REPRESENTATION THEORY
An Electronic Journal of the American Mathematical Society
Volume 1, Pages 37–68 (March 7, 1997)
S 1088-4165(97)00006-X

KAZHDAN-LUSZTIG-POLYNOME UND EINE KOMBINATORIK FÜR KIPP-MODULN

WOLFGANG SOERGEL

Abstract. This article gives a selfcontained treatment of the theory of Kazhdan-Lusztig polynomials with special emphasis on affine reflection groups. There are only a few new results but several new proofs. We close with a conjectural character formula for tilting modules, which formed the starting point of these investigations.

1. Einleitung

Bei dem Versuch, Kazhdan-Lusztig-Vermutungen für Kipp-Moduln aufzustellen, habe ich mich in die Literatur über Kazhdan-Lusztig-Polynome vertieft, insbesondere in die Arbeiten von Kazhdan-Lusztig [KL79], Lusztig [Lus80a], Andersen [And86], Kato [Kat85], Kaneda [Kan87] und Deodhar [Deo87, Deo91]. Es erschien mir sinnvoll, diese Quellen neu zu fassen, um sie leichter zugänglich zu machen. Damit beschäftigen sich die ersten Abschnitte dieser Arbeit. Das einzig neue Resultat hier ist Theorem 5.1, neu sind jedoch manche Beweise und auch die Darstellung als Ganzes (die im Ansatz allerdings auch schon in [Mil] und [Lus91] zu finden ist). Insbesondere kommen die sogenannten R-Polynome in meiner Darstellung nicht mehr explizit vor. Im letzten Abschnitt erreiche ich dann mein ursprüngliches Ziel und gebe eine Vermutung für den Charakter eines Kipp-Moduls an. Es folgt ein graphisch dargestelltes Beispiel und ein Verzeichnis der wichtigsten Notationen. Eine Darstellung der Grundlagen dieses Artikels, die die Resultate des folgenden Abschnitts einschließt, findet man in [Hum90]. Für den dritten Abschnitt vergleiche man auch [Deo94].

Ich danke Henning Haahr Andersen, der mir seine Notizen mit verwandten Überlegungen zur Verfügung stellte, und Corinne Blondel, Michèle Couillens, Caroline Gruson, Jens Carsten Jantzen, Friedrich Knop und George Lusztig für ihre hilfreichen Kommentare zu vorläufigen Fassungen.

2. Die gewöhnlichen Kazhdan-Lusztig-Polynome

Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System, $l : \mathcal{W} \to \mathbb{N}$ die zugehörige Längenfunktion und $\leq$ die Bruhat-Ordnung auf $\mathcal{W}$. Insbesondere bedeutet $x < y$ also $x \leq y$, $x \neq y$. Bezeichne $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ den Ring der Laurentpolynome über $\mathbb{Z}$ in einer Variablen v. Auf dem freien $\mathcal{L}$-Modul über $\mathcal{W}$,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{W}, \mathcal{S}) = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} \mathcal{L} T_x$$

Received by the editors September 25, 1996 and, in revised form, January 2, 1997.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05E99, 17B37.

gibt es genau eine Struktur einer assoziativen $\mathcal{L}$-Algebra so daß $T_xT_y = T_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ und $T_s^2 = v^{-2}T_e + (v^{-2} - 1)T_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$, siehe [Bou81], IV, §2, Exercice 23. Diese assoziative Algebra $\mathcal{H}$ heißt die Hecke-Algebra von $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$.

Sie kann auch beschrieben werden als die assoziative $\mathcal{L}$-Algebra mit Erzeugern $\{H_s\}_{s\in\mathcal{S}}$ (für $H_s = vT_s$), den quadratischen Relationen $H_s^2 = 1+(v^{-1}-v)H_s$ sowie den sogenannten Zopf-Relationen $H_sH_t \dots H_s = H_tH_s \dots H_t$ bzw. $H_sH_tH_s \dots H_t = H_tH_sH_t \dots H_s$ wenn gilt $st \dots s = ts \dots t$ bzw. $sts \dots t = tst \dots s$ für $s, t \in \mathcal{S}$. Alle H_s sind invertierbar, genauer prüft man leicht die Formel $H_s^{-1} = H_s+(v-v^{-1})$.

Wir arbeiten von nun an mit $H_x = v^{l(x)}T_x$. Sicher gilt auch $H_xH_y = H_{xy}$ falls $l(x)+l(y) = l(xy)$. Mit den H_s sind also auch alle H_x Einheiten in $\mathcal{H}$. Es gibt genau einen Ringhomomorphismus $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $H \mapsto \overline{H}$ mit $\overline{v} = v^{-1}$ und $\overline{H}_x = (H_{x^{-1}})^{-1}$. Offensichtlich ist d eine Involution. Wir nennen $H \in \mathcal{H}$ selbstdual genau dann, wenn $\overline{H} = H$.

Theorem 2.1 ([KL79]). *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{H}_x \in H_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$.*

Bemerkung 2.2. In [KL79] wird unser $\underline{H}_x$ mit C'_x bezeichnet. Weiter arbeiten Kazhdan und Lusztig mit der Variablen $q = v^{-2}$ und mit der $\mathcal{L}$-Basis der T_x.

Beweis. Wir wissen ja schon, daß $\overline{H_s} = H_s^{-1} = H_s + (v - v^{-1})$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Insbesondere ist $C_s = H_s + v$ selbstdual, also $\overline{C_s} = C_s$. (Der mit der Materie vertraute Leser sei gewarnt, daß unser C_s in [KL79] mit C'_s bezeichnet wird, und dort C_s für ein anderes Element der Hecke-Algebra steht. Sobald das Theorem bewiesen ist, können wir auch $C_s = \underline{H}_s$ schreiben.)

Die Rechtsmultiplikation von C_s in $\mathcal{H}$ wird beschrieben durch die Formeln

$$H_xC_s = \begin{cases} H_{xs} + vH_x & \text{falls } xs > x; \\ H_{xs} + v^{-1}H_x & \text{falls } xs < x. \end{cases}$$

Wir beginnen nun mit dem Beweis der Existenz und zeigen dazu durch Induktion über die Bruhat-Ordnung die stärkere

Behauptung 2.3. Es gibt für alle $x \in \mathcal{W}$ ein selbstduales $\underline{H}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{H}_x \in H_x + \sum_{y<x} v\mathbb{Z}[v]H_y$.

Sicher können wir die Induktion mit $\underline{H}_e = H_e = 1$ beginnen. Sei nun $x \in \mathcal{W}$ gegeben und sei die Existenz von $\underline{H}_y$ bekannt für alle $y < x$. Falls $x \neq e$ finden wir $s \in \mathcal{S}$ mit $xs < x$ und nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\underline{H}_{xs}C_s = H_x + \sum_{y<x} h_yH_y$$

für geeignete $h_y \in \mathbb{Z}[v]$. Wir bilden

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}C_s - \sum_{y<x} h_y(0)\underline{H}_y,$$

und unsere Induktion läuft. Damit wissen wir, daß es die in der Behauptung beschriebenen $\underline{H}_x$ gibt. Die Eindeutigkeit der $\underline{H}_x$ folgt leicht aus

Behauptung 2.4. Für $H \in \sum_y v\mathbb{Z}[v]H_y$ folgt aus $H = \overline{H}$ schon $H = 0$.

Sicher gilt $H_z \in \underline{H}_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}\underline{H}_y$ mit $\underline{H}_x$ wie in der vorigen Behauptung und folglich $\overline{H_z} \in H_z + \sum_{y<z} \mathcal{L}H_y$ für alle $z \in \mathcal{W}$. Schreiben wir nun $H = \sum h_yH_y$ und

wählen z maximal mit $h_z \neq 0$, so folgt aus $H = \overline{H}$ schon $h_z = \overline{h}_z$ im Widerspruch zu $h_z \in v\mathbb{Z}[v]$. Das zeigt die Behauptung, und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Definition 2.5. Wir definieren für $x, y \in \mathcal{W}$ die $h_{y,x} \in \mathcal{L}$ durch die Gleichung

$$\underline{H}_x = \sum_y h_{y,x} H_y.$$

Bemerkung 2.6. Die $h_{y,x}$ stehen mit den in [KL79] definierten Polynomen $P_{y,x}$ in der Beziehung $h_{y,x} = v^{l(x)-l(y)} P_{y,x}$. Diese Gleichung ist natürlich in $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \supset \mathbb{Z}[q]$ zu verstehen, mit $q = v^{-2}$ wie zuvor. Man sieht per Induktion auch direkt, daß $v^{l(y)-l(x)} h_{y,x}$ schon ein Polynom in q mit konstantem Term 1 ist.

Die ursprüngliche Definition der Kazhdan-Lusztig-Polynome in [KL79] war näher an der Charakterisierung, die wir im Folgenden geben. Betrachten wir nochmal unser Theorem 2.1. Bis auf Vorzeichen gibt es ja keinen Grund, dort v über v^{-1} zu bevorzugen.

Theorem 2.7 ([KL79]). *Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{\tilde{H}}_x \in \mathcal{H}$ mit $\underline{\tilde{H}}_x \in H_x + \sum_y v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] H_y$.*

Beweis. Wir betrachten die zwei involutiven Antiautomorphismen a und i von $\mathcal{H}$ gegeben durch

$$\begin{array}{ll} a(v) = v, & a(H_x) = (-1)^{l(x)} H_x^{-1} \quad \text{bzw.} \\ i(v) = v, & i(H_x) = H_{x^{-1}}. \end{array}$$

Sie kommutieren untereinander und auch mit unserer Involution $d : H \mapsto \overline{H}$. Betrachten wir insbesondere die Abbildung $dia : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, so gilt $dia(H_y) = (-1)^{l(y)} H_y$ und $dia(v) = v^{-1}$.

Wir können und müssen also $\underline{\tilde{H}}_x = (-1)^{l(x)} dia(\underline{H}_x)$ nehmen und erhalten zusätzlich zur Existenz von $\underline{\tilde{H}}_x$ noch die Formel

$$\underline{\tilde{H}}_x = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)} \overline{h}_{y,x} H_y. \qquad \square$$

Bemerkung 2.8. Statt dia kann man ebensogut den Automorphismus $b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ verwenden, der gegeben wird durch $b(H_x) = H_x$, $b(v) = -v^{-1}$. Er kommutiert mit d und wir können und müssen also $\underline{\tilde{H}}_x = b(\underline{H}_x)$ nehmen. Die Involution b kommutiert im übrigen auch mit i und a, und die vier paarweise kommutierenden Involutionen d, b, i und a definieren eine treue Operation von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ auf $\mathcal{H}$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer expliziten Formel für endliches $\mathcal{W}$.

Proposition 2.9 ([KL79]). *Sei $\mathcal{W}$ endlich, $w \in \mathcal{W}$ das längste Element, und $r = l(w)$ seine Länge. So gilt $\underline{H}_w = \sum_{y \in \mathcal{W}} v^{r-l(y)} H_y$.*

Beweis. Bezeichne R die rechte Seite. Aus unseren Formeln für die Operation von C_s folgt

$$\{H \in \mathcal{H} \mid HC_s = (v + v^{-1})H \quad \forall s \in \mathcal{S}\} = \mathcal{L}R.$$

Damit gilt $\overline{R} \in \mathcal{L}R$ und dann sofort $\overline{R} = R$, mithin $R = \underline{H}_w$. $\square$

Jeder mit der Materie vertraute Leser wird hier die Inversionsformeln aus [KL79] für endliche Coxeter-Gruppen vermissen. Wir behandeln sie im folgenden Abschnitt in einem allgemeineren Kontext (siehe 3.10).

3. Der parabolische Fall

Sei $\mathcal{S}_f \subset \mathcal{S}$ eine Teilmenge, $\mathcal{W}_f = \langle \mathcal{S}_f \rangle \subset \mathcal{W}$ ihr Erzeugnis, $\mathcal{W}^f \subset \mathcal{W}$ die Menge der Repräsentanten minimaler Länge für die Rechtsnebenklassen $\mathcal{W}_f \backslash \mathcal{W}$. Insbesondere definiert also die Multiplikation eine Bijektion $\mathcal{W}_f \times \mathcal{W}^f \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$. Bezeichne $\mathcal{H}_f = \mathcal{H}(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f) \subset \mathcal{H}$ die Hecke-Algebra von $(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f)$. Man beachte, daß die quadratische Relation in der Hecke-Algebra auch $(H_s + v)(H_s - v^{-1}) = 0$ geschrieben werden kann. Halten wir $u \in \{-v, v^{-1}\}$ fest, so definiert die Vorschrift $H_s \mapsto u \; \forall s \in \mathcal{S}_f$ eine Surjektion von $\mathcal{L}$-Algebren

$$\varphi_u : \mathcal{H}_f \twoheadrightarrow \mathcal{L}.$$

Auf diese Weise wird $\mathcal{L}$ ein $\mathcal{H}_f$-Bimodul, den wir mit $\mathcal{L}(u)$ bezeichnen. Wir induzieren und definieren die beiden $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\begin{array}{rcrcl} \mathcal{M} & = & \mathcal{M}^f & = & \mathcal{L}(v^{-1}) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}, \\ \mathcal{N} & = & \mathcal{N}^f & = & \mathcal{L}(-v) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}. \end{array}$$

In beiden Moduln bilden die $M_x = 1 \otimes H_x$ bzw. $N_x = 1 \otimes H_x$ mit $x \in \mathcal{W}^f$ eine $\mathcal{L}$-Basis. Die Operation von C_s für $s \in \mathcal{S}$ nimmt in diesen Basen folgende Form an:

$$M_x C_s = \begin{cases} M_{xs} + vM_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs > x; \\ M_{xs} + v^{-1}M_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs < x; \\ (v + v^{-1})M_x & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f, \end{cases}$$

$$N_x C_s = \begin{cases} N_{xs} + vN_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs > x; \\ N_{xs} + v^{-1}N_x & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs < x; \\ 0 & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$

Um das einzusehen verwendet man, daß aus $x \in \mathcal{W}^f$, $xs \notin \mathcal{W}^f$ schon folgt $xs = rx$ mit $r \in \mathcal{S}_f$. (Insbesondere impliziert $xs < x$ schon $xs \in \mathcal{W}^f$.) In der Tat folgt ja sogar für beliebige $x \in \mathcal{W}$ und $r, s \in \mathcal{S}$ aus $rx > x$ und $rxs < xs$ schon $rxs = x$.

Man prüft leicht für alle $s \in \mathcal{S}_f$ die Formel

$$\varphi_u(C_s) = \begin{cases} (v + v^{-1}) & \text{falls } u = v^{-1}; \\ 0 & \text{falls } u = -v. \end{cases}$$

Da die C_s mit $s \in \mathcal{S}_f$ ganz $\mathcal{H}_f$ als $\mathcal{L}$-Algebra erzeugen, folgt $\varphi_u(\overline{H}) = \overline{\varphi_u(H)} \; \forall H \in \mathcal{H}_f$. Mithin definiert die Vorschrift $a \otimes H \mapsto \overline{a} \otimes \overline{H}$ einen Homomorphismus von additiven Gruppen

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M},\ M \mapsto \overline{M}$$

mit $\overline{M_e} = M_e$ und $\overline{MH} = \overline{M}\,\overline{H}$ für alle $M \in \mathcal{M}$, $H \in \mathcal{H}$. Analoges gilt für $\mathcal{N}$.

Eine additive Abbildung F zwischen zwei $\mathcal{L}$-bzw. $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln nennen wir "$\mathcal{L}$-schieflinear" bzw. "$\mathcal{H}$-schieflinear" genau dann, wenn $F(MH) = F(M)\overline{H}$ für alle M und alle $H \in \mathcal{L}$ bzw. $H \in \mathcal{H}$. Besitzt ein Modul eine feste schieflineare Involution, so nennen wir die unter dieser Involution stabilen Elemente "selbstdual". Es heißt also zum Beispiel $N \in \mathcal{N}$ selbstdual genau dann, wenn $\overline{N} = N$.

Theorem 3.1 ([Deo87]). 1. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibts genau ein selbstduales $\underline{M}_x \in \mathcal{M}$ mit $\underline{M}_x \in M_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]M_y$.*

2. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{N}_x \in \mathcal{N}$ mit $\underline{N}_x \in N_x + \sum_y v\mathbb{Z}[v]N_y$.*

Beweis. Wir zeigen (1), der Beweis von (2) ist identisch. Um die Existenz von $\underline{M}_x$ nachzuweisen, machen wir eine Induktion über die Länge von x und zeigen stärker, daß wir $\underline{M}_x$ von der Form

$$\underline{M}_x = M_x + \sum_{y<x} m_{y,x} M_y$$

finden können. Sicher können wir $\underline{M}_e = M_e$ nehmen. Sei nun $\underline{M}_y$ konstruiert für alle $y \in \mathcal{W}^f$, $y < x$ und sei $s \in \mathcal{S}$ gegeben mit $xs < x$, $xs \in \mathcal{W}^f$. Dann gilt

$$\underline{M}_{xs} C_s = M_x + \sum_{z<x} m_z M_z$$

für geeignete $m_z \in \mathbb{Z}[v]$. Nach Induktion sind mögliche $\underline{M}_z$ für $z < x$ bereits bekannt. Wir bilden dann

$$\underline{M}_x = \underline{M}_{xs} C_s - \sum_z m_z(0) \underline{M}_z$$

und haben auch ein mögliches $\underline{M}_x$ gefunden. Aus der Existenz dieser $\underline{M}_x$ folgert man wie im Beweis von Theorem 2.1 zunächst $\overline{\underline{M}_x} \in M_x + \sum_{y<x} \mathcal{L} M_y$ und dann die Eindeutigkeit der $\underline{M}_x$. □

Bemerkungen 3.2. 1. Man definiere die $m_{y,x} \in \mathbb{Z}[v]$ durch

$$\underline{M}_x = \sum_y m_{y,x} M_y.$$

Insbesondere ist also $m_{x,x} = 1$, und $m_{y,x} \neq 0 \Rightarrow y \leq x$. Wir betrachten wieder die Variable $q = v^{-2} \in \mathcal{L}$. Mit Induktion folgert man leicht, daß sogar gilt $v^{l(y)-l(x)} m_{y,x} \in \mathbb{Z}[q]$. Dasselbe gilt für die $n_{y,x}$ definiert durch

$$\underline{N}_x = \sum_y n_{y,x} N_y.$$

Die $v^{l(y)-l(x)} m_{y,x}$ bzw. $v^{l(y)-l(x)} n_{y,x}$ sind Deodhars [Deo87] parabolische Polynome $P^J_{\tau,\sigma}$ für Deodhars Fälle $u = -1$ bzw. $u = q$, falls $\tau = y^{-1}\mathcal{W}_f$, $\sigma = x^{-1}\mathcal{W}_f$, und $W_J = \mathcal{W}_f$. Der Vergleich mit Deodhars Definition wird dem Leser aber (wenn überhaupt) erst mit Hilfe von Theorem 3.5 gelingen.

2. Mögliche Interpretationen der parabolischen Polynome im Rahmen der Darstellungstheorie faßt Theorem 3.11.4 in [BGS96] zusammen. Bis auf die Transformation $v = t$ und für $W_Q = \mathcal{W}_f$ sind die dortigen Polynome $(P^Q(t))_{x,y}$ genau unsere $m_{x,y}$, und die $(P_Q(t))_{x,y}$ stimmen bis auf einen Parameterwechsel mit unseren $n_{x,y}$ überein, vergleiche 3.10.
3. Der Beweis enthält eine induktive Beschreibung der $\underline{M}_x$. Mit Induktion über die Länge von x erkennt man daraus, daß für alle $y \leq x$ der Leitterm von $m_{y,x}$ genau $v^{l(x)-l(y)}$ ist. Diese Aussage hat keine Entsprechung für die $\underline{N}_x$, da $N_y C_s = 0$ für gewisse y und s.
4. Die Berechnung der $n_{y,x}$ wird vereinfacht durch die bekannte Formel $\underline{N}_x C_s = (v + v^{-1})\underline{N}_x$ für alle $x \in \mathcal{W}^f$, $s \in \mathcal{S}$ mit $xs < x$. Man zeigt diese Formel durch Induktion über x, wobei man ausnutzt, daß erstens $C_s^2 = (v + v^{-1})C_s$ und zweitens $n_z(0) \neq 0 \Rightarrow zs < z$ im vorhergehenden Beweis. Es folgt insbesondere $n_{ys,x} = v n_{y,x}$ falls $y, x \in \mathcal{W}^f$, $s \in \mathcal{S}$ mit $ys < y$, $xs < x$.

Ebenso zeigt man, daß $\underline{M}_x C_s = (v + v^{-1})\underline{M}_x$ für alle $x \in \mathcal{W}^f$, $s \in \mathcal{S}$ mit $xs < x$ oder $xs \notin \mathcal{W}^f$, und folgert $m_{ys,x} = v m_{y,x}$ falls $y, x \in \mathcal{W}^f$, $s \in \mathcal{S}$ mit $ys < y$, $xs < x$.

5. Natürlich gilt im Fall $\mathcal{S}_f = \emptyset$ schon $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{H}$, $\underline{M}_x = \underline{N}_x = \underline{H}_x$, $m_{y,x} = n_{y,x} = h_{y,x}$.

In einer abelschen Gruppe E mit Involution d bezeichne $E^+ \subset E$ die Untergruppe der selbstdualen Elemente $E^+ = \{e \in E \mid de = e\}$.

Proposition 3.3. 1. *$\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ ist die über $\mathcal{L}^+ = \mathbb{Z}[(v + v^{-1})]$ von den C_s mit $s \in \mathcal{S}$ erzeugte Unteralgebra.*
2. *$\mathcal{M}^+ = \mathcal{H}^+ M_e$ und die $\underline{M}_x$ bilden eine $\mathcal{L}^+$-Basis von $\mathcal{M}^+$.*
3. *$\mathcal{N}^+ = \mathcal{H}^+ N_e$ und die $\underline{N}_x$ bilden eine $\mathcal{L}^+$-Basis von $\mathcal{N}^+$.*

Beweis. Bezeichne für diesen Beweis $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ die über $\mathcal{L}^+ = \mathbb{Z}[(v + v^{-1})]$ von den C_s, $s \in \mathcal{S}$ erzeugte Unteralgebra. Zeigen wir (2) oder (3) für das so definierte $\mathcal{H}^+$, so folgt (1) als Spezialfall.

Wir zeigen hier (2), der Beweis von (3) ist identisch. Zunächst liegen ja nach der induktiven Beschreibung der $\underline{M}_x$ alle $\underline{M}_x$ in $\mathcal{H}^+ M_e$. Andererseits bilden die $\underline{M}_x$ eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{M}$, und ein $M = \sum m_x \underline{M}_x$ ist selbstdual genau dann, wenn alle m_x es sind. □

Die $m_{y,x}$, $n_{y,x}$ hängen wie folgt mit den "gewöhnlichen" Kazhdan-Lusztig-Polynomen zusammen.

Proposition 3.4 ([Deo87])**.** *Seien $x, y \in \mathcal{W}^f$.*

1. *Ist $\mathcal{W}_f$ endlich und $w_f \in \mathcal{W}_f$ das längste Element, so gilt die Beziehung $m_{y,x} = h_{w_f y, w_f x}$.*
2. *Für beliebiges $\mathcal{S}_f$ gilt $n_{y,x} = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{l(z)} h_{zy,x}$.*

Beweis. (1) Wir betrachten die Einbettung von $\mathcal{L}$-Moduln

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{L}(v^{-1}) & \to & \mathcal{H}_f \\ 1 & \mapsto & \underline{H}_{w_f}. \end{array}$$

Sie kommutiert natürlich mit der Dualität, und nach dem Beweis von Proposition 2.9 ist sie auch mit der Rechtsoperation von $\mathcal{H}_f$ verträglich. Folglich definiert sie eine Einbettung von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln

$$\zeta : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{H},$$

die ebenfalls mit der Dualität verträglich ist. Wir setzen $r = l(w_f)$. Nach Proposition 2.9 gilt

$$\zeta(M_x) = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} v^{r - l(z)} H_{zx}$$

und damit erhalten wir $\zeta(\underline{M}_x) = \underline{H}_{w_f x}$, woraus wir sogar stärker folgern $m_{y,x} = v^{r-l(z)} h_{zy, w_f x}$ für alle $y, x \in \mathcal{W}^f$, $z \in \mathcal{W}_f$.

(2) Wir betrachten die offensichtliche Surjektion

$$\xi : \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{L}(-v) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}$$

mit $\xi(H) = 1 \otimes H$. Sie vertauscht mit der Dualität, und man prüft mühelos, daß $\xi(H_{zx}) = (-v)^{l(z)} N_x$ für alle $z \in \mathcal{W}_f$, $x \in \mathcal{W}^f$. Es folgt

$$\xi(\underline{H}_x) = \begin{cases} \underline{N}_x & \text{falls } x \in \mathcal{W}^f; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die behauptete Formel ergibt sich sofort. □

Auch bei der Definition von $\underline{N}_x$, $\underline{M}_x$ kann man sich fragen, ob man nicht v durch v^{-1} ersetzen kann. Die Antwort gibt folgendes

Theorem 3.5 ([Deo91]). 1. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibts genau ein selbstduales $\underline{\tilde{N}}_x \in \mathcal{N}$ mit $\underline{\tilde{N}}_x \in N_x + \sum_y v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]N_y$. Dies $\underline{\tilde{N}}_x$ kann beschrieben werden durch die Formel $\underline{\tilde{N}}_x = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)}\overline{m}_{y,x}N_y$.*

2. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{\tilde{M}}_x \in \mathcal{M}$ mit $\underline{\tilde{M}}_x \in M_x + \sum_y v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]M_y$. Dies $\underline{\tilde{M}}_x$ kann beschrieben werden durch die Formel $\underline{\tilde{M}}_x = \sum_y (-1)^{l(x)+l(y)}\overline{n}_{y,x}M_y$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Beziehung $\varphi_{-v} = \varphi_{v^{-1}} \circ ia$, es kommutiert also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_f & \longrightarrow & \mathcal{L}(-v) \\ {\scriptstyle ia}\downarrow & & \| \\ \mathcal{H}_f & \longrightarrow & \mathcal{L}(v^{-1}). \end{array}$$

Wir können somit eine $\mathcal{L}$-schieflineare Bijektion $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ erklären durch die Vorschrift $\phi(c \otimes H) = \overline{c} \otimes dia(H)$, und es gilt offensichtlich $\phi(\overline{N}) = \overline{\phi(N)} \quad \forall N \in \mathcal{N}$. Ebenso offensichtlich gilt $\phi(N_x) = (-1)^{l(x)}M_x$. Wir können und müssen also $\underline{\tilde{M}}_x = (-1)^{l(x)}\phi(\underline{N}_x)$ und $\underline{\tilde{N}}_x = (-1)^{l(x)}\phi^{-1}(\underline{M}_x)$ nehmen. □

Als nächstes diskutieren wir Umkehrformeln. Dazu betrachten wir die $\mathcal{L}$-Moduln

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \\ \mathcal{N}^* &= \operatorname{Hom}_{\mathcal{L}}(\mathcal{N}, \mathcal{L}) \end{aligned}$$

und erklären auf diesen Räumen eine $\mathcal{L}$-schieflineare Involution $F \mapsto \overline{F}$ durch die Vorschrift $\overline{F}(M) = \overline{F(\overline{M})}$. Weiter definieren wir $M_x^* \in \mathcal{M}^*$ durch $M_x^*(M_y) = \delta_{x,y}$ und setzen $M^x = (-1)^{l(x)}M_x^*$. Ganz genauso definieren wir $N_x^* \in \mathcal{N}^*$ durch $N_x^*(N_y) = \delta_{x,y}$ und setzen $N^x = (-1)^{l(x)}N_x^*$. Warum ich vorziehe mit den M^x bzw. N^x zu arbeiten, wird erst später klar werden. Vorerst hat das bedauerlicherweise nur den Effekt, alle Formeln komplizierter zu machen.

Wir schreiben die Elemente von $\mathcal{M}^*$ als formale Linearkombinationen $F = \sum^\infty m^z M^z$ mit $m^z = (-1)^{l(z)}F(M_z) \in \mathcal{L}$. Das Zeichen ∞ über der Summe soll daran erinnern, daß formale unendliche Summen erlaubt sind. Analog notieren wir die Elemente von $\mathcal{N}^*$. Nun ist $\overline{M^x} \in M^x + \sum_{z>x}^\infty \mathcal{L}M^z$ und für $\overline{N^x}$ gilt Entsprechendes, denn die Matrizen der Dualität auf $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^*$ (bzw. $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}^*$) sind bis auf Vorzeichen transponiert zueinander.

Theorem 3.6. 1. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{M}^x \in \mathcal{M}^*$ mit $\underline{M}^x \in M^x + \sum^\infty v\mathbb{Z}[v]M^z$.*

2. *Für alle $x \in \mathcal{W}^f$ gibt es genau ein selbstduales $\underline{N}^x \in \mathcal{N}^*$ mit $\underline{N}^x \in N^x + \sum^\infty v\mathbb{Z}[v]N^z$.*

Beweis. Wir zeigen nur (1), der Beweis von (2) ist identisch. Für die Eindeutigkeit müssen wir wieder zeigen, daß $F = 0$ das einzige selbstduale Element von $\sum^\infty v\mathbb{Z}[v]M^z$ ist. Aber sei $F = \sum^\infty m^z M^z$. Ist $F \neq 0$, so finden wir y minimal mit $m^y \neq 0$. Dann gilt $\overline{m^y} = m^y$ und mit $m^y \in v\mathbb{Z}[v]$ ergibt sich ein Widerspruch.

Um die Existenz zu zeigen definieren wir schlicht $\underline{M}^x \in \mathcal{M}^*$ durch die Vorschrift

$$\underline{M}^x(\underline{M}_y) = (-1)^{l(x)}\delta_{x,y}$$

und müssen nur die Eigenschaften prüfen. Selbstdualität ist evident. Schreiben wir $\underline{M}^x = \sum_z^\infty m^{z,x} M^z$, so gilt offensichtlich

$$\sum_z (-1)^{l(z)+l(x)} m^{z,x} m_{z,y} = \delta_{x,y}.$$

Die Übergangsmatrix $m_{z,y}$ ist aber eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen und Einträgen aus $v\mathbb{Z}[v]$ unterhalb der Diagonalen, mithin gilt dasselbe für ihre Inverse, und es folgt $m^{z,x} \in v\mathbb{Z}[v]$ falls $z \neq x$ sowie $m^{x,x} = 1$ (und sogar zusätzlich $m^{z,x} \neq 0 \Rightarrow z \geq x$). □

Wir führen genauso auch die $n^{z,x} \in \mathbb{Z}[v]$ ein durch die Gleichung $\underline{N}^x = \sum^\infty n^{z,x} N^z$ und erhalten auch die Umkehrformeln

$$\sum_z (-1)^{l(z)+l(x)} n^{z,x} n_{z,y} = \delta_{x,y}.$$

Im Fall $\mathcal{S}_f = \emptyset$ schreiben wir $\mathcal{H}^*$, H_x^*, H^x, $\underline{H}^x$, $h^{z,x}$ statt $\mathcal{M}^*$, M_x^*, M^x, $\underline{M}^x$, $m^{z,x}$. Die $h^{z,x}$ mit $\underline{H}^x = \sum^\infty h^{z,x} H^z$ sind also die renomierten inversen Kazhdan-Lusztig-Polynome,

$$\sum_z (-1)^{l(z)+l(x)} h^{z,x} h_{z,y} = \delta_{x,y}.$$

Ganz ähnlich wie in Proposition 3.4 lassen sich auch die parabolischen inversen Polynome $m^{x,y}$, $n^{x,y}$ in den gewöhnlichen inversen Polynomen $h^{x,y}$ ausdrücken. Genauer gilt

Proposition 3.7. 1. *Ist $\mathcal{W}_f$ endlich, $w_f \in \mathcal{W}_f$ das längste Element und $r = l(w_f)$ seine Länge, so gilt für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$ die Beziehung*

$$m^{y,x} = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{r-l(z)} h^{zy, w_f x}.$$

2. *Für beliebiges $\mathcal{S}_f$ gilt $n^{y,x} = h^{y,x}$ für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$.*

Beweis. (1) Wir transponieren die im Beweis von 3.4 (1) betrachtete Abbildung ζ und erhalten

$$\zeta^* : \mathcal{H}^* \to \mathcal{M}^*.$$

Aus der Formel für $\zeta(M_x)$ folgt sofort $\zeta^*(H^{zx}) = (-v)^{r-l(z)}(-1)^r M^x$ für alle $x \in \mathcal{W}^f$, $z \in \mathcal{W}_f$. Aus der Formel $\zeta(\underline{M}_x) = \underline{H}_{w_f x}$ folgt sofort

$$\zeta^*(\underline{H}^{tx}) \quad = \quad \begin{cases} (-1)^r \underline{M}^x & \text{falls } t = w_f; \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wieder für alle $x \in \mathcal{W}^f$, $t \in \mathcal{W}_f$. Wenden wir also ζ^* an auf die Gleichung $\underline{H}^{w_f x} = \sum^\infty h^{zy, w_f x} H^{zy}$ summiert über $z \in \mathcal{W}_f$, $y \in \mathcal{W}^f$, so ergibt sich

$$\underline{M}^x = \sum_y^\infty \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{r-l(z)} h^{zy, w_f x} M^y$$

und unsere Formel ist bewiesen. Etwas feiner können wir auch ζ^* auf $\underline{H}^{tx}$ mit $t \neq w_f$ anwenden und erhalten $\sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-v)^{-l(z)} h^{zy,tx} = 0$ für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$.

(2) Wir transponieren die im Beweis von 3.4 (2) betrachtete Abbildung ξ und erhalten

$$\xi^* : \mathcal{N}^* \to \mathcal{H}^*.$$

Aus der Formel für $\xi(H_{zx})$ folgern wir

$$\xi^*(N^x) = \sum_{z\in\mathcal{W}_f} v^{l(z)} H^{zx}$$

und die Formel für $\xi(\underline{H}_{zx})$ liefert $\xi^*(\underline{N}^x) = \underline{H}^x$. Wenden wir also ξ^* auf die Gleichung $\underline{N}^x = \sum_y^\infty n^{y,x} N^y$ an, so ergibt sich

$$\underline{H}^x = \sum_y^\infty \sum_{z\in\mathcal{W}_f} v^{l(z)} n^{y,x} H^{zy}$$

und es folgt sogar feiner $v^{l(z)} n^{y,x} = h^{zy,x}$ für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$ und $z \in \mathcal{W}_f$. □

Um den folgenden Satz formulieren zu können, muß ich zuerst eine Sprechweise einführen. Sei $\varphi : A \to A'$ ein Ringhomomorphismus, $\mathcal{M}$ ein A-Modul und $\mathcal{M}'$ ein A'-Modul. Ein Homomorphismus additiver Gruppen $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ heißt "φ-linear" genau dann, wenn $\psi(rm) = \varphi(r)\psi(m) \quad \forall r \in A,\ m \in \mathcal{M}$. Für die Involution $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $d(H) = \overline{H}$ ist also d-linear dasselbe wie $\mathcal{H}$-schieflinear.

Offensichtlich wird unser $\mathcal{M}^*$ ein $\mathcal{H}$-Linksmodul durch die Vorschrift $(HF)(M) = F(MH)\ \forall H \in \mathcal{H}, F \in \mathcal{M}^*, M \in \mathcal{M}$. Wir erinnern an die Involutionen d, a, und $da = d \circ a$ auf $\mathcal{H}$ aus dem Beweis von Theorem 2.7.

Theorem 3.8. *Es gibt eine da-lineare Abbildung* $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^*$ *mit* $\psi(N_x) = M^x\ \forall x$.

Beweis. Ich behaupte zunächst die Formeln

$$C_s M_x^* \quad = \quad \begin{cases} M_{xs}^* + vM_x^* & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs > x; \\ M_{xs}^* + v^{-1}M_x^* & \text{falls } xs \in \mathcal{W}^f,\ xs < x; \\ (v + v^{-1})M_x^* & \text{falls } xs \notin \mathcal{W}^f. \end{cases}$$

In der Tat, die Matrix der Operation von C_s auf $\mathcal{M}$ in der Basis der M_x zerfällt in Einer-Blöcke sowie Zweier-Blöcke der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} v & 1 \\ 1 & v^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Sie ist also ihre eigene Transponierte, und das liefert obige Behauptung.

Wir folgern die Existenz einer i-linearen Abbildung $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^*$ mit $M_x \mapsto M_x^*$. Andererseits wissen wir nach dem Beweis von Theorem 3.5 um die Existenz einer dia-linearen Abbildung $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$ mit $N_x \mapsto (-1)^{l(x)} M_x$. Wir verknüpfen diese beiden Abbildungen, und der Satz ergibt sich. □

Natürlich bleiben alle unsere Überlegungen und Formeln gültig, wenn wir $\mathcal{N}$, N mit $\mathcal{M}$, M vertauschen. Der Vollständigkeit halber schließe ich hier noch die Umkehrformeln von Douglass für endliches $\mathcal{W}$ an.

Proposition 3.9 ([Dou90])**.** *Sei* $\mathcal{W}$ *endlich und seien* $w \in \mathcal{W}$ *bzw.* $w_f \in \mathcal{W}_f$ *die längsten Elemente. So gilt*

$$\sum_z (-1)^{l(x)+l(z)} m_{z,x} n_{w_f zw, w_f yw} = \delta_{x,y}.$$

Bemerkung 3.10. Als Spezialfall erhält man so die Umkehrformeln von Kazhdan-Lusztig [KL79]

$$\sum_z (-1)^{l(x)+l(z)} h_{z,x} h_{zw,yw} = \delta_{x,y}.$$

Beweis. Setzen wir $\mathcal{S}_g = w\mathcal{S}_f w$, so definiert die Abbildung $x \mapsto w_f wx$ eine ordnungsumkehrende Bijektion $\mathcal{W}^g \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}^f$. Folglich haben wir eine $\mathcal{H}$-schieflineare Abbildung

$$\mathcal{N}^g \to \mathcal{N}, \quad N_x^g \mapsto N_{w_f wx},$$

wo wir weiter mit $\mathcal{N} = \mathcal{N}^f$ arbeiten. Verknüpfen wir diese Abbildung mit $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^*$, so ergibt sich eine a-lineare Abbildung

$$\mathcal{N}^g \to \mathcal{M}^*, \quad N_x^g \mapsto M^{w_f wx}.$$

Diese Abbildung vertauscht sogar mit den Dualitäten auf unseren Moduln, denn N_e^g ist selbstdual und ebenso $M^{w_f w}$, da ja $w_f w$ das maximale Element von $\mathcal{W}^f$ ist. Dann geht unter unserer Abbildung aber notwendig $\underline{N}_x^g$ in $\underline{M}^{w_f wx}$ über, und wir folgern

$$m^{w_f wy, w_f wx} = n_{y,x}^g = n_{wyw,wxw}.$$

Jetzt müssen wir nur noch die Variablen transformieren und erhalten

$$m^{y,x} = n_{w_f yw, w_f xw}. \qquad \square$$

4. Affine Spiegelungsgruppen und der periodische Hecke-Modul

Für die im Folgenden zitierten Begriffe verweise ich auf die Standard-Referenz [Bou81]. Seien $V \supset R \supset R^+ \supset \Delta$ ein reeller Vektorraum, ein Wurzelsystem, ein System positiver Wurzeln und die zugehörige Menge von einfachen Wurzeln. Sei $W \subset GL(V)$ die Weylgruppe und $\mathcal{W} = W \ltimes \mathbb{Z}R$ die affine Weylgruppe. Für $\mu \in V$ bezeichne $\mathcal{W}_\mu$ bzw. W_μ seinen Stabilisator in $\mathcal{W}$ bzw. W. Es ist also $W = \mathcal{W}_0$. Die Gruppe $\mathcal{W}$ wird von ihren (affinen) Spiegelungen erzeugt und wir bezeichnen mit $\mathcal{F}$ die Menge aller Spiegelebenen zu Spiegelungen aus $\mathcal{W}$. Für $F \in \mathcal{F}$ bezeichne $s_F \in \mathcal{W}$ die Spiegelung an F.

Die Zusammenhangskomponenten des Komplements aller Spiegelebenen $V - \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ heißen "Alkoven". Wir bezeichnen die Menge aller Alkoven mit $\mathcal{A}$. Die offensichtliche Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{A}$ ist frei und transitiv. Sei weiter

$$\mathcal{C} = \{\tau \in V \mid \langle \tau, \alpha^\vee \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in R^+\}$$

die dominante Weylkammer. Wir bezeichnen mit $A^+ \in \mathcal{A}$ denjenigen Alkoven, der in $\mathcal{C}$ liegt und dessen Abschluß den Nullvektor enthält.

Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ die Menge aller Spiegelungen, die eine Wand von A^+ punktweise festhalten. So ist $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System. Wir betrachten weiter die Bijektion $\mathcal{W} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, w \mapsto wA^+$. Die offensichtliche Rechtsoperation von $\mathcal{W}$ auf sich selbst entspricht dann einer Rechtsoperation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{A}$, notiert $A \mapsto Aw$. Für $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$ kann man sich As wie folgt veranschaulichen: Man betrachte die Wand von A^+, die von s festgehalten wird. Genau eine Wand von A ist zu dieser konjugiert unter der Operation von $\mathcal{W}$ auf V. Und As berührt A genau in dieser Wand.

Jede Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$ teilt V in zwei Halbebenen

$$V - F = F^+ \cup F^-,$$

wo wir mit F^+ diejenige Halbebene bezeichnen, die jedes Translat der dominanten Weylkammer trifft, also $F^+ \cap (\tau + \mathcal{C}) \neq \emptyset \ \forall \tau \in V$. Für $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$ schreiben wir $As \succ A$ (bzw. $As \prec A$) genau dann, wenn $As \subset F^+$ (bzw. $As \subset F^-$) für die Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$, die As von A trennt.

Wir können nun den "periodischen" Hecke-Modul $\mathcal{P}$ definieren. Als $\mathcal{L}$ -Modul ist $\mathcal{P}$ schlicht der freie Modul mit Basis $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{L}A.$$

Lemma 4.1 ([Lus80a])**.** *Es gibt auf $\mathcal{P}$ eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ derart, daß für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt:*

$$AC_s = \begin{cases} As + vA & \textit{falls } As \succ A; \\ As + v^{-1}A & \textit{falls } As \prec A. \end{cases}$$

Bemerkung 4.2. Um den Modul $\mathcal{M}$ aus [Lus80a] mit diesem $\mathcal{P}$ zu identifizieren, benötigt man eine Längenfunktion $\delta : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ im Sinne von Lusztig. Unser A hier hieße in Lusztigs Notationen $q^{-\delta(A)/2}A$. Außerdem operiert bei mir $\mathcal{H}$ von rechts.

Beweis. Zunächst betrachten wir für $s \in \mathcal{S}$ die $\mathcal{L}$-lineare Abbildung $\rho_s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mit

$$\rho_s(A) = \begin{cases} As + vA & \text{falls } As \succ A; \\ As + v^{-1}A & \text{falls } As \prec A. \end{cases}$$

Für $\mu \in \mathbb{Z}R$ betrachten wir auch $\langle \mu \rangle : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $A \mapsto \mu + A$. Offensichtlich gilt $\langle \mu \rangle \circ \rho_s = \rho_s \circ \langle \mu \rangle$ für alle $\mu \in \mathbb{Z}R$, $s \in \mathcal{S}$.

Nun erhalten wir ja offensichtlich eine Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ durch Strukturtransport über die $\mathcal{L}$-lineare Bijektion $\mathcal{H} \to \mathcal{P}$ mit $H_x \mapsto xA^+ \quad \forall x \in \mathcal{W}$. Diese Rechtsoperation schreiben wir $P * H$ für $P \in \mathcal{P}, H \in \mathcal{H}$. Die Abbildung $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto P * H$ schreiben wir auch $\rho^*(H)$.

Bezeichne $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}$ die Menge aller Alkoven, die in der dominanten Weylkammer liegen, also $\mathcal{A}^+ = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset \mathcal{C}\}$. Für $x \in \mathcal{W}$, $s \in \mathcal{S}$ mit xA^+, $xsA^+ \in \mathcal{A}^+$ ist $x > xs$ gleichbedeutend zu $xA^+ \succ xA^+s$. Für alle $A \in \mathcal{A}$, $s \in \mathcal{S}$ mit $A, As \in \mathcal{A}^+$ gilt mithin

$$\rho_s(A) = A * C_s.$$

Sei $\mu \in \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}R$. Für jeden Alkoven A liegt $n\mu + A$ in $\mathcal{C}$, falls $n \gg 0$. Wir folgern

$$\begin{aligned} \rho_s(A) &= \langle -n\mu \rangle \circ \rho_s \circ \langle n\mu \rangle(A) \\ &= \langle -n\mu \rangle \circ \rho^*(C_s) \circ \langle n\mu \rangle(A), \end{aligned}$$

falls $n \gg 0$. Für alle $H \in \mathcal{H}$, $P \in \mathcal{P}$ ist also $\langle -n\mu \rangle \circ \rho^*(H) \circ \langle n\mu \rangle(P)$ unabhängig von n für $n \gg 0$. Diesen Ausdruck nennen wir PH und haben damit die gewünschte Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ definiert. $\square$

Bezeichne $X \subset V$ das Gitter der ganzen Gewichte. Für $\lambda \in X$ definieren wir $E_\lambda \in \mathcal{P}$ durch die Formel

$$E_\lambda = \sum_{z \in W} v^{l(z)}(\lambda + zA^+).$$

Sei $\mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}$ der von allen E_λ erzeugte $\mathcal{H}$-Untermodul.

Theorem 4.3 ([Lus80a])**.**
1. *Es gibt auf $\mathcal{P}^\circ$ genau eine $\mathcal{H}$-schief lineare Involution $\mathcal{P}^\circ \to \mathcal{P}^\circ$, $P \mapsto \overline{P}$ derart, daß $\overline{E_\lambda} = E_\lambda$ für alle $\lambda \in X$.*
2. *Für alle $A \in \mathcal{A}$ gibt es genau ein (unter dieser Involution) selbstduales $\underline{P}_A \in \mathcal{P}^\circ$ mit $\underline{P}_A \in A + \sum_B v\mathbb{Z}[v]B$. Die $\underline{P}_A$ bilden eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{P}^\circ$.*

Bemerkung 4.4. Für $A, B \in \mathcal{A}$ definieren wir $p_{B,A} \in \mathbb{Z}[v]$ durch die Gleichung $\underline{P}_A = \sum p_{B,A} B$. Bezeichne $d(B, A) \in \mathbb{Z}$ die gewichtete Zahl der Spiegelebenen $H \in \mathcal{F}$, die B und A trennen, wo wir H mit Gewicht 1 bzw. Gewicht (-1) zählen falls $B \subset H^-$ bzw. $B \subset H^+$. Lusztigs Polynome $Q_{B,A}$ (siehe [Lus80a]) stehen mit unseren $p_{B,A}$ in der Beziehung $p_{B,A} = v^{-d(B,A)} Q_{B,A}$. Ich nenne die $p_{B,A}$ die "periodischen" Polynome.

Der Beweis des Theorems benötigt einige Vorbereitungen und wird erst gegen Ende dieses Abschnitts gegeben. Wir wiederholen zunächst Lusztigs Konstruktion einer Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}^\circ$.

Proposition 4.5 ([Lus80a])**.** *Für alle $w \in \mathcal{W}$ gibt es einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln $\langle w \rangle : \mathcal{P}^\circ \to \mathcal{P}^\circ$ derart, daß $\langle w \rangle E_\lambda = E_{w\lambda}$ für alle $\lambda \in X$.*

Bemerkung 4.6. Natürlich ist $\langle w \rangle$ durch diese Bedingung eindeutig bestimmt und wir erhalten so eine Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}^\circ$. Weiter ist für $w = \mu \in \mathbb{Z}R$ dies $\langle \mu \rangle$ offensichtlich die Einschränkung auf $\mathcal{P}^\circ$ unserer Verschiebung $\langle \mu \rangle$ von eben.

Beweis. Für $\alpha \in R^+$ bezeichne $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$ die Menge der Spiegelebenen, die auf α senkrecht stehen. Es ist also $\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha \in R^+} \mathcal{F}_\alpha$ eine Partition von $\mathcal{F}$. Die Zusammenhangskomponenten von $V - \bigcup_{F \in \mathcal{F}_\alpha} F$ heißen die "α-Streifen". Jeder α-Streifen U ist von der Form $U = F^+ \cap G^-$ für wohlbestimmte $F, G \in \mathcal{F}_\alpha$. Wir setzen $F = \partial^- U$ und $G = \partial^+ U$. Schließlich definieren wir für $A \in \mathcal{A}$, $\alpha \in R^+$ die Alkoven $\alpha \!\uparrow\! A = s_G A$, $\alpha \!\downarrow\! A = s_F A$, falls A im α-Streifen U liegt und $F = \partial^- U$, $G = \partial^+ U$ wie eben. Für $\alpha \in \Delta$ eine einfache Wurzel betrachten wir nun den $\mathcal{L}$-Untermodul $\mathcal{P}_\alpha \subset \mathcal{P}$, der von allen $A + v(\alpha \downarrow A)$ mit $A \in \mathcal{A}$ erzeugt wird. Sicher bilden diese Ausdrücke sogar eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{P}_\alpha$. Wir können also für alle $F \in \mathcal{F}_\alpha$ eine $\mathcal{L}$-lineare Abbildung
$$\langle s_F \rangle : \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{P}_\alpha$$
definieren durch $\langle s_F \rangle (A + v(\alpha \!\downarrow\! A)) = v(s_F A) + \alpha \!\uparrow\! (s_F A)$.

Lemma 4.7 ([Lus80a])**.** *$\mathcal{P}_\alpha$ ist ein $\mathcal{H}$-Untermodul von $\mathcal{P}$ und $\langle s_F \rangle : \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{P}_\alpha$ ist $\mathcal{H}$-linear.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für alle $A \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}$ gilt:
(i) $(A + v(\alpha \!\downarrow\! A)) C_s \in \mathcal{P}_\alpha$.
(ii) $\langle s_F \rangle \{(A + v(\alpha \!\downarrow\! A)) C_s\} = \{\langle s_F \rangle (A + v(\alpha \!\downarrow\! A))\} C_s$.

Sei U der α-Streifen von A. Sei $G \in \mathcal{F}$ die Spiegelebene, die As von A trennt. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. G ist keine Wand von U. So ist $G \in \mathcal{F}_\beta$ mit $\beta \in R^+ - \{\alpha\}$. Insbesondere gilt $s_F(G^+) = (s_F G)^+$. Man folgert leicht (i) und (ii).
2. $G = \partial^+ U$, bleibt ganz dem Leser überlassen.
3. $G = \partial^- U$, desgleichen.

Das Lemma ist bewiesen. □

Lemma 4.8 ([Lus80a])**.** *Es gilt $E_\lambda \in \mathcal{P}_\alpha$ für alle $\alpha \in \Delta$ und $\langle s_F \rangle E_\lambda = E_{s_F \lambda}$ für alle $F \in \mathcal{F}_\alpha$.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. □

Insbesondere gilt also $\mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}_\alpha$ und $\langle s_F \rangle \mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}^\circ$. Für $w \in \mathcal{W}$ finden wir dann $\langle w \rangle : \mathcal{P}^\circ \to \mathcal{P}^\circ$ wie folgt: Wir schreiben $w = s_F \cdots s_G$ mit $F, \ldots, G \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathcal{F}_\alpha$ und setzen $\langle w \rangle = \langle s_F \rangle \circ \cdots \circ \langle s_G \rangle$. □

Für das Folgende ist es wichtig zu wissen, daß wir die $\mathcal{H}$-lineare Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}^\circ$ zu einer $\mathcal{L}$-linearen Operation der "erweiterten affinen Weylgruppe" $\tilde{\mathcal{W}} = W \ltimes X$ ausdehnen können.

Für beliebiges $\mu \in X$ betrachten wir dazu die $\mathcal{L}$-lineare Abbildung $\langle \mu \rangle : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ mit $A \mapsto \mu + A \quad \forall A \in \mathcal{A}$. Sie vertauscht im Allgemeinen nicht mit der Rechtsoperation von $\mathcal{H}$. Bezeichnet C_s für einen Moment die Abbildung $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto PC_s$, so haben wir vielmehr

$$\langle \mu \rangle \circ C_s = C_{[\mu]s} \circ \langle \mu \rangle$$

für eine geeignete Permutation $[\mu] : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ der einfachen Spiegelungen, und es gilt $[\mu + \nu] = [\mu] \circ [\nu]$ für alle $\mu, \nu \in X$ sowie $[\mu] = \mathrm{id}$ für $\mu \in \mathbb{Z}R$, insbesondere also $[w\mu] = [\mu] = [-\mu]^{-1}$ für beliebiges $w \in \mathcal{W}$, $\mu \in X$.

Lemma 4.9. *Es gibt eine $\mathcal{L}$-lineare Operation $\varphi : \tilde{\mathcal{W}} \to \operatorname{Aut} \mathcal{P}^\circ$ von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{P}^\circ$ derart, daß $\varphi(w) = \langle w \rangle$ für alle $w \in \mathcal{W}$ und $\varphi(\mu) = \langle \mu \rangle$ für alle $\mu \in X$.*

Bemerkung 4.10. Sobald das Lemma bewiesen ist, werden wir für beliebiges $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ stets $\varphi(w)$ mit $\langle w \rangle$ abkürzen.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die Abbildung $\langle w \rangle \langle \mu \rangle \langle w^{-1} \rangle \langle -w\mu \rangle$ auf $\mathcal{P}^\circ$ die Identität ist, für alle $\mu \in X$, $w \in \mathcal{W}$. Diese Abbildung vertauscht aber mit der Rechtsoperation der C_s und bildet die E_λ auf sich selber ab. □

Wir können nun Teil (1) von Theorem 4.3 zeigen.

Proposition 4.11 ([Lus80a])**.** *Es gibt genau eine $\mathcal{H}$-schief lineare Abbildung $\mathcal{P}^\circ \to \mathcal{P}^\circ$, $P \mapsto \overline{P}$ derart, daß $\overline{E_\lambda} = E_\lambda \quad \forall \lambda \in X$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, wir müssen also nur eine solche Abbildung konstruieren. Sei $w_0 \in W$ das längste Element und $r = l(w_0)$ seine Länge. Bezeichne $c : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung mit $c(A) = w_0 A$. Für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt $A \succ As \Leftrightarrow w_0 A \prec w_0 As$. Folglich gilt $c(AC_s) = c(A)C_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$ und c ist sogar $\mathcal{H}$-schieflinear. Offensichtlich gilt auch $c(E_\lambda) = v^{-r} E_{w_0\lambda}$. Insbesondere folgt $c(\mathcal{P}^\circ) \subset \mathcal{P}^\circ$, wir definieren $\overline{P} = v^r c \langle w_0 \rangle P$ und sind fertig. □

Diese Dualität kommutiert auch mit der Operation von $\tilde{\mathcal{W}}$.

Proposition 4.12. *Es gilt $\overline{\langle w \rangle P} = \langle w \rangle \overline{P}$ für alle $w \in \tilde{\mathcal{W}}$, $P \in \mathcal{P}^\circ$.*

Beweis. Bezeichne $d : \mathcal{P}^\circ \to \mathcal{P}^\circ$ unsere Dualtität $P \mapsto \overline{P}$. Es gilt zu zeigen, daß $\langle w \rangle d = d \langle w \rangle$ für alle $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. Es reicht zu zeigen, daß $\langle \mu \rangle d \langle -\mu \rangle d$ bzw. $\langle w \rangle d \langle w^{-1} \rangle d$ die Identität sind, für alle $\mu \in X$ bzw. $w \in \mathcal{W}$. Diese Abbildungen vertauschen aber mit der Rechtsoperation der C_s und bilden die E_λ auf sich selber ab. □

Wir zeigen nun die Existenz der $\underline{P}_A$. Dazu betrachten wir die partielle Ordnung $\preceq$ auf $\mathcal{A}$, die von den Relationen

$$A \preceq s_F A \qquad \text{falls } A \in \mathcal{A},\ F \in \mathcal{F},\ A \subset F^-$$

erzeugt wird. Die Aussage $A \preceq B$ soll also bedeuten: Es gibt eine Folge von Alkoven $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$ und eine Folge von Spiegelebenen $F_i \in \mathcal{F}$ derart, daß $A_i \subset F_i^-$ und $A_{i+1} = s_{F_i} A_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$. Daß $\preceq$ in der Tat eine Ordnungsrelation ist, erkennt man zum Beispiel so: Man bezeichne für einen Alkoven $A \in \mathcal{A}$ mit $b(A) \in V$ ihren Schwerpunkt. So folgt aus $A \preceq B$ schon $b(A) \in b(B) + \mathbb{R}_{\leq 0} R^+$. Also folgt aus $B \preceq A \preceq B$ schon $b(A) = b(B)$ und damit $A = B$.

Offensichtlich ist unsere neue Notation mit der alten Notation $A \prec As$ für $s \in \mathcal{S}$ verträglich. Offensichtlich ist diese partielle Ordnung auf $\mathcal{A}$ auch invariant unter Verschiebung mit $\mu \in X$. Sie hat weiter folgende Eigenschaft:

Lemma 4.13 ([Lus80a]). *Seien $A, B \in \mathcal{A}$ und $s \in \mathcal{S}$. So folgt aus $B \preceq A \prec As$ schon $Bs \preceq As$.*

Beweis. Die Bruhat-Ordnung auf $\mathcal{W}$ definiert natürlich über unsere Bijektion $\mathcal{W} \to \mathcal{A}$, $w \mapsto wA^+$ auch eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{A}$. Weit im Innern von $\mathcal{C}$ stimmen nun $\preceq$ und $\leq$ überein. Das kann man genauer so formulieren:

Behauptung 4.14. Sei $\mu \in X \cap \mathcal{C}$ gegeben. Für $A, B \in \mathcal{A}$ sind gleichbedeutend:

1. $A \preceq B$.
2. $n\mu + A \leq n\mu + B$ für $n \gg 0$, d. h. für alle n ab einer geeigneten unteren Schranke, die von A, B und μ abhängt.

Diese Behauptung folgt aus der Definition der Bruhat-Ordnung. In der Tat bedeutet ja $A \leq B$ genau, daß es eine Folge von Alkoven $A = A_0,\ A_1, \dots A_n = B$ und eine Folge von Spiegelebenen $F_i \in \mathcal{F}$ gibt derart, daß $A_{i+1} = s_{F_i} A_i$ und daß A_i und A^+ nicht von F_i getrennt werden. Sind also $A, B \in \mathcal{A}^+$ und ist $F \in \mathcal{F}$ eine Hyperebene mit $B = s_F A$, so gilt

$$\begin{aligned} A \preceq B \quad &\Leftrightarrow \quad A \subset F^- \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ und } A^+ \text{ werden nicht von F getrennt} \\ &\Leftrightarrow \quad A \leq B. \end{aligned}$$

Die Äquivalenz von (1) und (2) im allgemeinen folgt leicht aus diesem speziellen Fall. Mit der Behauptung folgt aber das Lemma leicht aus der analogen Eigenschaft der Bruhat-Ordnung. □

Sei $\Pi \subset V$ die fundamentale Box

$$\Pi = \{\tau \in V \mid 0 < \langle \tau, \alpha^\vee \rangle < 1 \quad \forall \alpha \in \Delta\}.$$

Für $\lambda \in X$ schreiben wir kurz $\lambda + \Pi = \Pi_\lambda$. Für jeden Alkoven $A \in \mathcal{A}$ gibt es genau ein $\lambda = \lambda(A) \in X$ mit $A \subset \Pi_\lambda$.

Lemma 4.15. *Sei λ ein dominantes Gewicht, also $\lambda \in X \cap \overline{\mathcal{C}}$. So gilt $B \preceq \lambda + B$ für jeden Alkoven B.*

Beweis. Wir wählen $\tau \in B$ und betrachten das Geradenstück von τ nach $\lambda + \tau$. Es treffe der Reihe nach die Alkoven $B = A_0,\ A_1,\ A_2, \dots, A_n = \lambda + B$. Durch geeignete Wahl von τ können wir sicher erreichen, daß je zwei aufeinanderfolgende Alkoven unserer Folge nur von einer Wand getrennt werden, $A_{i+1} = A_i s_i$ mit $s_i \in \mathcal{S}$. Aus $\lambda \in \overline{\mathcal{C}}$ folgt nun $A_i \prec A_{i+1}$, mithin $B \preceq \lambda + B$. □

Wir können nun in Teil (2) von Theorem 4.3 die Existenz zeigen. Wir zeigen sogar etwas genauer die folgende

Proposition 4.16 ([Lus80a]). *Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gibt es ein selbstduales $\underline{P}_A \in \mathcal{P}^\circ$ derart, daß $\underline{P}_A \in A + \sum_{B \prec A} v\mathbb{Z}[v]B$ und $\langle w \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_A$ für alle $w \in \mathcal{W}_{\lambda(A)}$.*

Beweis. Natürlich reicht es aus, solche $\underline{P}_A$ für $A \subset \Pi$ zu konstruieren. Wir machen eine Induktion über die geordnete Menge aller Alkoven aus Π und können schon mal mit

$$\underline{P}_{A^+} = E_0 = \sum_{z \in W} v^{l(z)}(zA^+)$$

anfangen. Sei nun $A \subset \Pi$ ein Alkoven und seien mögliche $\underline{P}_B$ für $B \prec A$, $B \subset \Pi$ schon konstruiert. Falls $A \neq A^+$ finden wir $s \in \mathcal{S}$ mit $As \prec A$ und $As \in \Pi$. Offensichtlich ist $\underline{P}_{As}C_s$ selbstdual und wir haben nach Lemma 4.13 und der Definition von AC_s

$$\underline{P}_{As}C_s = \sum_{B \preceq A} p_B B$$

mit $p_A = 1$ und $p_B \in \mathbb{Z}[v]$ für alle B. Es könnten aber gewisse p_B mit $B \neq A$ auch noch konstante Terme haben. Um diese störenden Terme unter Kontrolle zu kriegen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Zunächst definieren wir nach [Lus80a] eine neue Operation von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{A}$, notiert $B \mapsto w * B$, durch die Vorschrift

$$w * (\lambda + A) = (w\lambda) + A$$

für alle $\lambda \in X, A \subset \Pi$.

Lemma 4.17. *Sei $P \in \mathcal{P}^\circ$ von der Form $P = \sum p_B B$ mit $p_B \in \mathbb{Z}[v]$ für alle B. Sei $w \in \tilde{\mathcal{W}}$. So ist $\langle w \rangle P = \sum q_B B$ mit $q_B \in \mathbb{Z}[v]$ und $p_B(0) = q_{w*B}(0)$ für alle B.*

Beweis. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w = s_F$ mit $F \in \mathcal{F}_\alpha$ für $\alpha \in \Delta$. Ich behaupte, daß die Aussage dann sogar für alle $P \in \mathcal{P}_\alpha$ gilt. Das hinwiederum folgt sofort aus den Definitionen. □

In unserer Situation folgern wir nun, daß $p_B(0) = p_{z*B}(0)$ für alle $z \in W$. Für jeden Alkoven B finden wir aber $z \in W$ mit $B' = z * B \in \mathcal{A}^+$. Aus $p_B \neq 0$ und $B \neq A$ folgt $p_{B'} \neq 0$ und $B' \neq A$, mithin $B' \prec A$. Aus $B' \in \mathcal{A}^+$ folgt andererseits, daß $B' = \lambda + B''$ für geeignetes $\lambda \in X \cap \overline{\mathcal{C}}$ und $B'' \subset \Pi$. Mit Lemma 4.15 folgt $B'' \prec A$, nach Induktionsannahme kennen wir also ein mögliches $\underline{P}_{B''}$, und indem wir dies $\underline{P}_{B''}$ um λ verschieben, auch ein mögliches $\underline{P}_{B'}$. Wir betrachten nun

$$\underline{P}_A = \underline{P}_{As}C_s - \sum_{B \in \mathcal{A}^+, B \neq A} p_B(0) \sum_z \langle z \rangle \underline{P}_B,$$

wo in der zweiten Summe z über (ein Repräsentantensystem für) die Nebenklassen $W/W_{\lambda(B)}$ läuft. Damit ist der Induktionsschritt geleistet und die Existenz der $\underline{P}_A$ gezeigt. □

Wir müssen nur noch die Eindeutigkeit der $\underline{P}_A$ nachweisen. Nach Proposition 4.16 wissen wir ja sogar, daß es eine Familie selbstdualer Elemente $\{\underline{P}_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ in $\mathcal{P}^\circ$ gibt mit

1. $\langle w \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_{w*A} \quad \forall A \in \mathcal{A}, w \in \tilde{\mathcal{W}}$.
2. $\underline{P}_A \in A + \sum_{B \prec A} v\mathbb{Z}[v]B$.

In der Tat kann man eine solche Familie gewinnen, indem man gewisse $\underline{P}_A$ wie in der Proposition für $A \subset \Pi$ wählt und durch Verschiebung dieser $\underline{P}_A$ die $\underline{P}_A$ für $A \not\subset \Pi$ definiert. Wir zeigen nun

Proposition 4.18 ([Lus80a]).
1. *Eine solche Familie $\{\underline{P}_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ ist schon eine $\mathcal{L}$-Basis von $\mathcal{P}^\circ$.*
2. *Für $P \in \mathcal{P}^\circ \cap \sum v\mathbb{Z}[v]B$ folgt aus $P = \overline{P}$ schon $P = 0$.*

Bemerkung 4.19. Aus (2) folgt natürlich die in Theorem 4.3 behauptete Eindeutigkeit der $\underline{P}_A$. Aus den vorhergehenden Überlegungen oder auch aus Lemma 4.17 folgt dann die Formel $\langle w \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_{w*A}$.

Beweis. Wir beginnen mit (1). Die $\underline{P}_A$ sind offensichtlich linear unabhängig. Wir müssen zeigen, daß sie $\mathcal{P}^\circ$ als $\mathcal{L}$-Modul erzeugen. Es gilt also zu zeigen, daß für alle $\lambda \in X$, $H \in \mathcal{H}$ das Element $E_\lambda H$ im Erzeugnis der $\underline{P}_A$ liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir hier $\lambda = 0$ annehmen. Sicher reicht es also, wenn wir zeigen, daß jedes W-invariante $Q \in \mathcal{P}^\circ$ (also Q mit $\langle z \rangle Q = Q \quad \forall z \in W$) im Erzeugnis der $\underline{P}_A$ liegt. Wir schreiben dazu

$$Q = \sum_{B \in \mathcal{A}} q_B B.$$

Ist $Q \neq 0$, so gibt es $B \in \mathcal{A}^+$ mit $q_B \neq 0$. (Um das zu sehen, kann man zum Beispiel das kleinste $n \in \mathbb{Z}$ mit $v^n Q \in \sum_B \mathbb{Z}[v]B$ wählen und Lemma 4.17 auf $v^n Q$ anwenden.) Wir machen nun eine Induktion über $\#\{A \in \mathcal{A}^+ \mid \exists B \in \mathcal{A}^+ \text{ mit } q_B \neq 0 \text{ und } B \succeq A\}$. Sei $C \in \mathcal{A}^+$ maximal mit $q_C \neq 0$. Wir betrachten

$$Q' = Q - \sum_z \langle z \rangle q_C \underline{P}_C,$$

wo z über (ein Repräsentantensystem für) die Nebenklassen $W/W_{\lambda(C)}$ läuft. So ist Q' wieder W-invariant, und wir wissen per Induktion, daß Q' im Erzeugnis der $\underline{P}_A$ liegt. Damit ist (1) gezeigt.

Wir zeigen nun (2). Sicher ist jedes selbstduale P von der Form $P = \sum_{A \in \mathcal{A}} c_A \underline{P}_A$ mit $\overline{c}_A = c_A$. Andererseits ist nach Annahme $P = \sum p_A A$ mit $p_A \in v\mathbb{Z}[v]$. Wäre $P \neq 0$, so gäbe es ein maximales A mit $p_A \neq 0$. Dann wäre aber $p_A = c_A$, also $\overline{p}_A = p_A$ und aus $p_A \in v\mathbb{Z}[v]$ folgte $p_A = 0$. Mit diesem Widerspruch ist die Proposition und damit auch Theorem 4.3 vollständig bewiesen. □

Die Berechnung der $p_{B,A}$ wird vereinfacht durch

Proposition 4.20 ([Lus80a]). *Sei $s \in \mathcal{S}$ mit $As \prec A$. So gilt $\underline{P}_A C_s = (v+v^{-1})\underline{P}_A$ oder, gleichbedeutend, $p_{Bs,A} = v p_{B,A}$ falls $Bs \prec B$.*

Beweis. Wir setzten $P = \underline{P}_A C_s - (v+v^{-1})\underline{P}_A$. Aus der Gleichung $C_s^2 = (v+v^{-1})C_s$ folgt $PC_s = 0$. Nach Konstruktion ist P von der Form $P = \sum p_B B$ mit $B \in \mathbb{Z}[v]$, und da P außerdem selbstdual ist, folgt $P = \sum p_B(0)\underline{P}_B$. Wäre $P \neq 0$ so gäbe es ein maximales D mit $p_D \neq 0$, und für dieses D wäre sogar $p_D = p_D(0)$ konstant. Wir schreiben nun

$$PC_s = \sum q_B B$$

und folgern $q_{Ds} = p_D \neq 0$ falls $Ds \succ D$, $q_D = p_{Ds} + v^{-1}p_D \neq 0$ falls $Ds \prec D$, im Widerspruch zu $PC_s = 0$. Also gilt $P = 0$ und die Proposition ist bewiesen. □

Ich will noch eine Symmetrie der $\underline{P}_A$ diskutieren, die wir später brauchen werden. Wie im Beweis von Proposition 4.11 sei $w_0 \in W$ das längste Element und r seine Länge. Wir definieren eine Bijektion $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A \mapsto \check{A}$ wie folgt: Wir schreiben $A = \lambda + B$ mit $\lambda \in X$, $B \subset \Pi$ und setzen $\check{A} = \lambda + w_0 B$. Die inverse Bijektion notieren wir $A \mapsto \hat{A}$.

Lemma 4.21 ([Lus80a]). $\underline{P}_A \in v^r\left(\check{A} + \sum_{B \succ \check{A}} v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]B\right)$.

Beweis. Wir dürfen $A \subset \Pi$ annehmen. Dann ist aber $\underline{P}_A = \overline{\underline{P}_A} = v^r c \langle w_0 \rangle \underline{P}_A = v^r c \underline{P}_A$, und das Lemma folgt aus der Definition von c. □

Wir werden auch die folgende Aussage über den Träger von $\underline{P}_A$ brauchen.

Proposition 4.22 ([Lus80a]). *Seien $A,\ B \in \mathcal{A}$ mit $p_{B,A} \neq 0$. So gilt $xB \preceq A \quad \forall x \in \mathcal{W}_{\lambda(A)}$.*

Beweis. Das folgt mit Induktion aus der im Beweis von Proposition 4.16 gegebenen induktiven Konstruktion der $\underline{P}_A$. □

5. Beziehungen zwischen den verschiedenen Polynomen für affine Spiegelungsgruppen

Wir übernehmen die Notationen des vorhergehenden Abschnitts und setzen $\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid s \text{ fixiert den Nullvektor}\}$. Damit haben wir auch die Notationen $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^0$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{N}^*$ etc. von Abschnitt 3 zur Verfügung. Insbesondere wird $\mathcal{W}_0 = W$ die (endliche) Weylgruppe. Die Bijektion $\mathcal{W} \to \mathcal{A}$, $w \mapsto wA^+$ induziert eine Bijektion $\mathcal{W}^0 \to \mathcal{A}^+$. Wir benutzen diese Bijektion, um unsere ausgezeichneten Elemente von $\mathcal{N}, \mathcal{M}^*$, etc. umzubenennen, und setzen $N_x = N_A$, $\underline{N}_x = \underline{N}_A$, $n_{x,y} = n_{A,B}$, $M^x = M^A$, etc. falls $x, y \in \mathcal{W}^0$ und $A, B \in \mathcal{A}^+$ mit $xA^+ = A$, $yA^+ = B$.

Bezeichnet $\mathcal{A}^{++}$ die Menge aller Alkoven, die in $\rho + \mathcal{C}$ liegen (mit ρ der Halbsumme aller positiver Wurzeln), so definiert $A \mapsto \hat{A}$ eine Bijektion $\mathcal{A}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{++}$. Ich erinnere an die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^*$ von Theorem 3.8 mit $\psi(N_A) = M^A$. Die einzige wesentliche Aussage dieser Arbeit, die ich nicht in der Literatur finden konnte, ist folgendes

Theorem 5.1. *Für alle $A \in \mathcal{A}^+$ gilt $\underline{M}^A = v^r \psi \underline{N}_{\hat{A}}$, in anderen Worten $m^{B,A} = v^r \overline{n}_{B,\hat{A}}$.*

Diese Aussage wurde von der Theorie der Kippmoduln suggeriert, wie am Schluß dieser Arbeit näher ausgeführt wird. Der Beweis des Theorems braucht einige Vorbereitungen. Wir betrachten in $\mathcal{P}$ den $\mathcal{H}$-Untermodul

$$\mathcal{P}^{sgn} = \left\{P \in \mathcal{P}^\circ \mid \langle z \rangle P = (-1)^{l(z)} P \quad \forall z \in W\right\}.$$

Proposition 5.2. *Die $\mathcal{L}$-lineare "Restriktionsabbildung" $\operatorname{res} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ mit $\operatorname{res} A = N_A$ falls $A \in \mathcal{A}^+$ und $\operatorname{res} A = 0$ sonst induziert einen Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln $\operatorname{res} : \mathcal{P}^{sgn} \to \mathcal{N}$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß res mit allen C_s $(s \in \mathcal{S})$ vertauscht. Aus der Formel für die Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathcal{P}^\circ$ sehen wir, daß für $P = \sum p_A A$ in $\mathcal{P}^{sgn}$ gilt $p_A = -v p_{As}$ falls $A \in \mathcal{A}^+$, $s \in \mathcal{S}$ mit $As \notin \mathcal{A}^+$. Die Proposition folgt. □

Wir definieren weiter die $\mathcal{H}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{alt}: & \mathcal{P}^\circ & \to & \mathcal{P}^{sgn} \\ & P & \mapsto & \displaystyle\sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle P. \end{array}$$

Unser Theorem folgt nun sofort aus der folgenden feineren Aussage:

Theorem 5.3. 1. *Für alle $A \in \mathcal{A}^{++}$ gilt $\underline{N}_A = \operatorname{res} \operatorname{alt} \underline{P}_A$.*
2. *Für alle $A \in \mathcal{A}^+$ gilt $\underline{M}^A = v^r \psi \operatorname{res} \operatorname{alt} \underline{P}_{\hat{A}}$.*

Bemerkung 5.4. Die zweite Aussage ist eine einfache Umformulierung des Hauptresultats von [Kan87] und damit eine Präzisierung der Resultate in [And86]. Denn da $\langle x \rangle \underline{P}_A = \underline{P}_{x*A}$ gilt

$$\operatorname{alt} \underline{P}_A = \sum_{x \in W} (-1)^{l(x)} \underline{P}_{x*A}.$$

Beweis. Wir beginnen mit (2) und kürzen zur Vereinfachung die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung $(v^r\psi\,\mathrm{res}\,\mathrm{alt})$ mit $\varphi : \mathcal{P}^\circ \to \mathcal{M}^*$ ab. Bezüglich $\mathcal{H}$ ist φ wie ψ eine da-lineare Abbildung. Nun wird $\underline{M}^A$ charakterisiert durch eine Grad-Bedingung und die Selbstdualität. Nach Lemma 4.21 erfüllt $\varphi(\underline{P}_{\hat{A}})$ die Grad-Bedingung. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die $\varphi(\underline{P}_{\hat{A}}) \in \mathcal{M}^*$ selbstdual sind.

Nach unseren Definitionen ist $F \in \mathcal{M}^*$ selbstdual genau dann, wenn $(\overline{H}F)(M_{A^+}) = \overline{(HF)(M_{A^+})}$ für alle $H \in \mathcal{H}$. Dieses Kriterium werden wir prüfen für alle $F = \varphi(\underline{P}_A)$ mit $A \in \mathcal{A}$. Sicher können wir schreiben $\underline{P}_A H = \sum c_B \underline{P}_B$ und folgern $\underline{P}_A\overline{H} = \sum \overline{c}_B \underline{P}_B$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}(da(H)\varphi(\underline{P}_A))(M_{A^+}) &= \sum \overline{c}_B \varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+}),\\ (a(H)\varphi(\underline{P}_A))(M_{A^+}) &= \sum c_B \varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+}),\end{aligned}$$

und wir müssen folglich nur zeigen, daß alle $\varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+})$ unter der Substitution $v \mapsto v^{-1}$ invariant sind. Ich behaupte viel stärker die Formel

$$\varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+}) = \begin{cases}(-1)^{l(z)} & \text{falls } B = z * \widehat{A^+} \text{ mit } z \in W;\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Um das einzusehen betrachten wir nochmal die $\underline{P}_B = \sum p_{C,B} C$ und zeigen

Lemma 5.5. *Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $p_{A^+,B} \neq 0$. So ist entweder $B = \widehat{A^+}$ oder $\lambda(B)$ liegt auf einer Spiegelebene von W.*

Beweis. Um neue Notationen zu vermeiden zeigen wir die äquivalente Aussage, daß für $B \subset \Pi$ und $\lambda \in X$ aus $p_{\lambda+A^+,B} \neq 0$ und $\lambda \neq -\rho$ schon folgt $W_\lambda \neq 1$. (Hier ist $\rho \in X$ wie üblich die Halbsumme der positiven Wurzeln.) In der Tat betrachten wir das $x \in W$ mit $x(\lambda + A^+) \subset \mathcal{C}$ und erhalten mit Proposition 4.22 und der Definition von Π die Beziehungen

$$x(\lambda + A^+) \preceq B \preceq \rho + w_0 A^+.$$

Für einen Alkoven $C \in \mathcal{C}$ mit $C \preceq \rho + w_0 A^+$ ist aber klar, daß entweder alle seine Ecken aus X auf Wänden der dominanten Weylkammer liegen oder $C = \rho + w_0 A^+$. Das heißt für uns, entweder gilt $W_{x\lambda} \neq 1$ und mithin $W_\lambda \neq 1$ oder $\lambda = -\rho$, $x = w_0$. □

Unsere Formel für $\varphi(\underline{P}_B)(M_{A^+})$ ergibt sich nun aus der Beobachtung, daß $\mathrm{alt}(\underline{P}_B) = 0$ und erst recht $\varphi(\underline{P}_B) = 0$ falls $\lambda(B)$ auf einer Spiegelebene von W liegt. Damit ist (2) gezeigt.

Wir nehmen nun (1) in Angriff. Sei $\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$ der von $v + v^{-1}$ und allen C_s mit $s \in \mathcal{S}$ erzeugte Teilring. Nach Proposition 3.3 gilt $\mathcal{H}^+ = \{H \in \mathcal{H} \mid \overline{H} = H\}$. Wir werden jedoch nur die offensichtliche Inklusion $\subset$ benötigen. Der Beweis von (1) benutzt folgendes

Lemma 5.6. *Alle $\underline{M}^A$ liegen in dem von $\underline{M}^{\rho+w_0A^+}$ erzeugten $\mathcal{H}^+$-Untermodul von $\mathcal{M}^*$.*

Beweis. Zunächst mal folgt aus (2), daß $m^{\hat{A},A} = v^r$ und $\deg_v m^{B,A} < r$, falls $B \neq \hat{A}$. Wir betrachten weiter $A \in \mathcal{A}^+$, $s \in \mathcal{S}$ mit $As \prec A$ (aber nicht notwendig $As \in \mathcal{A}^+$) und schreiben

$$a(C_s)\underline{M}^A = \sum q_B M^B.$$

Nach Theorem 3.8 wissen wir, daß

$$a(C_s)M^B = \begin{cases} M^{Bs} + v^{-1}M^B, & \text{falls } Bs \in \mathcal{A}^+, \quad Bs \succ B; \\ M^{Bs} + vM^B, & \text{falls } Bs \in \mathcal{A}^+, \quad Bs \prec B; \\ 0 & \text{falls } Bs \notin \mathcal{A}^+. \end{cases}$$

Es ist also $q_B \in \mathbb{Z}[v]$ für alle $B \in \mathcal{A}^+$ und wir folgern

$$a(C_s)\underline{M}^A = \sum q_B(0)\underline{M}^B.$$

In der Tat läßt sich jedes Element von $\mathcal{M}^*$ eindeutig als formale $\mathcal{L}$-Linearkombination der $\underline{M}^B$ schreiben, bei einem selbstdualen Element sind dann alle Koeffizienten selbstdual, und bei einem Element aus $\sum^\infty \mathbb{Z}[v]M^B$ liegen alle Koeffizienten in $\mathbb{Z}[v]$. Ist also $\sum^\infty q_B M^B$ selbstdual und liegen alle q_B in $\mathbb{Z}[v]$, so gilt ganz allgemein

$$\sum^\infty q_B M^B = \sum^\infty q_B(0)\underline{M}^B.$$

Ich bezeichne nun für $q \in \mathcal{L}$ mit $\hat{q}(\nu)$ den Koeffizient von v^ν, also $q = \sum_\nu \hat{q}(\nu)v^\nu$ und $\hat{q}(0) = q(0)$. Wir folgern weiter $\hat{q}_{\check{B}}(r) = q_B(0)$ für alle $B \in \mathcal{A}^+$ und $\hat{q}_B(r) = 0$ falls $B \notin \mathcal{A}^{++}$. Es ergibt sich also

$$a(C_s)\underline{M}^A = \sum \hat{q}_B(r)\underline{M}^{\check{B}}.$$

Ausgedrückt in anderen Variablen haben wir damit folgendes bewiesen: Sind $D \in \mathcal{A}^{++}$ und $s \in \mathcal{S}$ gegeben mit $Ds \succ D$, und schreiben wir

$$a(C_s)\underline{M}^{\check{D}} = \sum_{B \in \mathcal{A}^+} q_B M^B,$$

so gilt

$$a(C_s)\underline{M}^{\check{D}} = \sum_{B \in \mathcal{A}^{++}} \hat{q}_B(r)\underline{M}^{\check{B}}.$$

Andererseits wissen wir aber nach (2) auch, daß $m^{B,\check{D}} \neq 0 \Rightarrow B \preceq D$ und $m^{D,\check{D}} = v^r$ für alle $D \in \mathcal{A}^{++}$. Wir erhalten also genauer

$$a(C_s)\underline{M}^{\check{D}} = \underline{M}^{(Ds)^\vee} + \sum_{\substack{B \in \mathcal{A}^{++} \\ B \prec Ds}} \hat{q}_B(r)\underline{M}^{\check{B}}.$$

Ausgehend von dieser Formel zeigt man dann leicht durch Induktion über $\mathcal{A}^{++}$, daß alle $\underline{M}^{\check{A}}$ mit $A \in \mathcal{A}^{++}$ in dem von $\underline{M}^{(\rho+A^+)^\vee}$ erzeugten $\mathcal{H}^+$-Untermodul von $\mathcal{M}^*$ liegen. □

Um (1) zu zeigen brauchen wir noch

Lemma 5.7. $\underline{N}_{\rho+A^+} = \sum_{z \in W} v^{l(z)} N_{\rho+zA^+}$.

Beweis. Man betrachte allgemeiner für alle $\lambda \in (\rho + \mathbb{Z}R) \cap \mathcal{C}$ den Ausdruck $F_\lambda = \sum_{z \in W} v^{l(z)} N_{\lambda+zA^+}$. Es gilt zu zeigen, daß $\underline{N}_{\rho+A^+} = F_\rho$. Sicher reicht es, wenn wir $F_\rho = \overline{F_\rho}$ nachweisen. Dazu betrachten wir die Menge

$$\mathcal{S}_\rho = \{s \in \mathcal{S} \mid \rho \in \overline{A} \Rightarrow \rho \in \overline{As} \quad \forall A \in \mathcal{A}\},$$

wo ausnahmsweise mit $\overline{A}$ bzw. $\overline{As}$ der Abschluß von A bzw. As gemeint ist. Wir zeigen nun, daß $F_\rho \in \mathcal{N}$ das einzige Element $F = \sum f_A N_A$ von $\mathcal{N}$ ist derart, daß

1. $FC_s = (v + v^{-1})F \quad \forall s \in \mathcal{S}_\rho$,
2. $f_A \neq 0 \Rightarrow A \leqslant \rho + A^+$,

3. $f_A = 1$ für $A = \rho + A^+$.

Hier bezeichnet $\leqslant$ die Ordnung auf $\mathcal{A}^+$, die sich durch Übertragung der Bruhat-Ordnung von $\mathcal{W}^0$ ergibt.

Zunächst erkennt man sehr schnell, daß Bedingung (1) genau von allen $\mathcal{L}$-Linearkombinationen der F_λ mit $\lambda \in (\rho + \mathbb{Z}R) \cap \mathcal{C}$ erfüllt wird. Damit ist dann klar, daß nur F_ρ den Bedingungen (1)–(3) genügt. Nun sind diese Bedingungen aber selbstdual, d. h. sie werden auch von $\overline{F_\rho}$ erfüllt, und wir folgern $\overline{F_\rho} = F_\rho$. □

Nun liegen nach Lemma 5.6 alle $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_A)$ in dem von $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_{\rho+A^+})$ erzeugten $\mathcal{H}^+$-Untermodul von $\mathcal{N}$, und $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_{\rho+A^+})$ ist nach Lemma 5.7 selbstdual in $\mathcal{N}$. Dann sind aber alle $(\operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_A)$ selbstdual in $\mathcal{N}$, und da sie offensichtlich auch dieselben Grad-Bedingungen erfüllen wie $\underline{N}_A$, so folgt schließlich $\underline{N}_A = \operatorname{res}\operatorname{alt}\underline{P}_A$ $\forall A \in \mathcal{A}^{++}$. □

6. Die generischen Polynome

Wenn wir weit genug im Inneren der dominanten Weylkammer sind, so hängen die $m_{B,A}$ nur von der relativen Position der Alkoven A und B ab. Genauer zeigen wir

Theorem 6.1 ([Lus80a]). 1. *Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gibt es $q_{B,A} \in \mathbb{Z}[v]$ derart, daß $q_{B,A} = m_{\lambda+B,\lambda+A}$, falls λ hinreichend weit im Inneren der dominanten Weylkammer liegt, das heißt falls $\lambda \in X \cap (n\rho + \mathcal{C})$ für geeignetes $n = n(A,B) \in \mathbb{Z}$.*

2. *Für die periodischen Polynome $p_{B,C}$ gelten die Inversionsformeln*

$$\sum_B (-1)^{d(A,B)} q_{w_0 B, w_0 A}\, p_{B,C} = \delta_{A,C},$$

wo $(-1)^{d(A,B)}$ die Parität der Zahl von affinen Spiegelebenen bezeichnet, die A und B trennen.

Bemerkung 6.2. Die "generischen Kazhdan-Lusztig-Polynome" $\hat{P}_{A,B}$ in [Kat85] stehen mit den $q_{A,B}$ in der Beziehung $\hat{P}_{A,B} = v^{-d(A,B)} q_{A,B}$.

Um das Theorem zu beweisen arbeiten wir im "nach unten vervollständigten" Hecke-Modul

$$\hat{\mathcal{P}} = \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{L} \mid \text{Es gibt } C \in \mathcal{A} \text{ so daß } f(A) \neq 0 \Rightarrow A \preceq C\}.$$

Für je zwei C_1, $C_2 \in \mathcal{A}$ gibt es $C \in \mathcal{A}$ mit $C_1 \preceq C$, $C_2 \preceq C$. Also ist $\hat{\mathcal{P}}$ ein $\mathcal{L}$-Untermodul im Raum aller Funktionen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{L}$. Wir schreiben Elemente von $f \in \hat{\mathcal{P}}$ als formale Linearkombinationen $f = \sum^\infty f_A A$ mit $f_A = f(A)$, wo wieder der obere Index ∞ uns daran erinnern soll, daß wir auch gewisse unendliche formale Linearkombinationen zulassen. Unsere Rechtsoperation von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{P}$ setzen wir in der offensichtlichen Weise nach $\hat{\mathcal{P}}$ fort. Für $\lambda \in \mathbb{Z}R$ können wir auch $\langle\lambda\rangle : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ in offensichtlicher Weise zu $\langle\lambda\rangle : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}$ fortsetzen. Für $\alpha \in R^+$ definieren wir einen Operator

$$\vartheta_\alpha : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}$$

als die formale Summe

$$\vartheta_\alpha = (1 + v^2\langle -\alpha\rangle + v^4\langle -2\alpha\rangle + v^6\langle -3\alpha\rangle + \cdots).$$

Offensichtlich vertauscht ϑ_α mit der Rechtsoperation von $\mathcal{H}$. Ebenso offensichtlich vertauschen die ϑ_α untereinander. Wir definieren

$$\eta = \prod_{\alpha \in R^+} \vartheta_\alpha : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}.$$

Dies η ist ein enger Verwandter von Kostants Partitionsfunktion. Es liefert uns eine weitere Beziehung zwischen den periodischen und den generischen Polynomen, nämlich das folgende

Theorem 6.3 ([Kat85]). $\eta \underline{P}_A = \sum_B q_{B,A} B$.

Beweis. Wird nachgeholt. □

Schließlich können wir uns noch fragen, ob man nicht auch alternative periodische Polynome definieren könnte, indem man in der Definition von $\underline{P}_A$ die Rollen von v und v^{-1} vertauscht. Man stellt fest, daß es die so definierten $\underline{\tilde{P}}_A$ erst in $\hat{\mathcal{P}}$ gibt. Genauer setzen wir unsere $\mathcal{H}$-schieflineare Dualität $P \mapsto \overline{P}$ wie folgt auf $\hat{\mathcal{P}}$ fort: Wir schreiben $P \in \hat{\mathcal{P}}$ in eindeutiger Weise als formale Summe $P = \sum_A^\infty p_A \underline{P}_A$ mit $p_A \in \mathcal{L}$, wo wir mit den höchsten Alkoven beginnen, in denen P lebt, und uns von dort nach unten hangeln. Dann definieren wir schlicht $\overline{P} = \sum_A^\infty \overline{p}_A \underline{P}_A$. Man erkennt mühelos, daß $\overline{A} \in A + \sum_{B \prec A}^\infty \mathcal{L} B$ für $A \in \mathcal{A}$.

Theorem 6.4.
1. *$\underline{P}_A$ ist das einzige selbstduale Element von $\hat{P}$, das in $A + \sum_B^\infty v\mathbb{Z}[v]B$ liegt.*
2. *$\underline{\tilde{P}}_A = \sum (-1)^{d(A,B)} \overline{q}_{B,A} B$ ist das einzige selbstduale Element von $\hat{\mathcal{P}}$, das in $A + \sum_B^\infty v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]B$ liegt.*

Bemerkung 6.5. Hier kommt (1) aus [Lus80a] und (2) aus [Kat85].

Wir machen uns nun daran, die drei vorangegangenen Theoreme zu beweisen. Bezeichne $\mathrm{Alt} = \langle -\rho \rangle \circ \mathrm{alt} \circ \langle \rho \rangle : \mathcal{P}^\circ \to \mathcal{P}^\circ$ die Antisymmetrisierung um $-\rho$, also

$$\mathrm{Alt}(P) = \sum_{x \in \mathcal{W}_{-\rho}} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle P.$$

Weiter definieren wir die $\mathcal{L}$-lineare Restriktion

$$\begin{array}{rlcl} \mathrm{Res}: & \hat{\mathcal{P}} & \to & \mathcal{M} \\ & \sum_A^\infty f_A A & \mapsto & \sum_{A \in \mathcal{A}^+} f_A M_A. \end{array}$$

Sie ist nicht mit der Operation von $\mathcal{H}$ verträglich. Es gilt aber

Proposition 6.6. *Die Verknüpfung* $\mathrm{Res} \circ \eta \circ \mathrm{Alt} : \mathcal{P}^\circ \to \mathcal{M}$ *ist ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Rechtsmoduln.*

Beweis. Es reicht sicher zu zeigen, daß diese Abbildung mit allen C_s kommutiert. Das folgt mit unseren Definitionen mühelos aus folgender

Behauptung 6.7. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ benachbarte Alkoven mit $A \in \mathcal{A}^+$, $B \notin \mathcal{A}^+$. So gilt für $f = \sum^\infty f_C C \in \eta \circ \mathrm{Alt}(\mathcal{P}^\circ)$ schon $f_B = v f_A$.

Wir zeigen also diese Behauptung. Unsere Annahme besagt ja, daß A und B sich längs einer Wand der dominanten Weylkammer berühren. Sei $\beta \in \Delta$ die zu dieser Wand gehörige einfache Wurzel. Unter einer β-Kette in $\mathcal{A}$ verstehen wir eine minimale nichtleere Teilmenge, die mit einem Alkoven A auch $\beta \uparrow A$ und $\beta \downarrow A$ enthält. Nun betrachten wir in $\hat{\mathcal{P}}$ den $\mathcal{H}$-Untermodul

$$\hat{\mathcal{P}}_\beta = \{\sum_{A \in \mathcal{A}}^{\infty} f_A A \in \hat{\mathcal{P}} \mid \text{Für jede } \beta\text{-Kette } \mathcal{K} \subset \mathcal{A} \text{ gilt } \sum_{A \in \mathcal{K}}^{\infty} f_A A \in \mathcal{P}_\beta\}.$$

Sicher gilt $\vartheta_\alpha \hat{\mathcal{P}}_\beta \subset \hat{\mathcal{P}}_\beta$ für $\alpha \in R^+$, $\alpha \neq \beta$. Bezeichne $\tilde{s_\beta} \in \mathcal{W}_{-\rho}$ die Spiegelung an der β-Wand durch $(-\rho)$. So läßt sich $\langle \tilde{s_\beta} \rangle : \mathcal{P}_\beta \to \mathcal{P}_\beta$ in offensichtlicher Weise zu $\langle \tilde{s_\beta} \rangle : \hat{\mathcal{P}}_\beta \to \hat{\mathcal{P}}_\beta$ fortsetzen, und wir haben $\langle \tilde{s_\beta} \rangle \circ \vartheta_\alpha = \vartheta_{s_\beta(\alpha)} \circ \langle \tilde{s_\beta} \rangle$ für alle $\alpha \in R^+$, $\alpha \neq \beta$. Nun wählen wir ein Repräsentantensystem $\mathrm{Rep} \subset \mathcal{W}_{-\rho}$ für die Nebenklassen $\{e, \tilde{s_\beta}\} \backslash \mathcal{W}_{-\rho}$ und können schreiben

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} \circ \eta \circ \mathrm{Alt} &= \mathrm{Res} \circ \prod_{\alpha \in R^+} \vartheta_\alpha \circ (1 - \langle \tilde{s_\beta} \rangle) \prod_{x \in \mathrm{Rep}} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle \\ &= \mathrm{Res} \circ \vartheta_\beta \circ (1 - \langle \tilde{s_\beta} \rangle) \prod_{\substack{\alpha \in R^+ \\ \alpha \neq \beta}} \vartheta_\alpha \prod_{x \in \mathrm{Rep}} (-1)^{l(x)} \langle x \rangle. \end{aligned}$$

So ist unsere Behauptung von oben zurückgeführt auf die viel einfachere

Behauptung 6.8. Seien A, $B \in \mathcal{A}$ benachbarte Alkoven, die nur von der β-Wand der dominanten Weylkammer getrennt werden. Liegt A oberhalb dieser Wand, so gilt für alle $f = \sum^\infty f_C C \in \vartheta_\beta (1 - \langle \tilde{s_\beta} \rangle) \hat{\mathcal{P}}_\beta$ schon $f_B = v f_A$.

Diese Behauptung kann man auf jeder β-Kette separat prüfen, und damit müssen wir die Behauptung nur für

$$f = \vartheta_\beta (1 - \langle \tilde{s_\beta} \rangle)(A + v(\beta \downarrow A))$$

mit $A \in \mathcal{A}$ zeigen. In diesem Fall folgt sie aber explizit aus unseren Definitionen. □

Korollar 6.9. $\underline{M}_A = \mathrm{Res} \circ \eta \circ \mathrm{Alt}\, \underline{P}_A$ *für alle* $A \in \mathcal{A}^+$.

Bemerkung 6.10. Diese Formel ist Theorem 4.2 von Kato [Kat85]. Man beachte, daß $\mathrm{Alt}\, \underline{P}_A = \sum_{x \in \mathcal{W}_{-\rho}} (-1)^{l(x)} \langle x \lambda(A) \rangle \underline{P}_A$ und folglich

$$\eta\, \mathrm{Alt}\, \underline{P}_A = \sum_{x \in \mathcal{W}_{-\rho}} (-1)^{l(x)} \langle x \lambda(A) \rangle \eta \underline{P}_A.$$

Aus dem Korollar folgt also insbesondere Teil (1) von Theorem 6.1 (in dem die generischen Polynome $q_{B,A}$ definiert werden) sowie Theorem 6.3.

Beweis. Für $A = A^+$ sind beide Seiten $M_{A^+} = \underline{M}_{A^+}$ und die Formel ist klar. Nun wissen wir aber schon nach Theorem 5.3 und Lemma 5.6, daß $\mathrm{Alt}\, \underline{P}_A \in (\mathrm{Alt}\, \underline{P}_{A^+})\mathcal{H}^+$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Damit folgt, daß

$$\mathrm{Res} \circ \eta \circ \mathrm{Alt}\, \underline{P}_A \in \underline{M}_{A^+} \mathcal{H}^+$$

selbstdual ist für alle $A \in \mathcal{A}$. Andererseits gilt offensichtlich

$$\mathrm{Res} \circ \eta \circ \mathrm{Alt}\, \underline{P}_A \in M_A + \sum_B v\mathbb{Z}[v] M_B$$

für alle $A \in \mathcal{A}^+$ und das Korollar ist bewiesen. □

Wir zeigen nun Theorem 6.4.

Beweis. Wir überlassen hier alles dem Leser bis auf den Nachweis, daß die für $\underline{\tilde{P}}_A$ behauptete Formel in der Tat ein selbstduales Element von $\hat{\mathcal{P}}$ definiert. Bezeichne $\xi : \hat{\mathcal{P}} \to \hat{\mathcal{P}}$ die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung mit $\xi(\sum_A^\infty p_A A) = \sum_A^\infty (-1)^{d(A^+,A)} \overline{p}_A A$. Es gilt zu zeigen, daß $\xi\eta\underline{P}_A \in \hat{\mathcal{P}}$ selbstdual ist. Wir führen diesen Beweis durch Widerspruch. Wir schreiben also

$$\xi\eta\underline{P}_A - \overline{\xi\eta\underline{P}_A} = \sum^\infty f_C C$$

und wählen $B \in \mathcal{A}$ mit $f_B \neq 0$. Indem wir das Paar (A, B) hinreichend weit in die positive Weylkammer verschieben, dürfen wir annehmen, daß $\eta \operatorname{Alt} \underline{P}_A$ und $\eta\underline{P}_A$ auf allen Alkoven C mit $C \succeq B$ übereinstimmen. Nach Korollar 6.9 stimmt auf diesen Alkoven also auch $\operatorname{Res} \eta\underline{P}_A$ überein mit $\underline{M}_A$ und $\operatorname{res} \xi\eta\underline{P}_A$ mit $\phi^{-1}\underline{M}_A$, wo ϕ wie in Abschnitt 3 die $\mathcal{L}$-schieflineare Abbildung $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ mit $\phi(N_x) = (-1)^{l(x)} M_x$ bezeichnet und wir unser altes $\operatorname{res} : \mathcal{P} \to \mathcal{N}$ in der offensichtlichen Weise nach $\hat{\mathcal{P}}$ erweitert haben.

Nun kennen wir aber nach Theorem 5.3 die Formel $\underline{N}_D = \operatorname{res} \operatorname{alt} \underline{P}_D$ für $D \in \mathcal{A}^{++}$, insbesondere gilt $\underline{N}_D = \operatorname{res} \underline{P}_D$ für alle $D \subset \mathcal{C}$, die hinreichend fern von allen Wänden der dominanten Weylkammer liegen. Indem wir das Paar (A, B) unter Umständen noch weiter in die dominante Weylkammer hineinschieben, dürfen wir zusätzlich annehmen, daß alle Alkoven C mit $A \succeq C \succeq B$ schon so fern von allen Wänden liegen, daß $\underline{N}_C = \operatorname{res} \underline{P}_C$. Schreiben wir nun

$$\begin{aligned} \xi\eta\underline{P}_A &= \sum_C^\infty p_C \underline{P}_C, \\ \phi^{-1}\underline{M}_A &= \sum n_C \underline{N}_C, \end{aligned}$$

so folgt $p_C = n_C$ für $A \succeq C \succeq B$. Da aber $\phi^{-1}\underline{M}_A = \pm\underline{\tilde{N}}_A$ selbstdual ist (nach dem Schluß vom Beweis des Theorems 3.5), müssen alle n_C selbstdual sein, damit auch alle p_C für $A \succeq C \succeq B$, und daraus folgt schließlich der gewünschte Widerspruch $f_B = 0$. □

Zum Abschluß zeigen wir noch Teil (2) von Theorem 6.1.

Beweis. Wir beginnen mit der nahezu tautologischen Formel

$$\sum_B (-1)^{d(A,B)} m_{B,A} m^{B,C} = \delta_{A,C}.$$

Liegt das Paar (C, A) hinreichend weit im Inneren der dominanten Weylkammer, so gilt $m_{B,A} = q_{B,A}$ für alle $B \succeq C$, also alle B mit $m^{B,C} \neq 0$. Andererseits gilt dann auch $m^{B,C} = v^r \overline{p}_{B,\hat{C}} = p_{w_0 B, w_0 C}$, die erste Gleichung nach Theorem 5.3, die letzte Gleichung da $\underline{P}_{\hat{C}}$ selbstdual ist, da also nach Konstruktion der Dualität auf $\mathcal{P}^\circ$ gilt $\underline{P}_{\hat{C}} = v^r c\langle w_0 \rangle \underline{P}_{\hat{C}} = v^r c \underline{P}_{w_0 C}$, wo wir $w_0 * \hat{C} = w_0 C$ verwandt haben. □

Damit sind alle drei Theoreme dieses Abschnitts vollständig bewiesen.

7. Beziehung zu Kippmoduln

Sei h die Coxeter-Zahl unseres Wurzelsystems R und $l \geqslant h$ ungerade. Für eine primitive l-te Einheitswurzel ζ bildet man nach Lusztig die Quantengruppe mit dividierten Potenzen U_ζ. Sei U_ζ-mof die Kategorie aller endlichdimensionalen

Darstellungen von U_ζ, und sei $\mathcal{B} \subset U_\zeta$-mof der “Hauptblock”, d. h. der kleinste Summand, der die triviale Darstellung enthält. $\mathcal{B}$ ist eine k-Kategorie für $k = \mathbb{Q}(\zeta)$.

Die einfachen Objekte von $\mathcal{B}$ sind in natürlicher Weise parametrisiert durch die Alkoven in der dominanten Weylkammer $\mathcal{A}^+$. Zu $A \in \mathcal{A}^+$ bezeichne $L_A \in \mathcal{B}$ das zugehörige einfache Objekt. L_A ist der Sockel bzw. der eindeutig bestimmte einfache Quotient der Standard-Moduln ∇_A bzw. Δ_A. Zum Beispiel ist $L_{A^+} = \nabla_{A^+} = \Delta_{A^+} = k$ die triviale Darstellung. In $\mathcal{B}$ gibt es genügend projektive Objekte. Die projektive Decke von L_A bezeichne ich mit P_A. Unter einer ∇-Fahne (bzw. Δ-Fahne) eines Objekts von $\mathcal{B}$ versteht man eine Filtrierung, bei der alle Subquotienten die Form ∇_A bzw. Δ_A haben, für geeignete $A \in \mathcal{A}^+$.

Definition 7.1. Ein Objekt $T \in \mathcal{B}$ heißt “Kippmodul” genau dann, wenn T sowohl eine ∇-Filtrierung als auch eine Δ-Filtrierung besitzt.

Ich wiederhole nun ohne Beweis einige Tatsachen aus der Theorie der Kippmoduln. Als Standard-Referenz für den völlig analogen Fall der Darstellungen algebraischer Gruppen in positiver Charakteristik vergleiche man [Don93]. Zunächst ist jeder Summand eines Kippmoduls selbst ein Kippmodul. Des weiteren gibt es für jedes $A \in \mathcal{A}^+$ genau einen unzerlegbaren Kippmodul T_A, der eine Δ-Fahne besitzt, die mit $\Delta_A \subset T_A$ beginnt. Die Eindeutigkeit folgt hier recht schnell aus folgender Eigenschaft der Standardobjekte:

$$\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{B}}(\Delta_A, \nabla_B) = \begin{cases} k & \text{falls } A = B \text{ und } n = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann auf $\mathcal{B}$ eine Dualität einführen, d.h. einen involutiven exakten kontravarianten k-Funktor $d : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, der die einfachen Isomorphieklassen erhält und die Standardobjekte vertauscht, $d\Delta_A \cong \nabla_A$. Es ist bekannt, daß die Kippmoduln unter einer solchen Dualität selbstdual sind, also $dT_A \cong T_A$. Insbesondere ist T_A auch der einzige unzerlegbare Kippmodul, der eine ∇-Fahne besitzt, die mit $T_A \twoheadrightarrow \nabla_A$ endet.

Die vorliegende Arbeit ist motiviert durch das Problem, die Multiplizität $(T_A : \nabla_B)$ zu bestimmen, mit der der Standardmodul ∇_B als Subquotient in einer ∇-Fahne von T_A auftritt. Dazu habe ich folgende

Vermutung 7.2. $(T_A : \nabla_B) = n_{B,A}(1)$.

Bemerkungen 7.3.
1. Ich habe mittlerweile einen Beweis für diese Vermutung gefunden. Er ist allerdings sehr weit entfernt vom unten geschilderten Grund für die Vermutung. Eine Interpretation für die Koeffizienten der $n_{B,A}$ hat auch Andersen in [And96] vorgeschlagen.
2. Aus der Vermutung folgen auch Charakterformeln für die unzerlegbaren Kipp-Moduln “auf den Wänden”. Genauer zeigen wir, daß für einen unzerlegbaren Kipp-Modul T auf Wänden und Ψ die Verschiebung aus allen Wänden auch ΨT unzerlegbar ist.

   Bezeichne dazu Φ die Verschiebung auf die Wände, d.h. den zu Ψ adjungierten Funktor. Seien $A(1), \ldots, A(r)$ die Alkoven, in deren Abschluß das höchste Gewicht von T liegt. So ist $\Phi\Psi T \cong T \oplus \ldots \oplus T$ (r Kopien), da beide Seiten Kipp-Moduln sind und die Charaktere übereinstimmen. Daraus folgt schon mal, daß nur die $T_{A(i)}$ als unzerlegbare Summanden von ΨT in Frage kommen.

Sei nun $A(1)$ die größte Alkove unter den $A(i)$. Da wir das höchste Gewicht von ΨT kennen, wissen wir auch, daß $T_{A(1)}$ als Summand in ΨT vorkommen muß. Schließlich folgt mit Bemerkung 3.2 (4) aus obiger Vermutung, daß $(T_{A(1)} : \nabla_{A(i)}) = 1$ für $i = 1, \dots, r$. Andererseits gilt auch $(\Psi T : \nabla_{A(i)}) = 1$ für $i = 1, \dots, r$. Deshalb ist in ΨT für andere Summanden $T_{A(i)}$ kein Platz mehr, und wir erhalten $\Psi T \cong T_{A(1)}$.

Die meisten unzerlegbaren Kippmoduln sind ja bereits projektiv, genauer gilt $P_A \cong T_{\hat{A}}$ nach [And92], 5.8. Für die projektiven Objekte werden die fraglichen Multiplizitäten schon durch die Reziprozitätsformel $(P_A : \nabla_B) = [\nabla_B : L_A]$ gegeben. Die Lusztig-Vermutung besagt aber, daß in der Grothendieck-Gruppe von $\mathcal{B}$ die Gleichung

$$L_A = \sum_B (-1)^{d(B,A)} m_{B,A}(1) \nabla_B$$

gilt. (Man verwendet Proposition 3.4, um zu sehen, daß diese Vermutung in der Tat mit der von Lusztig in [Lus80b] formulierten Vermutung übereinstimmt.) Wir können diese Gleichung invertieren und erhalten

$$\sum_A m^{C,A}(1) L_A = \nabla_C.$$

Aus der Lusztig-Vermutung folgt damit $(P_A : \nabla_B) = m^{B,A}(1)$. Als ersten Test unserer Vermutung gilt es also, die Formel $m^{B,A}(1) = n_{B,\hat{A}}(1)$ zu zeigen. Das ist eine leichte Konsequenz aus Theorem 5.1.

Die eigentliche Motivation für obige Vermutung kommt aber aus der Philosophie der "$\mathbb{Z}$-graduierten Darstellungskategorie", wie ich im Folgenden kurz darlegen will. Man kann hoffen, daß die Kategorie $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Version $\tilde{\mathcal{B}}$ im Sinne von [BGS96], 4.3 besitzt. Die ∇_A, Δ_A, L_A sollten dann $\mathbb{Z}$-graduierte Versionen $\tilde{\nabla}_A, \tilde{\Delta}_A, \tilde{L}_A \in \tilde{\mathcal{B}}$ besitzen, es sollte auf $\tilde{\mathcal{B}}$ eine "Verschiebung der $\mathbb{Z}$-Graduierung" $M \mapsto M\langle i \rangle$ geben (für $i \in \mathbb{Z}$), die Dualität sollte zu einer Dualität $\tilde{d} : \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ liften mit $\tilde{d}(M\langle i \rangle) = (\tilde{d}M)\langle -i \rangle$, $\tilde{d}(\tilde{\nabla}_A) = \tilde{\Delta}_A$, und wir hätten feiner als zuvor

$$\operatorname{Ext}^n_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{\Delta}_A, \tilde{\nabla}_B\langle i \rangle) = \begin{cases} k & \text{falls } A = B \text{ und } i = n = 0; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter liefert jedes $s \in \mathcal{S}$ einen exakten Funktor $\Theta_s : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, die sogenannte "Verschiebung durch die Wand". Er vertauscht mit der Dualität $\Theta_s d = d\Theta_s$ und ist einfach zu berechnen auf den Standardmoduln: Für $A \in \mathcal{A}^+$ gibt es kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccl} \nabla_A & \hookrightarrow & \Theta_s \nabla_A \twoheadrightarrow & \nabla_{As} & \text{falls } As \succ A,\ As \in \mathcal{A}^+; \\ \nabla_{As} & \hookrightarrow & \Theta_s \nabla_A \twoheadrightarrow & \nabla_A & \text{falls } As \prec A,\ As \in \mathcal{A}^+, \end{array}$$

und es gilt $\Theta_s \nabla_A = 0$ falls $As \notin \mathcal{A}^+$.

Man kann nun hoffen, daß auch Θ_s eine graduierte Version $\tilde{\Theta}_s : \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ besitzt, die mit $\tilde{d}$ kommutiert und so beschaffen ist, daß wir wieder für $A \in \mathcal{A}^+$ kurze exakte Sequenzen

$$\begin{array}{ccccl} \tilde{\nabla}_A\langle 1 \rangle & \hookrightarrow & \tilde{\Theta}_s \tilde{\nabla}_A \twoheadrightarrow & \tilde{\nabla}_{As} & \text{falls } As \succ A,\ As \in \mathcal{A}^+; \\ \tilde{\nabla}_{As} & \hookrightarrow & \tilde{\Theta}_s \tilde{\nabla}_A \twoheadrightarrow & \tilde{\nabla}_A\langle -1 \rangle & \text{falls } As \prec A,\ As \in \mathcal{A}^+ \end{array}$$

haben, bzw. daß $\tilde{\Theta}_s \tilde{\nabla}_A = 0$ falls $As \notin \mathcal{A}^+$. Diese Hoffnungen werden wesentlich gestützt durch die Tatsache, daß sie sich in der analogen Situation der G_1T-Moduln bis auf die Existenz von $\tilde{d}$ beweisen lassen, siehe [AJS94].

Wir versuchen nun induktiv graduierte Versionen $\tilde{T}_A$ der Kippmoduln zu bilden. Die $\tilde{\nabla}$-Fahne der $\tilde{T}_A$ soll also mit $\tilde{T}_A \twoheadrightarrow \tilde{\nabla}_A$ enden. Wir beginnen mit $\tilde{T}_{A^+} = \tilde{\nabla}_{A^+} = \tilde{L}_{A^+}$. Ist $\tilde{T}_A$ schon konstruiert, so wählen wir $s \in \mathcal{S}$ mit $As \succ A$ und bilden $\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A$. Dies Objekt ist sicher ein Kippmodul und besitzt sogar eine $\tilde{\nabla}$-Fahne, die mit $\tilde{\nabla}_{As}$ endet. Es sollte aber im allgemeinen nicht unzerlegbar sein, sondern vielmehr zerfallen als

$$\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A = \tilde{T}_{As} \oplus \bigoplus_B \tilde{T}_B,$$

wo die Summe über eine gewisse Multimenge von Alkoven $B \prec As$ geht. Man kann nun erwarten, daß alle Homomorphismen in $\tilde{\mathcal{B}}$ (also alle $\mathcal{B}$-Homomorphismen "vom Grad Null") von $\tilde{T}_B$ nach $\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A$ spalten, und diese Annahme führt genau auf obige Vermutung. Denn betrachten wir mal die Grothendieckgruppe $[\tilde{\mathcal{B}}]$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ und definieren den Homomorphismus $h : [\tilde{\mathcal{B}}] \longrightarrow \mathcal{N}$ durch $h(\tilde{\nabla}_A\langle i \rangle) = v^i N_A$. Nach unseren Formeln ist $h(\tilde{\Theta}_s \tilde{M}) = h(\tilde{M}) C_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Nehmen wir nun an, wir wüßten schon per Induktion, daß $h(\tilde{T}_A) = \underline{N}_A$. Sicher haben wir

$$\begin{array}{rcl} \dim \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{T}_B, \tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A) & = & \sum_{i,C} (\tilde{T}_B : \tilde{\Delta}_C\langle i \rangle)(\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_C\langle i \rangle) \\ & = & (\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_B), \end{array}$$

da per Induktion $\tilde{T}_B = \tilde{d}\tilde{T}_B$, also $(\tilde{T}_B : \tilde{\Delta}_C\langle i \rangle) = (\tilde{T}_B : \tilde{\nabla}_C\langle -i \rangle) = 0$ falls $i > 0$ oder $i = 0$, $B \neq C$. Nun ist $h(\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A) = \underline{N}_A C_s = \sum_B m_B N_B$ und per Definitionem $(\Theta_s \tilde{T}_A : \tilde{\nabla}_B) = m_B(0)$, mithin

$$\begin{array}{rcl} h(\tilde{T}_{As}) & = & h(\tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A) - \sum\limits_{B \prec As} \dim \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{T}_B, \tilde{\Theta}_s \tilde{T}_A) h(\tilde{T}_B) \\ & = & \underline{N}_A C_s - \sum\limits_{B \prec As} m_B(0) \underline{N}_B \\ & = & \underline{N}_{As}, \end{array}$$

was zu erklären war.

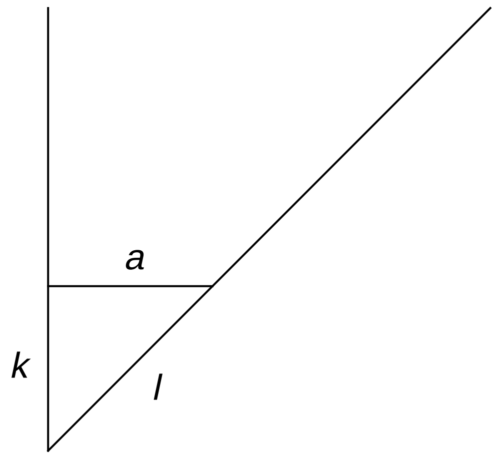
Ich möchte noch anfügen, daß aus der Formel $h(\tilde{T}_A) = \underline{N}_A$ auch die Unzerlegbarkeit von T_A folgt. Denn ähnlich wie oben rechnet man nach, daß dann $E = \operatorname{End}_{\mathcal{B}} T_A$ eine $\mathbb{Z}$-Graduierung

$$E = \bigoplus_i \operatorname{Hom}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\tilde{T}_A\langle i \rangle, \tilde{T}_A)$$

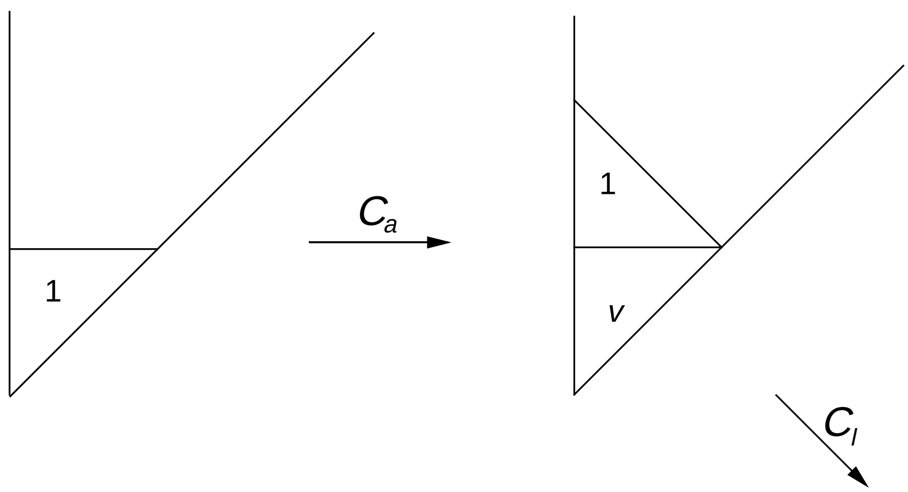
besitzt, die im Grad Null mit der homogenen Komponente $E_0 = k$ beginnt und keine negativen Komponenten hat. Eine endlichdimensionale k-Algebra, die eine solche Graduierung zuläßt, ist aber stets lokal. Mithin ist unter unseren Annahmen T_A unzerlegbar.

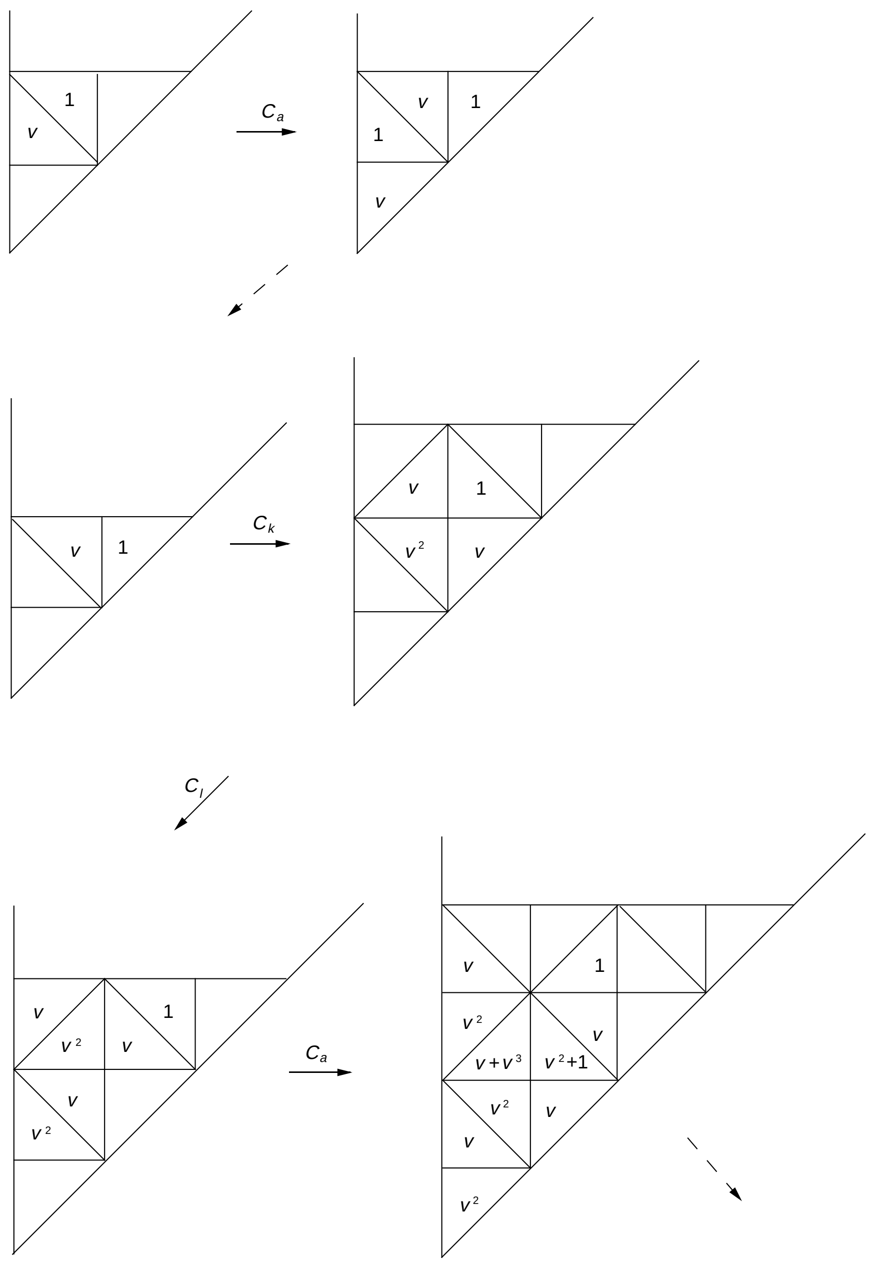
8. Das Beispiel B_2

In den folgenden Tafeln zeige ich am Beispiel des Wurzelsystems B_2 den Algorithmus, der die $\underline{N}_A$ berechnet. Ein Element $\sum n_A N_A \in \mathcal{N}$ wird dargestellt durch ein Bild, bei dem im Alkoven A das Laurentpolynom n_A steht. Wir setzten $\mathcal{S} = \{k, l, a\}$ mit a wie affin, l wie lang, und k wie kurz, also im Bild

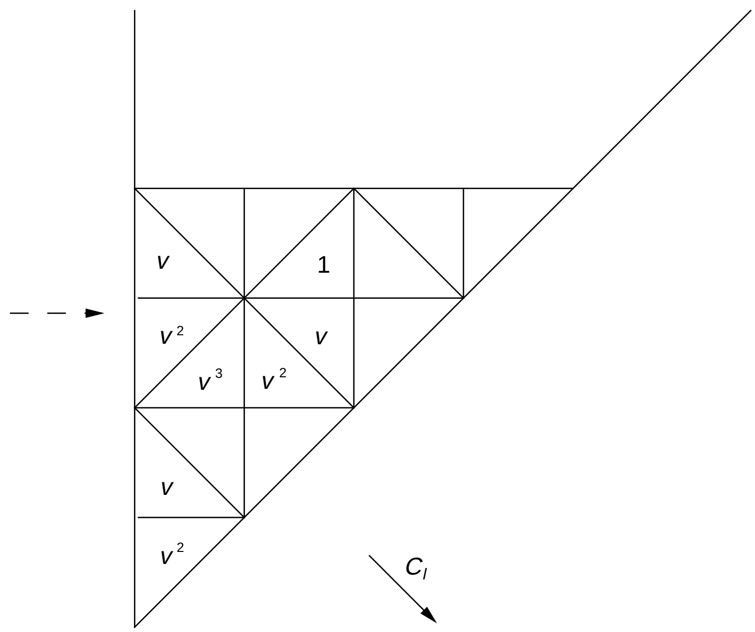


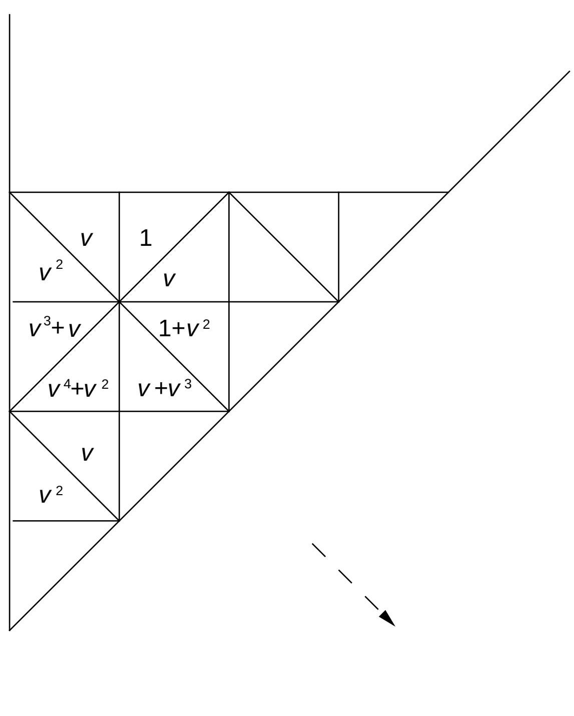
Wir beginnen unsere Rechnung mit einem Bild von $\underline{N}_{A^+}$. Jedes Bild, in dem nur ein Alkoven A mit einer 1 gefüllt ist, gibt das entsprechende $\underline{N}_A$ an. Rechtsmultiplikation mit C_s wird bildlich durch $\xrightarrow{C_s}$ dargestellt. In dem so entstehenden $\underline{N}_A C_s$ können noch zusätzliche Einsen stehen, die dann durch Subtraktion der entsprechenden $\underline{N}_B$ mit $B \prec As$ beseitigt werden müssen. Diesen Vorgang symbolisiert ein gestrichelter Pfeil $- - - \rightarrow$.

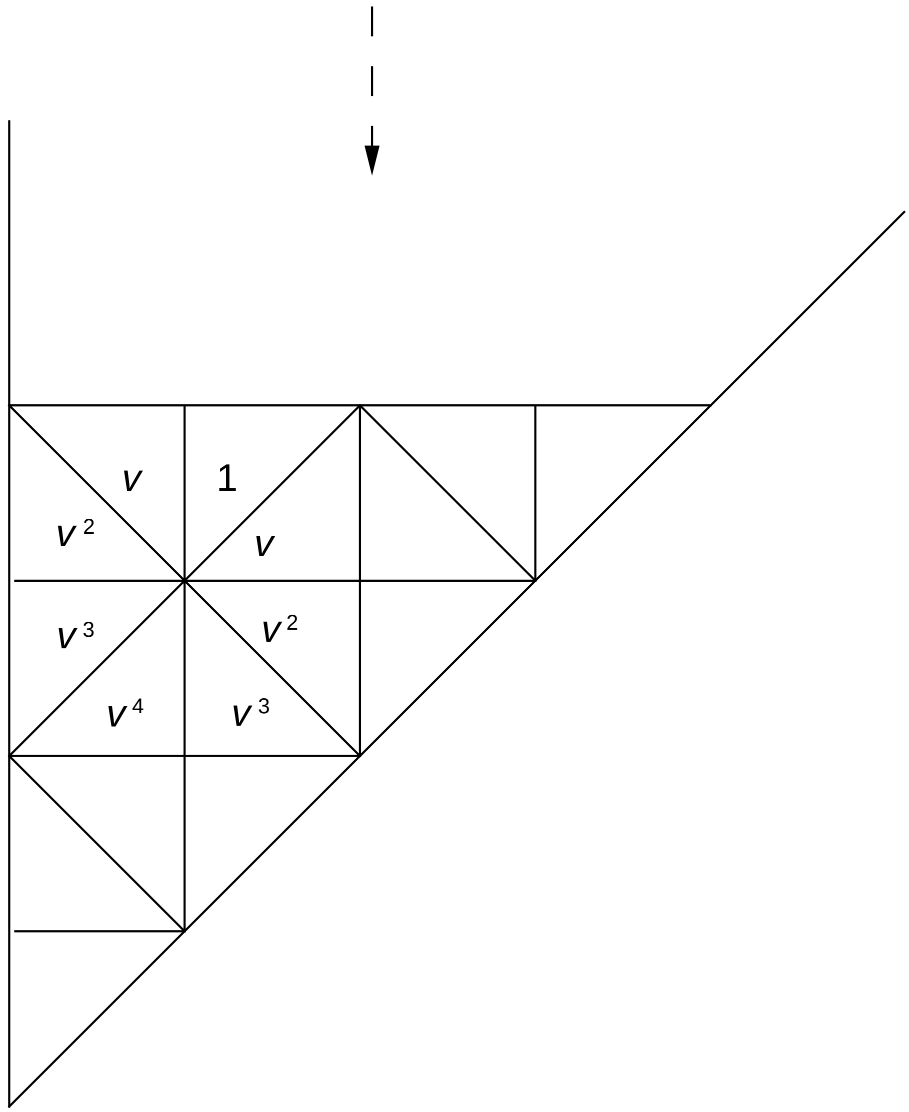




1
v
C_a
v
1
1
v
v
1
C_k
v
1
v
v^2
v
C_l
v
1
v^2
v
v
v^2
C_a
v
1
v^2
v
$v+v^3$
v^2+1
v^2
v
v
v^2


v
1
v 2
v
v 3
v 2
v
v 2
C l


v
1
v 2
v
v 3+v
1+v 2
v 4+v 2
v +v 3
v
v 2



Das letzte Muster ist genau $\operatorname{res} \operatorname{alt} E_\rho$ und bestätigt so Theorem 5.3 (1).

9. Notationen

$(\mathcal{W}, \mathcal{S})$	eine Coxeter-Gruppe, ab Abschnitt 3 die affine Weyl-Gruppe
$\tilde{\mathcal{W}}$	die erweiterte affine Weyl-Gruppe $W \ltimes X$
$(\mathcal{W}_f, \mathcal{S}_f)$	eine parabolische Untergruppe von $\mathcal{W}$
$\mathcal{W}^f$	die kürzesten Repräsentanten der Linksnebenklassen $\mathcal{W}_f \backslash \mathcal{W}$
$\mathcal{W}_\lambda$	die Isotropiegruppe von λ in $\mathcal{W}$
$W = \mathcal{W}_0$	die endliche Weylgruppe
W_λ	die Isotropiegruppe von λ in W
ρ	die Halbsumme der positiven Wurzeln
$\mathcal{C}$	die dominante Weylkammer
$\mathcal{A}$	die Menge aller Alkoven
$\mathcal{A}^+$	die Menge aller Alkoven in der dominanten Weylkammer $\mathcal{C}$
$\mathcal{A}^{++}$	die Menge aller Alkoven in $\rho + \mathcal{C}$
A^+	der fundamentale dominante Alkoven
$\mathcal{F}$	die Menge aller affinen Spiegelebenen
F^+, F^-	offener positiver und negativer Halbraum zu einer Spiegelebene $F \in \mathcal{F}$
$\preceq$	Lusztigs Ordnung auf den Alkoven
$\beta \uparrow A$, $\beta \downarrow A$	definiert im Beweis von Proposition 4.5
X	das Gewichtegitter
$l(x)$	die Länge des Elements x einer Coxeter-Gruppe
w_0	das längste Element von W
r	die Länge von w_0
Π	die fundamentale Box
Π_λ	die verschobene Box $\lambda + \Pi$
$\lambda(A)$	die untere Ecke der Box, die A enthält
$\breve{A}$	entsteht, wenn man A mit w_0 um $\lambda(A)$ dreht
$\hat{A}$	$A \mapsto \hat{A}$ ist invers zu $A \mapsto \breve{A}$
$\mathcal{H}$	die Hecke-Algebra
d	ihre Standard-Involution $d : H \mapsto \overline{H}$
i, a	zwei involutive Antiautomorphismen von $\mathcal{H}$ definiert im Beweis von Theorem 2.7
φ-linear	definiert vor Theorem 3.8
$\mathcal{L}$	der Ring der Laurent-Polynome $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$
C_s	selbstduale Erzeuger $C_s = v(T_s + 1)$ von $\mathcal{H}$

Einige Hecke-Moduln mit Dualität, Standard-Basis, selbstdualer Basis und Übergangskonstanten

$(\mathcal{H}, H_x, \underline{H}_x, h_{x,y})$	die Hecke-Algebra selbst, $H_x = v^{l(x)} T_x$
$(\mathcal{M}, M_x, \underline{M}_x, m_{x,y})$	Deodhars parabolische Versionen,
$(\mathcal{N}, N_x, \underline{N}_x, n_{x,y})$	für $x, y \in \mathcal{W}^f$
$(\mathcal{M}^*, M^x, \underline{M}^x, m^{x,y})$	Die dazu dualen Hecke-Moduln,
$(\mathcal{N}^*, N^x, \underline{N}^x, n^{x,y})$	für $x, y \in \mathcal{W}^f$

Ab Abschnitt 4 identifizieren wir $\mathcal{W}^0 \cong \mathcal{A}^+$ und schreiben M_A, $\underline{M}_A$, $m_{A,B} \ldots$ für M_x, $\underline{M}_x$, $m_{x,y} \ldots$

$(\mathcal{P}, A, \underline{P}_A, p_{A,B})$	Lusztigs periodischer Hecke-Modul
$\mathcal{P}^\circ$	Untermodul von $\mathcal{P}$, der eine Dualität besitzt
$q_{A,B}$	die (renomierten) generischen Polynome
$w * A$	eine neue Operation von $\tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{A}$,
	$w * (\lambda + B) = (w\lambda) + B$ für $\lambda \in X$, $B \subset \Pi$
$\langle w \rangle$	Operation von $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ auf $\mathcal{P}^\circ$, siehe 4.10

References

[AJS94] Henning Haahr Andersen, Jens Carsten Jantzen, and Wolfgang Soergel, *Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p: Independence of p*, Astérisque **220** (1994), 1–320. MR **95j:**20036

[And86] Henning Haahr Andersen, *An inversion formula for the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups*, Advances in Mathematics **60** (1986), 125–153. MR **87j:**22025

[And92] Henning Haahr Andersen, *Tensor products of quantized tilting modules*, Comm. Math. Physics **149** (1992), 149–159. MR **94b:**17015

[And96] Henning Haahr Andersen, *Filtrations and tilting modules*, Aarhus Preprint No 7, 1996.

[BGS96] Alexander A. Beilinson, Victor Ginzburg, and Wolfgang Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 473–527. MR **96k:**17010

[Bou81] Nicolas Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, vol. 4-6, Masson, 1981. MR **83g:**17001

[Deo87] Vinay V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings II. The parabolic analogue of Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of Algebra **111** (1987), 483–506. MR **89a:**20054

[Deo91] Vinay V. Deodhar, *Duality in parabolic set up for questions in Kazhdan-Lusztig theory*, Journal of Algebra **142** (1991), 201–209. MR **92j:**20049

[Deo94] Vinay V. Deodhar, *A brief survey of Kazhdan-Lusztig theory and related topics*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 56, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994, pp. 105–124. MR **96d:**20039

[Don93] Stephen Donkin, *On tilting modules for algebraic groups*, Mathematische Zeitschrift **212** (1993), 39–60. MR **94b:**20045

[Dou90] J.M. Douglass, *An inversion formula for relative Kazhdan-Lusztig polynomials*, Comm. Algebra **18** (1990), 371–387. MR **91c:**20064

[Hum90] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990. MR **92h:**20002

[Kan87] M. Kaneda, *On the inverse Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups*, J. Reine Angew. Math. **381** (1987), 116–135. MR **89a:**20048

[Kat85] S.I. Kato, *On the Kazhdan-Lusztig polynomials for affine Weyl groups*, Adv. in Math. **55** (1985), 103–130. MR **86d:**20048

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones **53** (1979), 191–213. MR **81j:**20066

[Lus80a] George Lusztig, *Hecke algebras and Jantzen's generic decomposition patterns*, Advances in Mathematics **37** (1980), 121–164. MR **82b:**20059

[Lus80b] George Lusztig, *Some problems in the representation theory of finite Chevalley groups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 37, Amer. Math. Soc., 1980, pp. 313–317. MR **82i:**20014

[Lus91] George Lusztig, *Intersection cohomology methods in representation theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1990 (Ichiro Satake, ed.), Springer, 1991, pp. 155–174. MR **93e:**20059

[Mil] Dragan Miličić, *Localization and representation theory of reductive Lie groups*, Book in preparation.

Universität Freiburg, Mathematisches Institut, Eckerstrasse 1, D-79104 Freiburg, Germany

E-mail address: `soergel@mathematik.uni-freiburg.de`