T) = \exp\left(\sum_{r\geq 1} q^{rd}T^r/r\right) = (1-q^dT)^{-1}$$

et par conséquent

$$Z(q,\,q^{-s})^{-1} = 1 - q^{d-s}.$$

Quand q tend vers 1 on trouve

$$Z(q,\,q^{-s})^{-1} = (s-d)(q-1) + O((q-1)^2),$$

ce qui démontre le lemme. □

6.2. Théorème 2. (i) *Si Δ est un éventail régulier, la variété $X(\Delta)$ sur $\mathbb{F}_1$ qui lui est associée* (*Théorème* 1) *vérifie la condition* (Z). *Le polynôme $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tel que*

$$\#X(\Delta)(\mathbb{F}_{1^n}) = N(2n+1), \quad n \geq 1,$$

vérifie aussi

$$\#\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q) = N(q)$$

pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$ d'ordre $q > 1$. De plus $N(1)$ est la caractéristique d'Euler–Poincaré de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$.

(ii) *Si $\overline{\Lambda} = (\Lambda,\,\|\cdot\|)$ est un réseau hermitien, la variété affine $X(\overline{\Lambda})$ sur $\mathbb{F}_1$ qui lui est associée* (*Proposition* 6) *vérifie la condition* (Z). *Le polynôme $N(x)$ correspondant vérifie $N(1) = 1$ et $N(x) - x^t$ est un polynôme de degré au plus $t-1$* (*où $t = \mathrm{card}(\Phi)$, voir paragraphe* 5.3).

(iii) *Soit Q la quadrique d'équation* (16) *sur $\mathbb{Z}$ et*

$$N(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

On a alors

$$N(2n+1) = \#\underline{\underline{X}}(R_n)$$

où $\underline{\underline{X}}$ est le foncteur défini en paragraphe 5.4, *et*

$$N(q) = \#Q(\mathbb{F}_q)$$

pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$, $q > 1$. *De plus* $N(1) = 6$ *est la caractéristique d'Euler–Poincaré de* $Q(\mathbb{C})$.

Preuve. Pour prouver (i) il suffit de traiter le cas d'une variété torique affine de la forme U_τ. En effet, il en résultera en général que les nombres $\#X(\Delta)(\mathbb{F}_{1^n})$ et $\#\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q)$ sont données par les valeurs (en $2n+1$ et q) du même polynôme, car $\underline{\underline{X(\Delta)}}(R_n)$ (resp. $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{F}_q)$) est la réunion des ensembles $\underline{X}_\tau(R_n)$ (resp. $U_\tau(\mathbb{F}_q)$), amalgamés le long des sous-ensembles $\underline{X}_{\tau\cap\tau'}(R_n)$ (resp. $U_{\tau\cap\tau'}(\mathbb{F}_q)$).

Soit dont τ un cône ouvert régulier de dimension r et $\{m_1, \ldots, m_d\}$ une base de M telle que $\{m_1, \ldots, m_r\}$ soit une famille génératrice de $\mathcal{S}_\tau$. Comme dans la preuve du Théorème 1(i), si $\tau' = \mathbb{R}_+ m_1 + \cdots + \mathbb{R}_+ m_d$, la carte $U_{\tau'} \to \mathbb{A}^d_{\mathbb{Z}}$ donnée par la famille des χ^{m_i}, $1 \le i \le d$, identifie $\underline{X}_\tau(R)$ à l'ensemble fini $(\mu(R) \cup \{0\})^{d-r} \times \mu(R)^r$. Cette même carte identifie $U_\tau(\mathbb{F}_q)$ à l'ensemble $\mathbb{F}_q^{d-r} \times (\mathbb{F}_q^*)^r$. Par conséquent le premier énoncé du théorème est vérifié avec

$$N(x) = x^{d-r}(x-1)^r.$$

Par ailleurs, $U_\tau(\mathbb{C})$ a le type d'homotopie de $(S^1)^r$. Sa caractéristique d'Euler–Poincaré est donc nulle si $r > 0$ est égale à 1 si $r = 0$. On a donc bien $N(1) = \chi(U_\tau(\mathbb{C}))$.

Dans le cas (ii) l'ensemble $\underline{X}(R_n)$ est celui des éléments de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$ de la forme

$$x = \sum_{v\in\Phi} v \otimes \zeta_v,$$

où $\zeta_v \in \mu(R_n) \cup \{0\}$ (voir (15)). D'après [10] (voir la preuve de la Proposition 2(ii)) l'ensemble $\mu(R_n)$ est formé des polynômes $\pm T^i$, $i = 1, \ldots, n$, et la famille (T^i), $i = 1, \ldots, n$ est une base de R_n sur $\mathbb{Z}$, donc tout élément de $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \otimes T^i$$

avec $x_i \in \Lambda$. Ceci conduit à décrire $\underline{X}(R_n)$ de la façon suivante. Si $\Phi' \subset \Phi$ est une partie de Φ, appelons $V(\Phi')$ l'ensemble des vecteurs non nuls de Λ de la forme

$$\sum_{v\in\Phi'} \varepsilon_v v, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_v \pm 1.$$

Si $k \ge 1$ est un entier on note $V(k)$ l'ensemble des collections $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de k vecteurs de Λ telles qu'il existe une famille finie $(\Phi_1, \ldots, \Phi_k)$ de sous-ensembles disjoints de Φ tels que $v_j \in V(\Phi_j)$, $1 \le j \le k$. On note $X(k, n)$ l'ensemble des éléments de $\underline{X}(R_n)$ de la forme

$$x = \sum_{j=1}^k v_j \otimes T^{n_j},$$

où $\{v_1, \cdots, v_k\} \in V(k)$ et $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n$. L'ensemble $\underline{X}(R_n)$ est la réunion disjointe de $\{0\}$ et des sous-ensembles $X(k, n)$. Par ailleurs,

$$\#X(k, n) = (\#V(k))n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Si $v_j \in \Phi_j$ on a $-v_j \in \Phi_j$, donc le cardinal de chaque ensemble $V(k)$ est divisible par 2^k, et $\#X(k, n)$ est un polynôme entier de la variable $2n$, nul à l'origine et de degré k. Si $k = t = \mathrm{card}(\Phi)$, chaque ensemble Φ_j comporte un seul vecteur et son opposé, donc $\#X(t, n)$ est la somme de $(2n)^t$ et d'un polynôme de degré au plus $t-1$ en la variable $2n$. Il en résulte que $\#\underline{X}(R_n) = N(2n+1)$ où $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$ vérifie les conditions de l'énoncé (on notera que $N(1) = 1$ est encore la caractéristique d'Euler–Poincaré de $X_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$).

Pour montrer (iii) il suffit de noter que $\underline{\underline{X}}(R_n)$ (resp. $Q(\mathbb{F}_q)$) est la réunion disjointe des ensembles $\underline{\underline{S}}_\alpha(R_n)$ (resp. $S_{\alpha,\mathbb{Z}}(\mathbb{F}_q)$), $\alpha = 1, 2, 3, 4$, et d'appliquer le Théorème 2(i). □

6.3. Exemples.

6.3.1. Le point $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)$ a pour fonction zêta

$$\zeta_{\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_1)}(s) = s.$$

6.3.2. La droite affine $\mathbb{A}^1$ est telle que $N(q) = q$ et

$$\zeta_{\mathbb{A}^1}(s) = s - 1.$$

6.3.3. Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ vérifie $N(q) = q - 1$ et

$$\zeta_{\mathbb{G}_m}(s) = (s-1)/s.$$

6.3.4. Si Δ et Δ' sont deux éventails on a

$$\zeta_{X(\Delta\times\Delta')}(s) = \zeta_{X(\Delta)}(s) \times \zeta_{X(\Delta')}(s).$$

6.3.5. L'espace projectif $\mathbb{P}^d$ vérifie

$$N(q) = [d]$$

(voir paragraphe 1.1) et donc

$$\zeta_{\mathbb{P}^d}(s) = s(s-1)\dots(s-d).$$

Cette formule et les précédentes sont celles prévues par Manin [15] (voir (3)).

6.3.6. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $\lambda = \|1\| > 0$ la norme des générateurs de Λ. L'entier $t \geq 0$ est la partie entière de λ et la fonction zêta de $X(\overline{\Lambda})$ ne dépend que de t, i. e., $\zeta_{X(\overline{\Lambda})}(s) = \zeta_t(s)$, avec $\zeta_0(s) = s$, $\zeta_1(s) = s-1$, $\zeta_2(s) = s(s-2)/(s-1)$, … Je ne connais pas de formule générale pour $\zeta_t(s)$.

6.4. Remarques.

6.4.1. La définition du Lemme 1(i) a peut-être un sens dans des situations où (Z) n'est pas vérifiée. On peut aussi se demander si une variété X lisse sur $\mathbb{F}_1$ vérifie

la condition (Z), si $N(q)$ est le cardinal de $(X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(\mathbb{F}_q)$, $q > 1$, et si $N(1)$ est la caractéristique d'Euler–Poincaré de $(X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})(\mathbb{C})$. En termes de motifs:

Question 4. *Les motifs des variétés lisses sur $\mathbb{F}_1$ sont-ils des motifs de Tate mixtes?*

6.4.2. Quand $X = \mathrm{Spec}(R)$, $R \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})$, le cardinal de $\underline{X}(R_n)$ n'a pas un comportement simple et je ne sais pas définir $\zeta_X(s)$. Mais on remarquera que X n'est jamais lisse sur $\mathbb{F}_1$ (sauf quand $R = \mathbb{Z}$).

6.4.3. Soit G un graphe fini. M. Kontsevich associe à G des variétés Y_G et X_G sur $\mathbb{Z}$, qui sont "souvent" des variétés polynomialement dénombrables [3], c'est-à-dire telles que leur nombre de points dans $\mathbb{F}_q$, $q > 1$, est la valeur en $x = q$ d'un polynôme $N(x)$ à coefficients entiers. Kontsevich a suggéré que ces variétés sont définies sur $\mathbb{F}_1$. Lorsqu'elles sont polynomialement dénombrables peut-être vérifient-elles la condition (Z) avec le même polynôme $N(x)$. De même, on peut se demander si un matroïde définit une variété sur $\mathbb{F}_1$.

7. Sur l'Image du J-Homomorphisme

7.1. Comme l'a noté Manin [15], la formule (1) suggère que les groupes de K-théorie algébrique de $\mathbb{F}_1$ sont les groupes d'homotopie stable des sphères. En effet, rappelons que, d'après D. Quillen, la K-théorie d'un anneau A est

$$K_m(A) = \pi_m \,\mathrm{BGL}(A)^+, \quad \text{si} \;\; m \geq 1, \tag{17}$$

où le CW-complexe $\mathrm{BGL}(A)^+$ est obtenu en adjoignant au classifiant du groupe linéaire infini $\mathrm{GL}(A)$ des cellules de dimensions 2 et 3 (voir [13]). Si A est un corps et $m > 1$, la formule (17) vaut aussi en remplaçant le groupe linéaire par le groupe spécial linéaire.

Par ailleurs, un théorème de Barratt, Priddy et Quillen [17] affirme que si $\Sigma_\infty = \bigcup_{N \geq 1} \Sigma_N$ est le groupe symétrique infini, on a

$$\pi_m B\Sigma_\infty^+ = \pi_m^s, \quad m \geq 1, \tag{18}$$

où π_m^s est le m-ième groupe d'homotopie stable des sphères. Il est donc logique d'écrire

$$K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m^s, \quad m \geq 1. \tag{19}$$

Variante. Le groupe des unités de $\mathbb{F}_1$ est $\mathbb{F}_1^* = \mu(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. On peut donc envisager que $\mathrm{GL}_N(\mathbb{F}_1)$ est le groupe des matrices monomiales $N \times N$ dont les entrées sont ± 1, c'est-à-dire le produit en couronnes $\Sigma_N \int (\mathbb{Z}/2)^N$. Cela conduirait [11] à remplacer (19) par la formule

$$K_m(\mathbb{F}_1) = \pi_m^s(B(\mathbb{Z}/2)),$$

qui n'en diffère que par un groupe fini de 2-torsion.

7.2. L'inclusion standard de Σ_N dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ induit un morphisme

$$\alpha_m \colon \pi_m^s \to K_m(\mathbb{Z}), \quad m \geq 1,$$

que l'on peut voir comme celui induit en K-théorie algébrique par le morphisme d'anneaux $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{Z}$. Ce morphisme α_m est bien compris.

Adams a introduit un morphisme

$$J \colon \pi_m O \to \pi_m^s,$$

dont il montre que l'image est un groupe cyclique. Le groupe $\mathrm{Im}(J)$ est d'ordre 2 si m est congru à 0 ou 1 modulo 8. Il est cyclique d'ordre le dénominateur w_i de $b_i/2i$ si $m = 2i-1$ avec i pair, où b_i le i-ème nombre de Bernoulli. Et il est nul sinon.

Quillen a montré que α_m est injectif sur l'image de J [18] et S. A. Mitchell [16] a montré que l'image de α_m coïncide avec celle de $\alpha_m \circ J$.

7.3. Par ailleurs, les théories de M. Lévine, M. Hanamura et V. Voevodsky permettent de voir les groupes de K-théorie algébrique comme des groupes d'extensions dans une catégorie (dérivée) de motifs mixtes. Si par exemple $m = 2i-1 > 1$, on a

$$K_{2i-1}(\mathbb{Z}) = K_{2i-1}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}). \tag{20}$$

On peut s'attendre à une formule du même type pour le corps à un élément:

$$K_{2i-1}(\mathbb{F}_1) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}).$$

Les résultats de paragraphe 7.2 signifieraient alors que la classe d'une extension de motifs de Tate sur $\mathbb{Q}$ qui provient, par extension des scalaires de $\mathbb{F}_1$ à $\mathbb{Z}$ (puis $\mathbb{Q}$), d'une extension de motifs de Tate sur $\mathbb{F}_1$ est de torsion, et annulée par w_i s'il s'agit d'une extension de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}(i)$ (ou de $\mathbb{Z}(j)$ par $\mathbb{Z}(i+j)$, $j \in \mathbb{Z}$).

7.4. Un résultat de B. Totaro [24] est cohérent avec les réflexions précédentes. Si $\mathbb{P}(\Delta)$ est la variété torique associée à un éventail Δ de dimension d, le Théorème 5 de [24] montre que la filtration des poids de la cohomologie singulière à coefficients rationnels de $\mathbb{P}(\Delta)(\mathbb{C})$ est canoniquement scindée. La preuve consiste à considérer la filtration canonique

$$\mathbb{P}(\Delta) = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_d \supset \varnothing,$$

où Y_k est la réunion des orbites toriques de dimension au plus $d-k$. Chaque strate $Y_k - Y_{k-1}$ est la réunion disjointe de produits du groupe multiplicatif par la droite affine, et la multiplication par n dans $N \simeq \mathbb{Z}^d$ (cf. paragraphe 5.1) induit le produit par n^j sur la partie de poids j de la cohomologie de ces strates.

Autrement dit, la filtration de $\mathbb{P}(\Delta)$ par Y_k fournit des extensions de motifs de Tate, et donc des classes dans les groupes $\mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j))$, qui sont annulées par le p. g. c. d. des entiers $n^{i+j} - n^j$, $n > 1$. Si j est assez grand, on sait bien que ce p. g. c. d. n'est autre que w_i. Or le Théorème 1 indique que ces extensions sont sans doute dans l'image du morphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{F}_1)}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j)) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(i+j), \mathbb{Z}(j)),$$

ce qui va dans le sens de la discussion de paragraphe 7.3.

On peut aussi se demander si le résultat de Totaro est optimal et si le groupe $\mathrm{Im}(\alpha_{2i-1})$, $i \geq 1$, est engendré par des extensions de motifs sur $\mathbb{Q}$ provenant des variétés toriques par le procédé précédent. Ceci conduit au problème suivant, que l'on pourrait aborder en étudiant la structure de Hodge mixte à coefficients entiers de $\mathbb{P}(\Delta)$ et de sa filtration canonique par les Y_k:

Question 5. *Pour tout entier $i \geq 1$, existe-t-il $j \geq 0$, une variété torique $\mathbb{P}(\Delta)$ et une extension de $\mathbb{Z}(j)$ par $\mathbb{Z}(i+j)$, déduite de la filtration canonique de $\mathbb{P}(\Delta)$, dont la classe dans $\mathrm{Ext}_{\mathrm{DM}(\mathbb{Q})}(\mathbb{Z}(j), \mathbb{Z}(i+j))$ soit d'ordre w_i?*

Remerciements. J'ai bénéficié durant ce travail de très nombreuses discussions, avec notamment J.-B. Bost, M. Broué, P. Cartier, A. Connes, I. Gelfand, H. Gillet, M. Kapranov, M. Kontsevich, L. Lafforgue, Y. Manin, J-P. Serre et B. Totaro, que je tiens à remercier, ainsi que le rapporteur.

Références

[1] E. Arbarello, C. De Concini, and V. G. Kac, *The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves*, Theta functions—Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 171–190. MR 90i:22034

[2] V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Height zeta functions of toric varieties*, J. Math. Sci. **82** (1996), no. 1, 3220–3239. MR 98b:11067

[3] P. Belkale and P. Brosnan, *Matroid motives, and a conjecture of Kontsevich*, Duke Math. J. **116** (2003), no. 1, 147–188. MR 1 950 482

[4] M. Broué and G. Malle, *Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis*, Math. Ann. **292** (1992), no. 2, 241–262. MR 93a:20076

[5] M. Broué, G. Malle, and J. Michel, *Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis avec un appendice de George Lusztig*, Astérisque, vol. 212, Société Mathématique de France, Montrouge, 1993.

[6] M. Broué, G. Malle, and J. Michel, *Towards spetses. I*, Transform. Groups **4** (1999), no. 2–3, 157–218. MR 2001b:20082

[7] A. Connes, *Symétries galoisiennes et renormalisation*, prépublication IHES/M/02/79, 2002.

[8] M. Demazure and P. Gabriel, *Introduction to algebraic geometry and algebraic groups*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 39, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980. MR 82e:14001

[9] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. MR 94g:14028

[10] G. Higman, *The units of group-rings*, Proc. London Math. Soc. (2) **46** (1940), 231–248. MR 2,5b

[11] M. Kapranov, *Some conjectures on the absolute direct image*, lettre, 26/05/1995.

[12] M. Kapranov and A. Smirnov, *Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case*, prépublication.

[13] J.-L. Loday, *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), no. 3, 309–377. MR 56 #5686

[14] V. Maillot, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, Mém. Soc. Math. Fr. (N. S.) (2000), no. 80. MR 2001j:14037

[15] Y. Manin, *Lectures on zeta functions and motives* (*according to Deninger and Kurokawa*), Astérisque (1995), no. 228, 4, 121–163. MR 96d:11076

[16] S. A. Mitchell, *The Morava K-theory of algebraic K-theory spectra*, K-Theory **3** (1990), no. 6, 607–626. MR 91m:55002

[17] S. B. Priddy, *On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group*, Algebraic topology (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXII, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1970), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971, pp. 217–220. MR 50 #11226

[18] D. Quillen, *Letter from Quillen to Milnor on* $\mathrm{Im}(\pi_i 0 \to \pi_i^{\mathrm{s}} \to K_i\mathbf{Z})$, Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Lecture Notes in Math., vol. 551, Springer, Berlin, 1976, pp. 182–188. MR 58 #2811

[19] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 88k:00002

[20] A. L. Smirnov, *Hurwitz inequalities for number fields*, Algebra i Analiz **4** (1992), no. 2, 186–209 (Russian). MR 93h:11065. English translation in: St. Petersburg Math. J. **4** (1993), no. 2, 357–375.

[21] C. Soulé, *On the field with one element* (exposé à l'Arbeitstagung, Bonn, June 1999), preprint IHES/M/99/55.

[22] R. Steinberg, *A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 274–282. MR 13,317d

[23] J. Tits, *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*, Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Établissements Ceuterick, Louvain, 1957, pp. 261–289. MR 21 #7477

[24] B. Totaro, *Chow groups, Chow cohomology, and linear varieties*, preprint, 1998.

[25] A. Weil, *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Oeuvres Scient, I, Springer-Verlag, 1980, pp. 236–240.

CNRS and IHES, 35 Route de Chartres, 91440 Bures sur Yvette, France
E-mail address: `soule@ihes.fr`