REPRESENTATION THEORY
An Electronic Journal of the American Mathematical Society
Volume 1, Pages 115–132 (May 9, 1997)
S 1088-4165(97)00017-4

CHARAKTERFORMELN FÜR KIPP-MODULN ÜBER KAC-MOODY-ALGEBREN

WOLFGANG SOERGEL

Abstract. We show how to express the characters of tilting modules in a (possibly parabolic) category $\mathcal{O}$ over a Kac-Moody algebra in terms of the characters of simple highest weight modules. This settles in lots of cases Conjecture 7.2 in *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln*, Represent. Theory (1997), by the author, describing the character of tilting modules for quantum groups at roots of unity.

Einleitung

In dieser Arbeit bestimme ich die Charaktere von unzerlegbaren Kipp-Moduln in der Kategorie $\mathcal{O}$ über einer affinen Kac-Moody-Algebra. Mit Hilfe einer von Kazhdan und Lusztig bewiesenen Äquivalenz von Kategorien erhält man damit auch die Charaktere von Kipp-Moduln für Quantengruppen, insbesondere ergibt sich die Vermutung 7.2 aus [Soe97] in vielen Fällen.

Den Schlüssel zur Bestimmung dieser Charaktere habe ich im Preprint [Ark96] gefunden. In dieser Arbeit baut Arkhipov die von Feigin eingeführte semi-infinite Kohomologie aus und zeigt insbesondere, daß die Kategorie aller Moduln mit Weyl-Filtrierung in positivem Level kontravariant äquivalent ist zur entsprechenden Kategorie in negativem Level. Unter dieser Äquivalenz müssen projektive Objekte zu Kipp-Moduln werden, und so liefern die Kazhdan-Lusztig-Vermutungen in positivem Level Charakterformeln für Kipp-Moduln in negativem Level.

In [Ark96] erscheint die oben erwähnte kontravariante Äquivalenz als Illustration einer sehr viel stärkeren und tieferen semi-infiniten Dualitätstheorie. Ich will in den folgenden Abschnitten zeigen, wie man diese kontravariante Äquivalenz direkt herleiten kann. Anschließend bespreche ich dann die Anwendung auf Kipp-Moduln.

1. Der semi-reguläre Bimodul

Sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Lie-Algebra über dem Körper k mit endlichdimensionalen homogenen Teilen, $\dim_k \mathfrak{g}_i < \infty$ für alle i.

Definition 1.1. Ein Charakter $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to k$ heißt ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$ genau dann, wenn gilt:

1. Als Lie-Algebra wird $\mathfrak{g}$ erzeugt von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_{-1}$.
2. $\gamma([X,Y]) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}X\operatorname{ad}Y : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0) \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{-1}$.

Received by the editors January 24, 1997 and, in revised form, March 3, 1997.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 17B70, 17B67, 17B37.

Bemerkung 1.2. Voronov [Vor93] und Arkhipov [Ark96] arbeiten ohne die Voraussetzung (1) und fordern dann von γ, daß $d\gamma$ der "kritische Kozykel von $\mathfrak{g}$" ist. Die Lie-Algebren, die das Ziel dieser Arbeit sind, werden jedoch von $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_{-1}$ erzeugt. Da dieser Fall leichter zu behandeln ist, beschränke ich mich auf den in der obigen Definition abgesteckten Rahmen.

Wir setzen $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_{\geq 0}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_{<0}$ und bezeichnen die Einhüllenden von $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}$ mit U, B, N. Sicher erben U, B und N eine $\mathbb{Z}$-Graduierung von den zugehörigen Lie-Algebren. Wir betrachten den zu N graduiert dualen N-Bimodul $N^{\circledast} = \oplus_i N_i^*$ mit der offensichtlichen Bimodul-Struktur gegeben durch $(fn)(n_1) = f(nn_1)$, $(nf)(n_1) = f(n_1 n)\ \forall\ f \in N^{\circledast}, n, n_1 \in N$.

Theorem 1.3. *Sei $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to k$ ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$. So gibt es einen $\mathbb{Z}$-graduierten U-Bimodul $S = S_\gamma$ mitsamt einer Inklusion von $\mathbb{Z}$-graduierten N-Bimoduln $\iota : N^{\circledast} \hookrightarrow S$ derart, daß gilt:*

1. *Die Abbildung $U \otimes_N N^{\circledast} \to S$, $u \otimes f \mapsto u\iota(f)$ ist bijektiv.*
2. *Die Abbildung $N^{\circledast} \otimes_N U \to S$, $f \otimes u \mapsto \iota(f)u$ ist bijektiv.*
3. *Bis auf einen Twist um γ kommutiert die Inklusion $\iota : N^{\circledast} \hookrightarrow S$ mit der adjungierten Operation von $\mathfrak{g}_0$ auf beiden Räumen, in Formeln $\iota(f \circ \mathrm{ad}H) + (\mathrm{ad}H)\iota(f) = \iota(f)\gamma(H)$ für alle $H \in \mathfrak{g}_0$ und $f \in N^{\circledast}$.*

Bemerkungen 1.4.
1. Der Bimodul S ist ein semi-infinites Analogon der Einhüllenden Algebra, da analog zu $U \cong B \otimes_k N \cong N \otimes_k B$ gilt $S \cong B \otimes_k N^{\circledast} \cong N^{\circledast} \otimes_k B$. Wir bezeichnen S als den "semi-regulären Bimodul". Er wird in größerer Allgemeinheit in [Vor93] als "standard semijective module" und in [Ark96] als "semiregular module" eingeführt. Die Darstellung in [Vor93] muß allerdings noch etwas nachgebessert werden.
2. Der semi-reguläre Bimodul S hat nur homogene Komponenten vom Grad ≥ 0.
3. Die Formel (3) sagt insbesondere $H\iota(\varepsilon) = \iota(\varepsilon)(H + \gamma(H))$ für alle $H \in \mathfrak{g}_0$ und $\varepsilon \in N_0^{\circledast}$, speziell also für ε die Augmentation von N.
4. Wenn man den Beweis des Theorems sorgfältig durchgeht und am Schluß den Dimensionsvergleich durch ein feineres Argument ersetzt erkennt man, daß es reicht $\dim_k \mathfrak{g}_i < \infty$ für $i < 0$ vorauszusetzen.

Beweis. Zunächst konstruieren wir für einen beliebigen Charakter γ von $\mathfrak{g}_0$ einen Vektorraum $S = S_\gamma$ mit einer Linksoperation und einer Rechtsoperation von U.

Für zwei beliebige $\mathbb{Z}$-graduierte Vektorräume M, M' definiere man einen $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum $\mathcal{H}\mathrm{om}_k(M, M')$ mit homogenen Komponenten

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_k(M, M')_j = \{f \in \mathrm{Hom}_k(M, M') \mid f(M_i) \subset M'_{i+j}\}.$$

Es ist also zum Beispiel $N^{\circledast} = \mathcal{H}\mathrm{om}_k(N, k)$, wenn wir k die $\mathbb{Z}$-Graduierung $k = k_0$ geben. Jetzt betrachten wir für einen beliebigen Charakter γ von $\mathfrak{g}_0$ die folgende Sequenz von Isomorphismen von $\mathbb{Z}$-graduierten k-Vektorräumen:

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_B(U, k_\gamma \otimes_k B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}\mathrm{om}_k(N, B) \xleftarrow{\sim} N^{\circledast} \otimes_k B \xrightarrow{\sim} N^{\circledast} \otimes_N U$$

Hier bezeichnet $\mathcal{H}om_B$ den Raum der B-Homomorphismen in $\mathcal{H}om_k$, weiter ist k_γ die durch den Charakter $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to k$ und die Surjektion $\mathfrak{b} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}_0$ definierte eindimensionale Darstellung von $\mathfrak{b}$, und $k_\gamma \otimes_k B$ ist als $\mathfrak{b}$-Linksmodul das Tensorprodukt der beiden Darstellungen. Der erste Isomorphismus ist definiert durch die Restriktion auf N und die Identifikation $k_\gamma \otimes_k B \xrightarrow{\sim} B$, $1 \otimes b \mapsto b$. Die übrigen Isomorphismen sind offensichtlich.

Wir setzen nun $S_\gamma = N^\circledast \otimes_k B$ und erklären darauf eine U-Operation von links (bzw. von rechts) durch die ersten beiden Isomorphismen (bzw. den letzten Isomorphismus). Unser erstes Ziel ist zu zeigen, daß für einen semi-infiniten Charakter γ die Rechts- und die Linksoperation von U auf S_γ kommutieren. Leider verstehe ich den eigentlichen Grund dieses Phänomens nicht und bin deshalb gezwungen, es ohne Verständnis nachzurechnen.

Alle unsere Isomorphismen von oben sind verträglich mit der offensichtlichen Linksoperation von N und Rechtsoperation von B auf unseren Räumen. Daraus folgt, daß die Linksoperation von N kommutiert mit der Rechtsoperation von U, und die Rechtsoperation von B mit der Linksoperation von U. Es gilt also zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} H((f\otimes b)Y) &= (H(f\otimes b))Y, \\ X((f\otimes b)Y) &= (X(f\otimes b))Y \end{aligned}$$

für alle $H \in \mathfrak{g}_0, X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{-1}, f \in N^\circledast, b \in B$. Wir können hier sogar $b = 1$ annehmen. Denn durch Rechtsmultiplikation mit $X_1 \in \mathfrak{g}_1$ bzw. $H_1 \in \mathfrak{g}_0$ und eine kurze Rechnung folgert man aus den Gleichungen mit b die entsprechenden Gleichungen mit bX_1 bzw. bH_1. Zusammenfassend gilt es also nur noch zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} H((f\otimes 1)Y) &= (H(f\otimes 1))Y, \\ X((f\otimes 1)Y) &= (X(f\otimes 1))Y \end{aligned}$$

für alle $H \in \mathfrak{g}_0, X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{-1}, f \in N^\circledast$.

Machen wir uns also ans Rechnen. Bezeichnet $L_Y : N \to N$ die Multiplikation mit $Y \in \mathfrak{g}_{-1}$ von links, so ist $(f\otimes 1)Y = fL_Y \otimes 1$. Weiter gilt für $H \in \mathfrak{g}_0$ nach unseren Definitionen

$$H(f\otimes 1) = -f(\mathrm{ad}H)\otimes 1 + f\otimes(\gamma(H)+H)$$

wo natürlich $\mathrm{ad}H : N \to N$ durch $(\mathrm{ad}H)(n) = Hn - nH$ gegeben ist. Damit gilt also

$$\begin{aligned} (H(f\otimes 1))Y &= -f(\mathrm{ad}H)L_Y\otimes 1 + fL_Y\otimes(\gamma(H)+H), \\ &\quad +fL_{[H,Y]}\otimes 1, \\ H((f\otimes 1)Y) &= -fL_Y(\mathrm{ad}H)\otimes 1 + fL_Y\otimes(\gamma(H)+H), \end{aligned}$$

und da $(\mathrm{ad}H)L_Y = L_Y(\mathrm{ad}H) + L_{[H,Y]}$ stimmen diese Ausdrücke noch für beliebiges γ überein.

Um $X(f\otimes 1)$ anzugeben, wählen wir eine Basis $(H_i)_{i\in I}$ von $\mathfrak{g}_0$ und definieren lineare Abbildungen $H_X^i, F_X : N \to N$ durch

$$nX = Xn + \sum_i H_i H_X^i(n) + F_X(n) \quad \forall n \in N.$$

Nach unseren Definitionen erhalten wir

$$X(f\otimes 1) = f\otimes X + \sum_i fH_X^i\otimes(\gamma(H_i)+H_i) + fF_X\otimes 1.$$

Wir berechnen weiter

$$\begin{aligned} (Yn)X &= X(Yn) + \sum H_i H_X^i(Yn) + F_X(Yn) \\ Y(nX) &= YXn + \sum YH_iH_X^i(n) + YF_X(n) \\ &= XYn + [Y,X]n + \sum H_iYH_X^i(n) \\ &\quad + \sum [Y,H_i]H_X^i(n) + YF_X(n) \end{aligned}$$

und mit $[Y,X] = \sum c^i_{YX} H_i$ ergeben sich die Formeln

$$\begin{array}{rcl} H^i_X L_Y & = & L_Y H^i_X + c^i_{YX}\mathrm{id}_N \\ F_X L_Y & = & L_Y F_X + \sum_i L_{[Y,H_i]} H^i_X. \end{array}$$

Nun erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} X((f\otimes 1)Y) & = & fL_Y \otimes X + \sum_i fL_Y H^i_X \otimes (\gamma(H_i) + H_i) \\ & & +fL_Y F_X \otimes 1 \\ (X(f\otimes 1))Y & = & f\otimes XY + \sum_i fH^i_X \otimes (\gamma(H_i)+H_i)Y + fF_X \otimes Y \\ & = & fL_Y \otimes X + f \otimes [X,Y] \\ & & +\sum_i fH^i_X L_Y \otimes (\gamma(H_i)+H_i) \\ & & +\sum_i fH^i_X L_{[H_i,Y]} \otimes 1 \\ & & +fF_X L_Y \otimes 1 \end{array}$$

und als Bedingung für $X((f\otimes 1)Y) = (X(f\otimes 1))Y$ ergibt sich mit unseren Formeln $0 = \sum_i c^i_{YX}\cdot\gamma(H_i) + c^i_{[H_i,Y]X}$, in anderen Worten $\gamma([X,Y]) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0)$. Damit ist also für jeden semi-infiniten Charakter γ unser $S = S_\gamma$ ein U-Bimodul. Wir definieren $\iota : N^\circledast \hookrightarrow S$ durch $\iota(f) = f\otimes 1$ und müssen nur noch die behaupteten Eigenschaften (1)–(3) nachweisen.

Von diesen folgen (2) und (3) sofort aus unseren Definitionen, und wir müssen nur noch (1) zeigen. Nun trägt ja S eine $\mathbb{Z}$-Graduierung mit endlichdimensionalen homogenen Komponenten. Mit Dimensionsvergleich reicht es also zu zeigen, daß $U\otimes_N N^\circledast \to S$ eine Surjektion ist, daß also $\iota(N^\circledast)$ schon S als U-Linksmodul erzeugt. Die Formeln für $X(f\otimes 1)$, $H(f\otimes 1)$ zeigen aber, daß der von $\iota(N^\circledast)$ erzeugte U-Linksmodul stabil ist unter der Rechtsoperation von B. □

2. Die Kategorie aller Moduln mit endlicher Verma-Fahne ist ihre eigene opponierte Kategorie

Wir übernehmen die Notationen des vorhergehenden Abschnitts. Sei $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to k$ ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$ und $S = S_\gamma$ der zugehörige semi-reguläre Bimodul. Bezeichne $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{K}$ die Kategorie aller $\mathbb{Z}$-graduierten Darstellungen von $\mathfrak{g}$, die über N graduiert frei bzw. kofrei sind von endlichem Rang, d.h. die isomorph sind zu endlichen direkten Summen von eventuell in der Graduierung verschobenen Kopien von N bzw. $N^\circledast$.

Theorem 2.1. *Der Funktor $S\otimes_U$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien $S\otimes_U : \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}$, unter der kurze exakte Sequenzen kurzen exakten Sequenzen entspechen.*

Bemerkungen 2.2.
1. Die Existenz einer Äquivalenz $\mathcal{M} \cong \mathcal{K}$ ist ein Resultat von Arkhipov [Ark96].
2. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ eine abelsche Unter-Lie-Algebra derart, daß die adjungierte Operation von $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{n}$ diagonalisierbar ist, so liefert unser Funktor auch eine Äquivalenz $\mathcal{M}_\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_\mathfrak{h}$ zwischen den Kategorien aller $\mathfrak{h}$-diagonalisierbaren Objekte von $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{K}$.

Beweis. Zunächst folgt aus $S \cong N^\circledast \otimes_N U$, daß $S\otimes_U \cong N^\circledast \otimes_N$ in der Tat einen Funktor $T : \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ definiert, der kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen macht. Weiter liefert die Rechtsmultiplikation einen Isomorphismus $N^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{End}_N(N^\circledast)$, und da ja auch $S \cong U\otimes_N N^\circledast$ definiert $\mathrm{Hom}_U(S,\ ) \cong \mathrm{Hom}_N(N^\circledast,\ )$ in der Tat einen Funktor $H : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$, der kurze exakte Sequenzen zu kurzen exakten Sequenzen macht.

Unsere beiden Funktoren bilden in offensichtlicher Weise ein adjungiertes Paar (T, H). Um zu zeigen, daß sie zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien sind, müssen wir nur noch nachweisen, daß für alle $M \in \mathcal{M}$ bzw. $K \in \mathcal{K}$ die kanonische Abbildung $M \to HTM$ bzw. $THK \to K$ ein Isomorphismus ist. Aber wir haben ja

$$\begin{aligned} HTM &= \mathrm{Hom}_U(S, S \otimes_U M) \\ &= \mathrm{Hom}_N(N^{\circledast}, N^{\circledast} \otimes_N M) \end{aligned}$$

und für einen freien N-Modul M von endlichem Rang ist sicher die kanonische Abbildung $M \to \mathrm{Hom}_N(N^{\circledast}, N^{\circledast} \otimes_N M)$ ein Isomorphismus. Ebenso haben wir

$$\begin{aligned} THK &= S \otimes_U \mathrm{Hom}_U(S, K) \\ &= N^{\circledast} \otimes_N \mathrm{Hom}_N(N^{\circledast}, K) \end{aligned}$$

und für $K = N^{\circledast}$ oder, allgemeiner, K kofrei von endlichem Rang über N ist sicher die kanonische Abbildung $N^{\circledast} \otimes_N \mathrm{Hom}_N(N^{\circledast}, K) \to K$ ein Isomorphismus. $\square$

In dem nun folgenden Korollar zeigt sich der Inhalt des Theorems besonders deutlich. Für einen $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum $V = \bigoplus V_i$ bezeichne $V^{\circledast} = \mathcal{H}\mathrm{om}_k(V, k)$ seinen $\mathbb{Z}$-graduierten Dualraum mit homogenen Komponenten $(V^{\circledast})_i = (V_{-i})^*$. Ist V eine $\mathbb{Z}$-graduierte Darstellung von $\mathfrak{g}$, so macht die kontravariante Operation $(Xf)(v) = -f(Xv)$ für alle $f \in V^{\circledast}$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ auch $V^{\circledast}$ zu einer $\mathbb{Z}$-graduierten Darstellung von $\mathfrak{g}$. Bezeichne $\mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$ die zu $\mathcal{M}$ opponierte Kategorie.

Korollar 2.3. *Der Funktor $M \mapsto (S \otimes_U M)^{\circledast}$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$, unter der kurze exakte Sequenzen kurzen exakten Sequenzen entsprechen, und unter der $U \otimes_B E$ auf $U \otimes_B (k_{-\gamma} \otimes E^*)$ abgebildet wird, für jede endlichdimensionale $\mathbb{Z}$-graduierte Darstellung E von $\mathfrak{g}_0$.*

Beweis. Man beachte, daß die obigen Formeln uns eine zweite Linksoperation von $\mathfrak{n}$ auf $N^{\circledast}$ definieren, die im allgemeinen nicht mit der in Abschnitt 1 definierten Linksoperation von $\mathfrak{n}$ auf $N^{\circledast}$ übereinstimmt. Jedoch ist $N^{\circledast}$ versehen mit dieser zweiten $\mathfrak{n}$-Operation stets isomorph als $\mathbb{Z}$-graduierter $\mathfrak{n}$-Modul zu $N^{\circledast}$ mit der ursprünglichen Operation, ein möglicher Isomorphismus ist die transponierte Abbildung zum prinzipalen Anti-Automorphismus von N.

Folglich definiert uns der Funktor $V \mapsto V^{\circledast}$ eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{opp}}$. Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen. $\square$

Bemerkungen 2.4.
1. Man kann ohne große Schwierigkeiten zeigen, daß $\mathcal{M}$ genau aus denjenigen $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathfrak{g}$-Moduln besteht, die eine endliche Filtrierung mit Subquotienten der Form $U \otimes_B E$ besitzen, mit endlichdimensionalen irreduziblen $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathfrak{g}_0$-Moduln E. Wir nennen deshalb $\mathcal{M}$ auch die Kategorie aller Moduln mit endlicher Verma-Fahne.
2. Man zeigt weiter ohne große Schwierigkeiten, daß $\mathcal{M}$ stabil ist unter direkten Summanden. Allgemeiner ist jeder Summand eines graduiert freien N-Moduls von endlichem Rang selbst graduiert frei von endlichem Rang.
3. Unter den Voraussetzungen von Bemerkung 2.2 (2) liefert unser Funktor natürlich auch eine Äquivalenz $\mathcal{M}_{\mathfrak{h}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathfrak{h}}^{\mathrm{opp}}$.

3. Projektive Objekte in $\mathcal{O}$

Wir entwickeln nun in großer Allgemeinheit einige wohlbekannte Resultate und brauchen stärkere Voraussetzungen als in den ersten beiden Abschnitten. Sei ab jetzt k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null und sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Lie-Algebra über k mit $\dim_k \mathfrak{g}_i < \infty \ \forall i \in \mathbb{Z}$ derart, daß $\mathfrak{g}_0$ reduktiv ist und $\mathfrak{g}$ ein halbeinfacher $\mathfrak{g}_0$-Modul unter der adjungierten Darstellung. Dann betrachten wir die Kategorie $\mathcal{O}$ aller $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathfrak{g}$-Moduln $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$, die lokal endlich sind unter $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ und halbeinfach unter $\mathfrak{g}_0$. Für $M, N \in \mathcal{O}$ ist also $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) \mid f(M_i) \subset N_i \ \ \forall i \in \mathbb{Z}\}$.

Wie zuvor setzen wir $\mathfrak{g}_{\geq 0} = \mathfrak{b}$ und $U(\mathfrak{b}) = B$. Bezeichne Λ die Menge der Isomorphieklassen von irreduziblen endlichdimensionalen $\mathbb{Z}$-graduierten Darstellungen von $\mathfrak{g}_0$. Eine solche Darstellung $E \in \Lambda$ lebt natürlich stets in genau einem Grad $|E| \in \mathbb{Z}$, also $E = E_{|E|}$. Zu $E \in \Lambda$ bilden wir den Verma-Modul $\Delta(E) = U \otimes_B E$. Natürlich liegt $\Delta(E)$ in $\mathcal{O}$, hat genau einen einfachen Quotienten $L(E)$, und $\{L(E)\}_{E\in\Lambda}$ ist ein Repräsentantensystem für die einfachen Objekte von $\mathcal{O}$. Analog betrachten wir auch $\nabla(E) = \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathfrak{g}_{\leq 0}}(U, E)$ in $\mathcal{O}$ und man erkennt, daß $L(E)$ der kleinste von Null verschiedene Untermodul von $\nabla(E)$ ist. Genauer betrachten wir für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{O}$ die Unterkategorie

$$\mathcal{O}_{\leq n} = \{M \in \mathcal{O} \mid M_i = 0 \text{ falls } i > n\}.$$

Man zeigt für beliebige $E, F \in \Lambda$:

Lemma 3.1. 1. *$\Delta(E)$ ist eine projektive Decke von $L(E)$ in $\mathcal{O}_{\leq |E|}$.*
2. *$\nabla(E)$ ist eine injektive Hülle von $L(E)$ in $\mathcal{O}_{\leq |E|}$.*
3. *$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \nabla(E)) = 0$ falls $F \neq E$. Für $F = E$ ist dieser Raum eindimensional.*
4. *$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \nabla(E)) = 0$.*

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen. □

Im allgemeinen hat ein einfaches Objekt in $\mathcal{O}$ keine projektive Decke, sondern nur in den gestutzten Kategorien $\mathcal{O}_{\leq n}$.

Theorem 3.2. 1. *Jedes einfache Objekt $L(E) \in \mathcal{O}_{\leq n}$ besitzt in $\mathcal{O}_{\leq n}$ eine projektive Decke $P_{\leq n}(E)$, und diese projektive Decke hat eine endliche Δ-Fahne.*
2. *Für $m > n$ hat der Kern jeder Surjektion $P_{\leq m}(E) \twoheadrightarrow P_{\leq n}(E)$ eine endliche Δ-Fahne mit Subquotienten der Form $\Delta(F)$ für $m \geq |F| > n$.*
3. *Genau dann besitzt $L(E)$ eine projektive Decke $P(E)$ in $\mathcal{O}$, wenn $P_{\leq n}(E) \cong P_{\leq n+1}(E) \cong \dots$ für $n \gg 0$, und dann ist $P(E) \cong P_{\leq n}(E)$.*

Zum Beweis benötigen wir etwas abstrakte Theorie.

Lemma 3.3. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $p : P \twoheadrightarrow L$ eine Surjektion von einem unzerlegbaren projektiven Objekt auf ein einfaches Objekt. Ist $E = \mathrm{End}_{\mathcal{A}} P$ von endlicher Länge als Rechtsmodul über sich selbst, so ist P eine projektive Decke von L.*

Beweis. In der Tat sind Null und Eins die einzigen Idempotenten von E, da ja P unzerlegbar ist. Es folgt mit den üblichen Argumenten zur Fitting-Zerlegung, daß jedes Element von E nilpotent oder invertierbar ist. Ist nun $i : U \to P$ ein Morphismus mit $p \circ i \neq 0$, so gibt es aufgrund der Projektivität von P ein $q : P \to U$ mit $p \circ i \circ q = p$. Dann ist aber $i \circ q$ nicht nilpotent, also ein Isomorphismus, und folglich ist i surjektiv. Mithin ist $\ker p$ das größte echte Unterobjekt von P, was zu zeigen war. □

Jetzt zeigen wir das Theorem.

Beweis. (1) Für jeden $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathfrak{b}$-Modul $K = \bigoplus K_i$ bezeichne $\tau_{\leq n} K$ den Quotienten nach dem Untermodul aller homogenen Teile vom Grad $> n$, also $\tau_{\leq n} K = \bigoplus_{i \leq n} K_i$. Für $E \in \Lambda$ ist dann

$$Q = U \otimes_B \tau_{\leq n}(B \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} E)$$

projektiv in $\mathcal{O}_{\leq n}$. In der Tat, bezeichnet $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},\mathbb{Z}}$ in den Raum aller $\mathfrak{g}$-Modulhomomorphismen, die bezüglich der $\mathbb{Z}$-Graduierung homogen sind vom Grad Null, so gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(Q, M) &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},\mathbb{Z}}(Q, M) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b},\mathbb{Z}}(\tau_{\leq n}(B \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} E), M) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b},\mathbb{Z}}(B \otimes_{U(\mathfrak{g}_0)} E, M) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,\mathbb{Z}}(E, M) \end{aligned}$$

für alle $M \in \mathcal{O}_{\leq n}$, und $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,\mathbb{Z}}(E, M)$ ist ein exakter Funktor in $M \in \mathcal{O}$ aufgrund der Definition dieser Kategorie.

Sicher ist Q graduiert frei über N von endlichem Rang, und falls $n \geq |E|$ gibt es eine Surjektion $Q \twoheadrightarrow L(E)$. Nach Lemma 3.3 können wir als $P_{\leq n}(E)$ jeden unzerlegbaren Summanden von Q wählen, der $L(E)$ als Quotienten hat, und nach Bemerkung 2.4 (2) besitzt $P_{\leq n}(E)$ eine Δ-Fahne.

(2) Wir haben für $m \geq n$ sicher eine Surjektion

$$P_{\leq m}(E) \twoheadrightarrow P_{\leq n}(E),$$

und aufgrund der universellen Eigenschaften muß der Kern einer solchen Surjektion genau das Erzeugnis in $P_{\leq m}(E)$ der homogenen Komponenten vom Grad $> n$ sein. Dieses Erzeugnis in einem graduiert freien N-Modul ist aber selbst graduiert frei (als Basis kann man die Vektoren vom Grad $> n$ einer homogenen Basis des ganzen Moduls nehmen), unser Erzeugnis besitzt also nach Bemerkung 2.4 (2) eine Δ-Fahne.

(3) Besitzt $L(E)$ eine projektive Decke $P(E)$ in $\mathcal{O}$, so ist $P(E)$ erzeugt von einem Vektor (sogar von jedem Vektor außerhalb des größten echten Untermoduls), also $P(E) \in \mathcal{O}_{\leq n}$ für $n \gg 0$, also $P(E) \cong P_{\leq m}(E)\ \forall m \geq n$.

Stabilisiert umgekehrt das projektive System der $P_{\leq n}(E)$ zu einem Objekt $P(E)$, so müssen wir zeigen, daß $P(E)$ projektiv ist in $\mathcal{O}$. Natürlich ist so ein $P(E)$ erzeugt von einem Element v. Sei nun $M \twoheadrightarrow M'$ eine Surjektion und $f' : P(E) \to M'$ ein Morphismus, den wir zu $f : P(E) \to M$ liften wollen. Dann wählen wir ein Urbild $m \in M$ von $m' = f'(v) \in M'$ und betrachten die Surjektion $U(\mathfrak{g})m \twoheadrightarrow U(\mathfrak{g})m'$. Hier liegen nun beide Moduln in $\mathcal{O}_{\leq n}$ für $n \gg 0$, und da $P(E) \cong P_{\leq n}(E)$ finden wir den gewünschten Lift. □

4. Reziprozität und Zerlegung von $\mathcal{O}$ in Blöcke

Um die übliche Reziprozität in voller Allgemeinheit zu formulieren, müssen wir Multiplizitäten in voller Allgemeinheit einführen.

Definition 4.1. Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie, $M \in \mathcal{A}$ ein Objekt, $L \in \mathcal{A}$ ein einfaches Objekt. Die Multiplizität $[M : L] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ von L in M ist das Supremum über alle (endlichen) Filtrierungen F von M der Vielfachheit, mit der L als Subquotient der Filtrierung auftritt. Also in Formeln

$$[M : L] = \sup_F \#\{i \mid F_i M / F_{i+1} M \cong L\}.$$

Die so definierte Multiplizität ist additiv, d.h. für jede kurze exakte Sequenz $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$ gilt $[M : L] = [M' : L] + [M'' : L]$. Insbesondere ist für $\nabla \in \mathcal{O}_{\leq n}$ und $E \in \Lambda$ stets $[\nabla : L(E)] = \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P_{\leq n}(E), \nabla)$. Andererseits ist für einen Modul $P \in \mathcal{O}$ mit einer endlichen Δ-Filtrierung nach Lemma 3.1 die Vielfachheit $[P : \Delta(F)]$ von $\Delta(F)$ als Subquotient genau $\dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(P, \nabla(F))$. Zusammenfassend erhalten wir also die Reziprozitätsformel

$$[P_{\leq n}(E) : \Delta(F)] = [\nabla(F) : L(E)]$$

für $E, F \in \Lambda$ und $n \geq \max\{|E|, |F|\}$.

Weil es mit den nun zur Verfügung stehenden Resultaten sehr schnell geht, will ich auch noch die Zerlegung von $\mathcal{O}$ in Blöcke besprechen, obwohl das für das eigentliche Hauptresultat dieser Arbeit unerheblich ist. Sicher gibt es auf Λ eine partielle Ordnung $\geq$ derart, daß $[\Delta(F) : L(E)] \neq 0 \Rightarrow F \geq E$ und $[\nabla(F) : L(E)] \neq 0 \Rightarrow F \geq E$. Sei ab jetzt $\geq$ die kleinste derartige partielle Ordnung und $\sim$ die von dieser partiellen Ordnung erzeugte Äquivalenzrelation. Für jede Äquivalenzklasse $\theta \in \Lambda/\sim$ betrachten wir die Kategorie

$$\mathcal{O}_\theta = \{M \in \mathcal{O} \mid [M : L(E)] \neq 0 \Rightarrow E \in \theta\}.$$

Theorem 4.2. *Der Funktor* $\prod_{\theta \in \Lambda/\sim} \mathcal{O}_\theta \to \mathcal{O},\ (M_\theta)_\theta \mapsto \bigoplus_\theta M_\theta$ *ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. Für $\theta \in \Lambda/\sim$ und $M \in \mathcal{O}$ bezeichne $M_\theta \subset M$ den Untermodul, der von allen Bildern von Homomorphismen $\varphi : P_{\leq n}(E) \to M$ mit $E \in \Lambda$ erzeugt wird. Wir zeigen nun

1. $M_\theta \in \mathcal{O}_\theta$;
2. Ist $f : M \to N$ ein Morphismus in $\mathcal{O}$, so gilt $f(M_\theta) \subset N_\theta$;
3. $M = \bigoplus_\theta M_\theta$.

Damit ist das Theorem dann bewiesen. Wir beginnen mit (1). Aufgrund der Definition unserer Äquivalenzrelation und nach der Reziprozitätsformel gilt $P_{\leq n}(E) \in \mathcal{O}_\theta$ für alle $E \in \theta$. Bei einer kurzen exakten Sequenz in $\mathcal{O}$ liegt die Mitte in $\mathcal{O}_\theta$ genau dann, wenn beide Enden in $\mathcal{O}_\theta$ liegen, nach der Additivität der Multiplizitäten. Es reicht also zu zeigen, daß $\mathcal{O}_\theta$ stabil ist unter beliebigen direkten Summen. Jeder einfache Subquotient von $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist aber Quotient eines von einem Element erzeugten Untermoduls, und kommt damit auch schon in einer endlichen Summe vor. Damit ist (1) geklärt. Nun folgt (2) aus den Definitionen, und mit (2) ist klar, daß die Summe in (3) direkt ist. Wir überlassen dem Leser den Nachweis, daß diese Summe M ausschöpft. □

Bemerkung 4.3. Sei $E \in \Lambda$ gegeben. Gibt es nur endlich viele $F \in \Lambda$ mit $F \geq E$, so besitzt $L(E)$ nach Theorem 3.2 (3) eine projektive Decke $P(E)$ in $\mathcal{O}$.

5. Kipp-Moduln in $\mathcal{O}$

Definition 5.1. Unter einer Δ-Fahne in einem Objekt $M \in \mathcal{O}$ verstehen wir eine (möglicherweise unendliche) aufsteigende Filtrierung

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$$

derart, daß $M = \bigcup M_\nu$ und $M_\nu / M_{\nu-1} \cong \Delta(F_\nu)$ für alle $\nu \geq 1$, mit gewissen $F_\nu \in \Lambda$.

Theorem 5.2. *Zu jedem* $E \in \Lambda$ *gibt es bis auf Isomorphismus genau ein unzerlegbares Objekt* $T = T(E) \in \mathcal{O}$ *derart, daß gilt:*

1. $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), T) = 0$ *für alle* $F \in \Lambda$*;*
2. T *besitzt eine* Δ*-Fahne, die mit* $T_1 \cong \Delta(E)$ *beginnt.*

Definition 5.3. Dieses Objekt $T(E)$ nennen wir auch den Kipp-Modul (englisch "tilting module") mit Parameter E.

Bemerkung 5.4. Das Theorem ist eine Variation zu Resultaten von Ringel [Rin91], der seinerseits Resultate von Donkin [Don86] und Collingwood-Irving [CI89] in einem allgemeinen Kontext entwickelt.

Beweis. Wir beginnen mit

Lemma 5.5. 1. *Für alle* $F, G \in \Lambda$ *sind sowohl* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \Delta(G))$ *als auch* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \Delta(G))$ *endlichdimensional.*
2. *Für alle* $G \in \Lambda$ *und* $i \in \mathbb{Z}$ *gibt es höchstens endlich viele* $F \in \Lambda$ *mit* $|F| = i$ *und* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \Delta(G))$ *oder* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \Delta(G))$ *ungleich Null.*

Beweis. Nach unseren Voraussetzungen sind alle homogenen Komponenten von $\Delta(G)$ endlichdimensional. Daraus folgen (1) und (2) für Hom. Sei weiter n größer als $|F|$ und $|G|$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz $\ker \hookrightarrow P_{\leq n}(F) \twoheadrightarrow \Delta(F)$ und erhalten eine Surjektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\ker, \Delta(G)) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \Delta(G)).$$

Da hier ker eine endliche Δ-Fahne hat, folgt schon mal (1) für Ext^1. Schließlich sind alle Δ-Subquotienten einer Δ-Fahne von $P_{\leq n}(F)$ von der Form $\Delta(H)$, wo H ein Summand des $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathfrak{g}_0$-Moduls $(\tau_{\leq n-|F|} U(\mathfrak{g}_{>0})) \otimes_k F$ ist (und $\mathfrak{g}_0$ auf dem ersten Faktor durch die adjungierte Operation operiert). Damit $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\ker, \Delta(G))$ von Null verschieden sein kann, muß also ein solches H auch als direkter Summand im $\mathbb{Z}$-graduierten $\mathfrak{g}_0$-Modul $\Delta(G) = U(\mathfrak{g}_{<0}) \otimes_k G$ auftauchen, also auch in $(\tau_{\geq |F|-|G|} U(\mathfrak{g}_{<0})) \otimes_k G$.

Wir wissen aber allgemein aus der Darstellungstheorie reduktiver Lie-Algebren, daß es für gegebene endlichdimensionale Darstellungen U_1, U_2 und G bis auf Isomorphismus nur endlich viele einfache endlichdimensionale Darstellungen F gibt, für die $U_1 \otimes_k F$ und $U_2 \otimes_k G$ einen gemeinsamen Kompositionsfaktor besitzen. □

Als nächstes zeigen wir

Proposition 5.6. *Sei* $E \in \Lambda$*,* $m \leq |E|$*. So gibt es bis auf Isomorphismus genau ein unzerlegbares Objekt* $T = T_{\geq m}(E)$ *in* $\mathcal{O}$ *derart, daß gilt*

1. $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), T) = 0$ *für alle* $F \in \Lambda$ *mit* $|F| \geq m$*;*
2. *Es gibt eine Inklusion* $\Delta(E) \hookrightarrow T$*, deren Kokern eine endliche* Δ*-Fahne hat, in der als Subquotienten nur* $\Delta(F)$ *mit* $|E| > |F| \geq m$ *vorkommen.*

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis der Eindeutigkeit. Sei T' ein zweites Objekt, das unsere Bedingungen erfüllt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(E) & \hookrightarrow & T & \twoheadrightarrow & \mathrm{coker} \\ \| & & & & \\ \Delta(E) & \hookrightarrow & T' & \twoheadrightarrow & \mathrm{coker}'. \end{array}$$

Da nach (2) mit T' und (1) mit T die relevante Ext-Gruppe verschwindet, finden wir ein $\alpha : T' \to T$ das dies Diagramm kommutativ ergänzt. Ebenso finden wir $\beta : T \to T'$. Nun ist $\alpha \circ \beta$ nicht nilpotent, also ein Isomorphismus, da T unzerlegbar war und $\dim_k(\mathrm{End}_{\mathcal{O}} T) < \infty$. Dasselbe gilt für $\beta \circ \alpha$, und es folgt $T \cong T'$.

Als nächstes zeigen wir die Existenz von $T_{\geq m}(E)$ durch Induktion über m von oben. Als Basis für unsere Induktion können wir $T_{\geq |E|}(E) = \Delta(E)$ nehmen. Sei nun $T_{\geq m}(E)$ schon konstruiert. Wir bilden dann eine Folge $T^{(i)}$ von Objekten aus $\mathcal{O}$. Sie beginnt mit $T^{(0)} = T_{\geq m}(E)$. Ist $T^{(i)}$ schon konstruiert, und gibt es eine nicht spaltende Erweiterung $T^{(i)} \hookrightarrow T^{(i+1)} \twoheadrightarrow \Delta(F)$ mit $F \in \Lambda$, $|F| = m-1$, so nehmen wir als $T^{(i+1)}$ eine solche Erweiterung. Andernfalls breche unsere Folge bei $T^{(i)}$ ab.

Wir zeigen, daß jede solche Folge $T^{(i)}$ abbricht, und zwar bei einem möglichen $T_{\geq m-1}(E)$. In der Tat ist nach dem obigen Lemma 5.5

$$e(T) = \sum_{F \in \Lambda,\ |F|=m-1} \dim_k \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), T)$$

endlich für alle $T \in \mathcal{O}$ mit endlicher Δ-Fahne. Nun verschwindet ja die Ext-Gruppe $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), \Delta(G))$ falls $|F| = |G|$, und damit überzeugt man sich, daß $e(T^{(i+1)}) = e(T^{(i)}) - 1$. Folglich bricht unsere Folge ab mit einem Objekt $T^{(j)}$, das sicher schon mal die Bedingungen (1) und (2) an $T_{\geq m-1}(E)$ aus der Proposition erfüllt. Statt zu zeigen, daß dies $T^{(j)}$ tatsächlich unzerlegbar ist, nehmen wir bequemer einen unzerlegbaren direkten Summanden von $T^{(j)}$, dessen homogene Komponente vom Grad $|E|$ nicht verschwindet, und haben ein mögliches $T_{\geq m-1}(E)$ gefunden. □

Proposition 5.7. *Sei $E \in \Lambda$ und $|E| \geq n > m$. So gibt es eine Inklusion $T_{\geq n}(E) \hookrightarrow T_{\geq m}(E)$, und der Kokern jeder solchen Inklusion besitzt eine Δ-Fahne, in der nur $\Delta(F)$ mit $n > |F| \geq m$ als Subquotienten vorkommen.*

Beweis. Betrachten wir in $T_{\geq m}(E)$ das Erzeugnis T' aller homogenen Komponenten vom Grad mindestens n und bilden die kurze exakte Sequenz $T' \hookrightarrow T_{\geq m}(E) \twoheadrightarrow$ koker, so besitzt T' bzw. koker eine Δ-Fahne, in der nur $\Delta(F)$ mit $|F| \geq n$ bzw. $n > |F| \geq m$ vorkommen. Es folgt mühelos, daß T' bis auf die Unzerlegbarkeit alle Forderungen an $T_{\geq n}(E)$ erfüllt. Also ist $T_{\geq n}(E)$ schon mal Summand von T', und es folgt $[T_{\geq n}(E) : \Delta(F)] \leq [T_{\geq m}(E) : \Delta(F)]$. Andererseits folgt aber aus unserer induktiven Konstruktion von $T_{\geq m}(E)$ auch die umgekehrte Ungleichung, für $|F| \geq n$. Damit gilt für diese F sogar Gleichheit und wir folgern $T' \cong T_{\geq n}(E)$. Die Proposition ergibt sich nun mühelos. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir zumindest ein mögliches $T = T(E)$ durch $T = \lim_{n \to -\infty} T_{\geq n}(E)$ angeben. Wir bemerken gleich, daß jedes Element von $\operatorname{End} T$ entweder nilpotent oder eine Einheit ist, denn T ist unzerlegbar und alle seine homogenen Komponenten sind von endlicher Dimension, so daß die üblichen Argumente über die Fitting-Zerlegung greifen. Um auch die Eindeutigkeit nachzuweisen stützen wir uns auf

Lemma 5.8. *In $\mathcal{O}$ gibt es genügend injektive Objekte.*

Beweis. Für $M \in \mathcal{O}$ ist der größte $\mathbb{Z}$-graduierte $\mathfrak{g}$-Untermodul von $\mathcal{H}om_{\mathfrak{g}_0}(U, M)$, der in $\mathcal{O}$ liegt, ein injektives Objekt von $\mathcal{O}$ das M umfaßt. □

Bemerkung 5.9. Aus allgemeinen Gründen [HS71] I.9.2 folgt dann, daß $L(E)$ in $\mathcal{O}$ eine injektive Hülle $I(E)$ besitzt. Man kann weiter zeigen, daß $I(E)$ eine (möglicherweise unendliche) aufsteigende ∇-Fahne besitzt, und die Vielfachheiten hier durch $[I(E) : \nabla(F)] = [\Delta(F) : L(E)]$ beschrieben werden. Wir werden diese Resultate weder benutzen noch beweisen.

Lemma 5.10. *Sei $J \in \mathcal{O}$ gegeben, so daß* $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Delta(F), J) = 0 \quad \forall F \in \Lambda$. *So gilt auch* $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(M, J) = 0$ *für alle $M \in \mathcal{O}$ mit Δ-Fahne.*

Beweis. Wir wählen eine kurze exakte Sequenz $J \hookrightarrow I \twoheadrightarrow K$ mit I injektiv in $\mathcal{O}$. Dann haben wir auch eine exakte Sequenz

$$\operatorname{Hom}(M, J) \hookrightarrow \operatorname{Hom}(M, I) \to \operatorname{Hom}(M, K) \twoheadrightarrow \operatorname{Ext}^1(M, J),$$

die wie angedeutet mit einer Inklusion beginnt und mit einer Surjektion endet. Sei $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ eine Δ-Fahne von M. Die ersten drei Terme unserer Sequenz dürfen wir dann umschreiben zu

$$\varprojlim \operatorname{Hom}(M_i, J) \hookrightarrow \varprojlim \operatorname{Hom}(M_i, I) \to \varprojlim \operatorname{Hom}(M_i, K),$$

und nach Annahme steht hier für jedes feste i eine kurze exakte Sequenz. Verwenden wir unsere Voraussetzungen an J ein zweites Mal, so erkennen wir, daß zusätzlich alle Abbildungen des projektiven Systems der $\operatorname{Hom}(M_i, J)$ surjektiv sind. Damit ist nach [AM69], 10.2 auch der projektive Limes über unsere kurzen exakten Sequenzen eine kurze exakte Sequenz und folglich $\operatorname{Ext}^1(M, J) = 0$. □

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von $T = T(E)$. Sei $T' \in \mathcal{O}$ ein zweites Objekt, das alle Bedingungen aus dem Theorem erfüllt. Wie eben betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \Delta(E) & \hookrightarrow & T & \twoheadrightarrow & T/T'_1 \\ \| & & & & \\ \Delta(E) & \hookrightarrow & T' & \twoheadrightarrow & T'/T'_1 \end{array}$$

Nach dem Lemma gibt es einen Morphismus $\alpha : T' \to T$, der das Diagramm kommutativ ergänzt. Analog finden wir $\beta : T \to T'$. Dann ist $\alpha \circ \beta$ nicht nilpotent und folglich ein Automorphismus von T. Da aber auch T' unzerlegbar war folgt schließlich, daß α ein Isomorphismus ist. □

Bemerkung 5.11. Für die Vielfachheit, mit der $\Delta(F)$ als Subquotient in einer Δ-Fahne von $M \in \mathcal{O}$ auftaucht, erhalten wir nach obigem Lemma die Formel $[M : \Delta(F)] = \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \nabla(F))$. Insbesondere hängt diese Vielfachheit nicht von der Wahl der Δ-Fahne ab.

Schließlich erhalten wir nun die gewünschte Charakterformel für Kipp-Moduln.

Theorem 5.12. *Sei $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to k$ ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$. So gilt für alle $E, F \in \Lambda$ die Formel*

$$[T(E) : \Delta(F)] = [\nabla(k_{-\gamma} \otimes F^*) : L(k_{-\gamma} \otimes E^*)].$$

Beweis. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ ein maximaler Torus, so wird unser $\mathcal{M}_{\mathfrak{h}}$ aus Bemerkung 2.2 (2) genau die Kategorie $\mathcal{O}^\Delta$ aller Objekte aus $\mathcal{O}$ mit einer endlichen Δ-Fahne. Unsere Äquivalenz $\mathcal{O}^\Delta \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}^\Delta)^{\mathrm{opp}}$ aus Bemerkung 2.4 (3) muß $P_{\leq -n}(k_{-\gamma} \otimes E^*)$ überführen in $T_{\geq n}(E)$ für alle $n \leq |E|$, nach der Definition der $T_{\geq n}$. Für $n \leq |F|$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} [T(E) : \Delta(F)] &= [T_{\geq n}(E) : \Delta(F)] \\ &= [P_{\leq -n}(k_{-\gamma} \otimes E^*) : \Delta(k_{-\gamma} \otimes F^*)] \\ &= [\nabla(k_{-\gamma} \otimes F^*) : L(k_{-\gamma} \otimes E^*], \end{aligned}$$

die letzte Gleichung nach der Reziprozitätsformel. □

6. Projektive Objekte und Kipp-Moduln in Kategorien ohne Graduierung

Für die Anwendungen, die das Ziel dieser Arbeit sind, ist es bequem, die $\mathbb{Z}$-Graduierung auf den Moduln zu verstecken. Sei für diesen Abschnitt wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ eine $\mathbb{Z}$-graduierte Lie-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null mit $\dim_k \mathfrak{g}_i < \infty$ für alle i, mit $\mathfrak{g}_0$ reduktiv, und so daß $\mathfrak{g}$ halbeinfach ist unter $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_0$. Wir fordern aber zusätzlich, daß es ein Element $\partial \in \mathfrak{g}_0$ gibt mit $[\partial, X] = iX \quad \forall i \in \mathbb{Z},\ X \in \mathfrak{g}_i$.

Wie zuvor sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}_{\geq 0}$ und $B = U(\mathfrak{b})$. Bezeichne $\bar{\mathcal{O}}$ die Kategorie aller $\mathfrak{g}$-Moduln, die lokal endlich sind unter $\mathfrak{b}$ und halbeinfach unter $\mathfrak{g}_0$. Ich will kurz erklären, wie man Resultate für $\bar{\mathcal{O}}$ aus den entsprechenden Resultaten für $\mathcal{O}$ ableiten kann. Zunächst liegt ∂ nach Annahme im Zentrum von $\mathfrak{g}_0$, jedes $M \in \bar{\mathcal{O}}$ zerfällt also unter ∂ in Eigenräume $M = \bigoplus_{a\in k} M^a$. Betrachten wir für jedes $a \in k$ die Kategorie

$$\mathcal{O}_a = \{M \in \mathcal{O} \mid M^{a+i} = M_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

so gilt natürlich $\mathcal{O} = \prod_{a\in k} \mathcal{O}_a$. Andererseits betrachten wir auch für $\bar{a} \in k/\mathbb{Z}$ die Unterkategorie

$$\bar{\mathcal{O}}_{\bar{a}} = \{M \in \bar{\mathcal{O}} \mid M^b \neq 0 \Rightarrow b \in \bar{a}\}$$

und haben ganz analog $\bar{\mathcal{O}} = \prod_{\bar{a}\in k/\mathbb{Z}} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{a}}$. Nun liefert aber das Vergessen der Graduierung uns offensichtlich Äquivalenzen $\mathcal{O}_a \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{a}}$, mit deren Hilfe wir dann unsere Resultate von $\mathcal{O}$ auf $\bar{\mathcal{O}}$ übertragen können.

Um diese Resultate für $\bar{\mathcal{O}}$ zu formulieren, brauche ich einige Notationen. Bezeichne $\bar{\Lambda}$ die Menge aller Isomorphieklassen irreduzibler endlichdimensionaler Darstellungen von $\mathfrak{g}_0$. Für $E \in \bar{\Lambda}$ betrachten wir in $\bar{\mathcal{O}}$ den Verma-Modul $\Delta(E) = U \otimes_B E$. Er hat genau einen einfachen Quotienten $L(E)$. Wir betrachten weiter in $\bar{\mathcal{O}}$ für $E \in \bar{\Lambda}$ das Objekt $\nabla(E) = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g}_{\leq 0})}(U, E)^{\mathfrak{g}_0-endl}$, also den Raum aller $\mathfrak{g}_0$-endlichen Vektoren in besagtem Hom-Raum, und $L(E)$ ist der Sockel von $\nabla(E)$. Auf $\bar{\Lambda}$ sei $\leq$ die kleinste partielle Ordnung derart, daß $[\nabla(E) : L(F)] \neq 0 \Rightarrow E \geq F$ und $[\Delta(E) : L(F)] \neq 0 \Rightarrow E \geq F$. Bezeichne $\sim$ die von dieser partiellen Ordnung erzeugte Äquivalenzrelation auf $\bar{\Lambda}$. Für $\bar{\theta} \in \bar{\Lambda}/\sim$ setzen wir $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{\theta}} = \{M \in \bar{\mathcal{O}} \mid [M : L(E)] \neq 0 \Rightarrow E \in \bar{\theta}\}$.

Unsere Theoreme aus den vorhergehenden Abschnitten übersetzen sich wie folgt.

Theorem 6.1. *Der Funktor $(M_{\bar{\theta}})_{\bar{\theta}} \mapsto \bigoplus_{\bar{\theta}} M_{\bar{\theta}}$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\prod_{\bar{\theta}\in\bar{\Lambda}/\sim} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{\theta}} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{O}}.$$

Bemerkung 6.2. Dies Theorem verallgemeinert Resultate von [DGK82] und [RCW82].

Definition 6.3. Ein Kipp-Modul mit Parameter $E \in \bar{\Lambda}$ ist ein unzerlegbares Objekt $T = T(E) \in \bar{\mathcal{O}}$ derart, daß gilt

1. T besitzt eine Δ-Fahne, die mit $T_1 \cong \Delta(E)$ beginnt.
2. $\mathrm{Ext}^1_{\bar{\mathcal{O}}}(\Delta(F), T) = 0 \quad \forall F \in \bar{\Lambda}$.

Theorem 6.4. *Für jedes $E \in \bar{\Lambda}$ gibt es in $\bar{\mathcal{O}}$ einen Kipp-Modul $T(E)$ mit Parameter E. Er ist wohlbestimmt bis auf Isomorphismus.*

Bemerkungen 6.5. 1. [Pol91] Aus Bemerkung 5.9 folgt auch, daß es in $\bar{\mathcal{O}}$ genügend Injektive gibt, daß eine injektive Hülle $I(E)$ von $L(E)$ eine ∇-Fahne hat, und daß die Vielfachheiten in einer solchen ∇-Fahne gegeben werden durch die Reziprozitätsformel

$$[I(E) : \nabla(F)] = [\Delta(F) : L(E)] \quad \forall E, F \in \bar{\Lambda}.$$

2. Weiter folgt aus Lemma 4.3, daß $L(E)$ in $\bar{\mathcal{O}}$ eine projektive Decke besitzt, falls es nur endlich viele $F \in \bar{\Lambda}$ gibt mit $F \geq E$. Für diese projektive Decke gilt dann analog $[P(E) : \Delta(F)] = [\nabla(F) : L(E)] \quad \forall E, F \in \bar{\Lambda}$.

Sei ab jetzt $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to k$ ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$, sei also insbesondere $\mathfrak{g}$ erzeugt von $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_{-1}$. Bezeichne $\bar{\mathcal{O}}^{\Delta}$ die Kategorie aller Objekte von $\bar{\mathcal{O}}$ mit einer (endlichen) Δ-Fahne.

Theorem 6.6. *Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien $\bar{\mathcal{O}}^{\Delta} \to (\bar{\mathcal{O}}^{\Delta})^{\mathrm{opp}}$ unter der kurze exakte Sequenzen kurzen exakten Sequenzen entsprechen, und so daß $\Delta(E)$ übergeht in $\Delta(k_{-\gamma} \otimes E^*)$, für alle $E \in \bar{\Lambda}$.*

Falls $L(E)$ in $\bar{\mathcal{O}}$ eine projektive Decke $P(E)$ besitzt, so geht $P(E)$ über in $T(k_{-\gamma} \otimes E^*)$ unter einer solchen Äquivalenz. In jedem Fall haben wir aber

Theorem 6.7. *Für unsere Kipp-Moduln gilt die Charakterformel*

$$[T(E) : \Delta(F)] = [\nabla(k_{-\gamma} \otimes F^*) : L(k_{-\gamma} \otimes E^*)] \quad \forall E, F \in \bar{\Lambda}.$$

7. Kac-Moody-Algebren als Spezialfall

Sei $\mathfrak{g}$ eine Kac-Moody-Algebra, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ihre Cartansche Unteralgebra, $\Pi \subset \mathfrak{h}^*$ die Menge der einfachen Wurzeln. Für $\alpha \in \Pi$ erzeugen die Gewichtsräume $\mathfrak{g}_\alpha$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ in $\mathfrak{g}$ eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra, und wir bezeichnen mit $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$ den durch $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ charakterisierten Vektor.

Betrachten wir zunächst auf $\mathfrak{g}$ die $\mathbb{Z}$-Graduierung mit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha$. Da die einfachen Wurzeln linear unabhänig sind, gibt es $\partial \in \mathfrak{h}$ mit $\langle \alpha, \partial \rangle = 1 \quad \forall \alpha \in \Pi$, also $[\partial, X] = iX \quad \forall X \in \mathfrak{g}_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

Lemma 7.1. [Ark96] *Sei $\rho \in \mathfrak{h}^*$ gegeben mit $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1 \quad \forall \alpha \in \Pi$. So ist 2ρ ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Es gilt zu zeigen, daß $2\rho([X, Y]) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X \mathrm{ad}Y : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h})$ für alle $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\beta}$ und $\alpha, \beta \in \Pi$. Falls $\alpha \neq \beta$ verschwinden hier beide Seiten, falls $\alpha = \beta$ folgt die Gleichheit aus den Definitionen. □

In unserem Fall ist natürlich $\bar{\Lambda} = \mathfrak{h}^*$ und $[\Delta(\lambda) : L(\mu)] = [\nabla(\lambda) : L(\mu)] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Für $\alpha \in \Pi$ bezeichne $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ die Involution $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$. Die von den s_α erzeugte Untergruppe $\mathcal{W} \subset \mathrm{Aut}\mathfrak{h}^*$ heißt die Weylgruppe. Setzen wir $\mathcal{S} = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, so ist $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System. Man definiert die dot-Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathfrak{h}^*$ durch die Formel $x \cdot \lambda = x(\lambda + \rho) - \rho$. Sie ist von der Wahl von ρ unabhängig. In [Kas90] zeigt Kashiwara eine Vermutung von Deodhar, Gabber und Kac [DGK82], die besagt, daß die Kazhdan-Lusztig-Polynome $P_{x,y}$ zu $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ Kompositionsfaktor-Multiplizitäten für $\mathfrak{g}$ liefern.

Theorem 7.2. [Kas90] *Sei $\mathfrak{g}$ symmetrisierbar. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gegeben mit $\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \{1, 2, \ldots\} \quad \forall \alpha \in \Pi$. So gilt $[\Delta(x \cdot \lambda) : L(\nu)] = 0$ für $\nu \notin \mathcal{W} \cdot \lambda$ und*

$$[\Delta(x \cdot \lambda) : L(y \cdot \lambda)] = P_{x,y}(1) \quad \forall x, y \in \mathcal{W}.$$

Mit Theorem 6.7 folgt sofort die Verallgemeinerung des Hauptresultats von [CI89] auf symmetrisierbare Kac-Moody-Algebren.

Korollar 7.3. *Sei $\mathfrak{g}$ symmetrisierbar. Sei $\mu \in \mathfrak{h}^*$ gegeben mit $\langle \mu + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \{-1, -2, \dots\} \quad \forall \alpha \in \Pi$. So gilt $[T(y \cdot \mu) : \Delta(\nu)] = 0$ für $\nu \notin \mathcal{W} \cdot \mu$ und*

$$[T(y \cdot \mu) : \Delta(x \cdot \mu)] = P_{x,y}(1) \quad \forall x, y \in \mathcal{W}.$$

Wir betrachten auch noch den parabolischen Fall. Sei $\Pi_f \subset \Pi$ eine Menge von einfachen Wurzeln derart, daß die $\mathfrak{g}_\alpha$ mit $\pm\alpha \in \Pi_f$ eine endlichdimensionale (notwendig halbeinfache) Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ erzeugen. So besitzt $\mathfrak{g}$ auch eine $\mathbb{Z}$-Graduierung derart, daß $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_0$ falls $\pm\alpha \in \Pi_f$, und $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_1$ falls $\alpha \in \Pi - \Pi_f$. Auch mit dieser $\mathbb{Z}$-Graduierung sind unsere Bedingungen aus dem ersten Absatz von Abschnitt 6 erfüllt. Bezeichne $\rho_f \in \mathfrak{h}^*$ die Halbsumme der positiven Wurzeln von $\mathfrak{g}_0$.

Lemma 7.4. *Es gibt einen Charakter $\gamma = \gamma_f : \mathfrak{g}_0 \to \mathbb{C}$, der auf $\mathfrak{h}$ mit $2\rho - 2\rho_f$ übereinstimmt. Jeder derartige Charakter γ ist ein semi-infiniter Charakter für $\mathfrak{g}$.*

Beweis. Sicher ist $\mathfrak{g}$ auch mit unserer neuen Graduierung erzeugt von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_{-1}$. Weiter gilt $\langle \rho, \beta^\vee \rangle = \langle \rho_f, \beta^\vee \rangle = 1 \quad \forall \beta \in \Pi_f$, mithin verschwindet $2\rho - 2\rho_f$ auf $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \cap \mathfrak{h}$ und läßt sich in der Tat zu einem Charakter γ von $\mathfrak{g}_0$ ausdehnen. Wir müssen nur noch nachweisen, daß

$$\gamma([X, Y]) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0) \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

Gilt diese Formel mit einem Charakter γ für ein festes $X \in \mathfrak{g}_1$ bei beliebigem $Y \in \mathfrak{g}_{-1}$, so gilt sie auch für $[A, X]$ bei beliebigem $Y \in \mathfrak{g}_{-1}$ und $A \in \mathfrak{g}_0$. Wir überlassen diese Rechnung dem Leser und müssen nur noch prüfen, daß

$$\gamma([X_\alpha, X_\beta]) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_\alpha \operatorname{ad} X_\beta : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0)$$

für $\alpha \in \Pi - \Pi_f$, β eine Wurzel von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{g}_{-1}$, und $X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$. Für $\beta \neq -\alpha$ verschwinden in unserer Gleichung beide Seiten, und es bleibt der Fall $\beta = -\alpha$. Wir setzen dann $X_\beta = Y_\alpha$ und zerlegen $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_0^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_0^-$ unter der adjungierten Operation von $\mathfrak{h}$. Alle drei Summanden sind stabil unter $\operatorname{ad} X_\alpha \operatorname{ad} Y_\alpha$. Weiter ist $[Y_\alpha, \mathfrak{n}_0^+] = 0 = [X_\alpha, \mathfrak{n}_0^-]$, da das Gewicht dieser Klammern nicht im Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ liegt. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[X_\alpha, Y_\alpha] = \alpha^\vee$. Es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_\alpha \operatorname{ad} Y_\alpha : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0) &= \operatorname{tr}(\operatorname{ad} X_\alpha \operatorname{ad} Y_\alpha : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}) \\ &\quad + \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(\alpha^\vee) : \mathfrak{n}_0^- \to \mathfrak{n}_0^-) \\ &= 2 - 2\rho_f(\alpha^\vee) \\ &= \langle 2\rho - 2\rho_f, \alpha^\vee \rangle. \end{aligned}$$

□

Im parabolischen Fall können wir $\bar{\Lambda}$ identifizieren mit der Menge

$$\mathfrak{h}_f^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \Pi_f\},$$

indem wir $E \in \bar{\Lambda}$ sein höchstes Gewicht $\lambda(E) \in \mathfrak{h}^*$ zuordnen. Für $\lambda = \lambda(E) \in \mathfrak{h}_f^*$ schreiben wir auch $\Delta^f(\lambda)$ statt $\Delta(E)$ und nennen dies Objekt den parabolischen Verma-Modul mit höchstem Gewicht λ. Analog definieren wir $\nabla^f(\lambda)$, $T^f(\lambda)$ und $L^f(\lambda)$. Bei $L^f(\lambda)$ lassen wir den Index allerdings gleich wieder weg, da ja eh $L^f(\lambda) = L(\lambda)$.

Sicher gilt auch hier $[\nabla^f(\lambda) : L(\mu)] = [\Delta^f(\lambda) : L(\mu)] \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{h}_f^*$. Um diese Multiplizitäten anzugeben nehmen wir $\lambda = \lambda(E) \in \mathfrak{h}_f^*$ und betrachten für den $\mathfrak{g}_0$-Modul E nach [BGG75] die Auflösung

$$0 \to M_r \to \ldots \to M_1 \to M_0 \to E \to 0.$$

Hier ist also $M_i = \bigoplus_{l(z)=i} \Delta_f(z \cdot \lambda)$, wo $\Delta_f(\mu)$ den Verma-Modul von $\mathfrak{g}_0$ mit höchstem Gewicht μ bezeichnet und die Summe über alle Elemente z der Länge i in der Weylgruppe $\mathcal{W}_f = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Pi_f \rangle$ von $\mathfrak{g}_0$ läuft. (Man beachte, daß $z(\lambda + \rho_f) - \rho_f = z(\lambda + \rho) - \rho \quad \forall z \in \mathcal{W}_f$, da ja $\langle \rho, \alpha^\vee \rangle = 1 = \langle \rho_f, \alpha^\vee \rangle \quad \forall \alpha \in \Pi_f$.)

Wenden wir auf diese exakte Sequenz den Funktor $U \otimes_B$ an, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to U \otimes_B M_r \to \ldots \to U \otimes_B M_0 \to \Delta^f(\lambda) \to 0$$

mit $U \otimes_B M_i = \bigoplus_{l(z)=i} \Delta(z \cdot \lambda)$. Daraus folgt

$$[\Delta^f(\lambda) : L(\nu)] = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-1)^{l(z)} [\Delta(z \cdot \lambda) : L(\nu)]$$

für alle $\lambda \in \mathfrak{h}_f^*$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$. (Die BGG-Auflösung kann bei diesem Argument durch die Weylsche Charakterformel ersetzt werden, wenn man sich die Mühe macht, passende Grothendieck-Gruppen einzuführen.)

Bezeichne nun $\mathcal{W}^f \subset \mathcal{W}$ die Menge der kürzesten Vertreter für die Rechtsnebenklassen von $\mathcal{W}_f$. Die Multiplikation liefert also eine Bijektion $\mathcal{W}_f \times \mathcal{W}^f \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}$. Bezeichnet $\mathbb{N}\Pi$ die Menge aller Linearkombinationen mit natürlichen Koeffizienten von einfachen Wurzeln, so können wir $\mathcal{W}^f$ auch beschreiben durch

$$\mathcal{W}^f = \{x \in \mathcal{W} \mid x^{-1}\Pi_f \subset \mathbb{N}\Pi\}.$$

Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \Pi$ schon $x \cdot \lambda \in \mathfrak{h}_f^* \quad \forall x \in \mathcal{W}^f$.

Für $x, y \in \mathcal{W}^f$ bezeichne $n_{x,y} \in \mathbb{Z}[v]$ eines der beiden zugehörigen parabolischen Kazhdan-Lusztig-Polynome [Deo87], in der Normalisierung und Notation von [Soe97].

Proposition 7.5. *Sei $\mathfrak{g}$ symmetrisierbar. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ gegeben derart, daß $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \in \Pi$. So gilt $[\Delta^f(x \cdot \lambda) : L(\nu)] = 0$ für $\nu \notin \mathcal{W}^f \cdot \lambda$ und*

$$[\Delta^f(x \cdot \lambda) : L(y \cdot \lambda)] = n_{x,y}(1) \quad \forall x, y \in \mathcal{W}^f.$$

Beweis. Nach Deodhar [Deo87, Soe97] gilt für unsere parabolischen Polynome $n_{x,y}(1) = \sum_{z \in \mathcal{W}_f} (-1)^{l(z)} P_{zx,y}(1)$. □

Für gewisse parabolische Kipp-Moduln $T^f(\lambda)$ folgt damit auch eine Charakterformel. Bezeichne genauer $w_f \in \mathcal{W}_f$ das längste Element. Wir erklären eine neue Operation von $\mathcal{W}$ auf $\mathfrak{h}^*$ durch $x \centerdot \lambda = (w_f x w_f) \cdot \lambda$.

Korollar 7.6. *Sei $\mathfrak{g}$ symmetrisierbar. Sei ein Gersicht $\mu \in \mathfrak{h}^*$ gegeben derart, daß $\langle -w_f \mu - 2\rho + 2\rho_f, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}\ \forall \alpha \in \Pi$. So gilt $[T^f(y \centerdot \mu) : \Delta^f(\nu)] = 0$ für $\nu \notin \mathcal{W}^f \centerdot \mu$ und*

$$[T^f(y \centerdot \mu) : \Delta^f(x \centerdot \mu)] = n_{x,y}(1) \quad \forall x, y \in \mathcal{W}^f.$$

Beweis. Hier müssen wir nur rechnen. Zunächst gilt ja $\rho - \rho_f = w_f(\rho - \rho_f) = w_f \rho + \rho_f$, also $w_f \rho = \rho - 2\rho_f$. Weiter ist $-w_f \lambda(E)$ das höchste Gewicht von E^*. Sei $\gamma = 2\rho - 2\rho_f$ wie eben. Ist $x \centerdot \mu$ das höchste Gewicht von E, so ist das höchste

Gewicht von $k_{-\gamma}\otimes E^*$ genau $x\cdot\lambda$ für $\lambda = -w_f\mu - 2\rho + 2\rho_f$. Der Leser mag das selbst nachrechnen. Das Korollar folgt, insbesondere gilt auch $y \bullet \mu \in \mathfrak{h}_f^* \quad \forall y \in \mathcal{W}^f$. $\square$

8. Übersetzung in Resultate für Quantengruppen

Für die Anwendungen auf Quantengruppen an Einheitswurzeln ist der Fall von besonderer Bedeutung, daß $\mathfrak{g}$ die Affinisierung einer einfachen komplexen Lie-Algebra ist und Π_f alle Wurzeln bis auf die "affine Wurzel" enthält. Um die nötigen Notationen bereitzustellen beginne ich mit einer kurzen Wiederholung zur Affinisierung einer einfachen komplexen Lie-Algebra $\grave{\mathfrak{g}}$.

Man bildet zunächst die Schleifen-Algebra (oder loop algebra) $\mathcal{L}\grave{\mathfrak{g}} = \grave{\mathfrak{g}}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Ihre Elemente fassen wir auf als Abbildungen von der Kreislinie S^1 nach $\grave{\mathfrak{g}}$ und schreiben sie

$$X = X(t) = \sum X_i t^i.$$

Bezeichne $\grave{\kappa} : \grave{\mathfrak{g}} \times \grave{\mathfrak{g}} \to \mathbb{C}$ die Killing-Form. Man betrachtet die zentrale Erweiterung $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathcal{L}\grave{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}z$ von $\mathcal{L}\grave{\mathfrak{g}}$ mit Lie-Klammer

$$[X + aK, Y + bK] = [X, Y] - \operatorname{res}(\grave{\kappa}(X, dY))z$$

für alle $X, Y \in \mathcal{L}\grave{\mathfrak{g}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$, wo $d(\sum Y_i t^i) = \sum i Y_i t^{i-1} dt$ und $\operatorname{res}(\sum a_i t^i dt) = a_{-1}$ zu verstehen ist. Eigentlich sollte man hier die Killing-Form nicht so bevorzugen, sondern vielmehr $\mathbb{C}z$ interpretieren als den Dualraum des eindimensionalen Raums aller $\grave{\mathfrak{g}}$-invarianten Bilinearformen auf $\grave{\mathfrak{g}}$.

Wir können schließlich die Derivation $\partial = t\frac{\partial}{\partial t}$ von $\mathcal{L}\grave{\mathfrak{g}}$ durch die Vorschrift $\partial(z) = 0$ zu einer Derivation von $\tilde{\mathfrak{g}}$ fortsetzen, und indem wir diese Derivation zu $\tilde{\mathfrak{g}}$ adjungieren erhalten wir die sogenannte Affinisierung $\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}\partial$ von $\grave{\mathfrak{g}}$ mit Lie-Klammer

$$[X + a\partial, Y + b\partial] = [X, Y] + a\partial(Y) - b\partial(X)$$

für alle $X, Y \in \tilde{\mathfrak{g}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$.

Das Zentrum $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{g}$ ist genau die Gerade $\mathbb{C}z$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ versehen wir mit der $\mathbb{Z}$-Graduierung $\mathfrak{g}_0 = \grave{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}z \oplus \mathbb{C}\partial$, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g} \otimes t^i$ falls $i \neq 0$. Es ist also $\mathfrak{g}_i$ der Eigenraum von $\operatorname{ad}\partial$ zum Eigenwert i, und die semi-infiniten Charaktere $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to \mathbb{C}$ sind genau die linearen Abbildungen $\gamma : \mathfrak{g}_0 \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(\grave{\mathfrak{g}}) = 0$ und $\gamma(z) = 1$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist eine affine Kac-Moody-Algebra, und die Graduierung entspricht einer Wahl $\Pi_f \subset \Pi$, bei der $\Pi - \Pi_f$ nur aus einem Element α_0 besteht.

In ihren Artikeln [KL93, KL94] betrachten Kazhdan und Lusztig für $c \in \mathbb{C}$ eine gewisse durch Endlichkeitsbedingungen gegebene Unterkategorie der Kategorie $\tilde{\mathcal{O}}(z = c)$ aller $\tilde{\mathfrak{g}}$-Moduln, die von $(z - c)$ annulliert werden, und auf denen $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ lokal endlich sowie $\tilde{\mathfrak{g}}_{>0}$ lokal nilpotent operiert. Wir wollen nun unsere Resultate für $\bar{\mathcal{O}}$ in Resultate für $\tilde{\mathcal{O}}(z = c)$ übersetzen und stützen uns dabei auf [Kac90].

Für jedes Objekt M aus $\bar{\mathcal{O}}$ definiert ja der Casimir-Operator Ω einen lokal endlichen Endomorphismus $\Omega = \Omega_M \in \operatorname{End}_{\mathfrak{g}} M$, und für jeden Morphismus g: $M \to N$ gilt $g \circ \Omega_M = \Omega_N \circ g$. Für $a \in \mathbb{C}$ bezeichne dann $\bar{\mathcal{O}}(\Omega \simeq a)$ die Unterkategorie aller Objekte von $\bar{\mathcal{O}}$, auf denen $(\Omega - a)$ lokal nilpotent operiert.

Proposition 8.1. [Pol91] *Sei $c \in \mathbb{C}$, $c \neq -1/2$. So induziert das Vergessen der Operation von ∂ eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\bar{\mathcal{O}}(\Omega \simeq 0, z = c) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{O}}(z = c).$$

Bemerkungen 8.2.
1. Der Fall $z = -1/2$ ist in unseren Notationen gerade der "kritische Level". Statt z benutzt Kac das "kanonische" zentrale Element $K = 2hz$ mit $h = h^\vee$ der Coxeter-Zahl.
2. Unter den Voraussetzungen der Proposition definiert das Vergessen der Operation von ∂ allgemeiner Äquivalenzen
$$\bar{\mathcal{O}}(\Omega \simeq a, z = c) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{O}}(z = c)$$
für alle $a \in \mathbb{C}$. In der Tat kann man den Eigenwert von Ω beliebig einregeln, indem man die Operation von ∂ um eine additive Konstante abändert, vergleiche [Kac90], 12.8.3.

Beweis. Für eine Darstellung M von $\tilde{\mathfrak{g}}$ derart, daß jedes $m \in M$ annulliert wird von $\mathring{\mathfrak{g}} \otimes t^i$ für $i \gg 0$, definiert man wie in [Kac90], 12.8.4 den nullten Sugawara-Operator $T_0 : M \to M$. Operiert z durch einen Skalar $c \neq -1/2$ auf M, so definiert die Vorschrift $\partial = -(2h(2c+1))^{-1}T_0$ eine funktorielle Erweiterung von M zu einer Darstellung von $\mathfrak{g}$, siehe [Kac90], Corollary 12.8 (a). War hier M schon eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, so gilt weiter nach [Kac90], 12.8.5 die Relation
$$T_0 = -2h(2c+1)\partial + \Omega.$$
Wir definieren nun einen zu dem Funktor aus der Definition inversen Funktor. Auf $M \in \tilde{\mathcal{O}}(z = c)$ operiert ja T_0 lokal endlich. Erweitern wir also unsere $\tilde{\mathfrak{g}}$-Operation auf M durch $\partial = -(2h(2c+1))^{-1}T_0$ zu einer $\mathfrak{g}$-Operation, so operiert ∂ lokal endlich und Ω operiert durch Null. Definieren wir nun eine neue Operation von ∂ auf M als die Semisimplifizierung der ersten Operation von ∂, so erhalten wir eine neue Operation von $\mathfrak{g}$ auf M, und man sieht leicht, daß wir damit einen Funktor
$$\tilde{\mathcal{O}}(z = c) \to \bar{\mathcal{O}}(\Omega \simeq 0, z = c)$$
definiert haben. Andererseits muß auf einem Objekt der Kategorie $\bar{\mathcal{O}}(\Omega \simeq 0, z = c)$ die Operation von ∂ gerade die Semisimplifizierung der Operation von $-(2h(2c+1))^{-1}T_0$ sein, nach der oben zitierten Relation zwischen T_0, ∂ und Ω. Damit ist unser Funktor wirklich invers zu dem Funktor aus der Proposition. $\square$

Sei ab jetzt $\mathring{\mathfrak{g}}$ vom Typ ADE. Wir arbeiten zur Vereinfachung mit dem kanonischen zentralen Element $K = 2hz$, der kritische Level ist also $K = -h$. In diesem Fall zeigen Kazhdan und Lusztig [KL93, KL94] für viele $l \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}_{\leq 0}$ eine Äquivalenz von Kategorien
$$\tilde{\mathcal{O}}^e(K = -h - l) \cong U_\zeta\text{-mod}^{e,1}.$$
Hier bezeichnet $\tilde{\mathcal{O}}^e$ die Kategorie aller Objekte endlicher Länge in $\tilde{\mathcal{O}}$, wir setzten $\zeta = \exp(-\pi i/l)$, und U_ζ-mod^{e,1} steht für die Kategorie aller endlichdimensionalen Darstellungen vom Typ 1 der Quantengruppe mit dividierten Potenzen U_ζ. Speziell ist für $l \in \mathbb{Z}_{\geq h}$ der Block $\mathcal{B} \subset U_\zeta$-mod^{e,1} der trivialen Darstellung von U_ζ äquivalent zu dem Block von $\bar{\mathcal{O}}$, der $L(\mu)$ enthält mit $\mu = -((h+l)/2h)\gamma$. (Das gilt für jede Wahl eines semi-infiniten Charakters $\gamma = 2\rho - 2\rho_f$.)

Um die Vermutung 7.2 aus [Soe97] über den Charakter der Kipp-Moduln für Quantengruppen an Einheitswurzeln im ADE-Fall bei $l > 33$ nachzuweisen gilt es damit, in $\bar{\mathcal{O}}$ die Formel
$$[T^f(y \centerdot \mu) : \Delta^f(x \centerdot \mu)] = n_{x,y}(1)$$
zu prüfen, für alle $x, y \in \mathcal{W}^f$. Mit Korollar 7.6 reicht es dazu schon zu zeigen, daß gilt $\langle -w_f\mu - 2\rho + 2\rho_f, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ für alle $\alpha \in \Pi$.

Nun ist eine mögliche Definition der Coxeter-Zahl $\langle \rho_f, \alpha_0^\vee \rangle = -h+1$, wir erhalten also $\langle \gamma, \alpha_0^\vee \rangle = 2h$. Weiter ist $\langle \gamma, \alpha^\vee \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \Pi_f$. Da auch $w_f \gamma = \gamma$ erhalten wir $-w_f\mu - 2\rho + 2\rho_f = ((h+l)/2h)\gamma - \gamma = ((l-h)/2h)\gamma$, somit verschwindet dieses Gewicht auf allen Kowurzeln $\alpha^\vee$ mit $\alpha \in \Pi_f$ und nimmt auf $\alpha_0^\vee$ den Wert $l - h \in \mathbb{N}$ an.

Ist $\mathring{\mathfrak{g}}$ nicht vom Typ ADE, so kann man dieses Argument weitgehend übernehmen. Das einzige Problem ist, daß die Kazhdan-Lusztig-Vermutungen für affine Lie-Algebren in positivem Level nur für ganze Gewichte bewiesen sind. Hier gilt es, noch Lücken in der Literatur zu stopfen.

Wie man ausgehend von den Charakterformeln für Kipp-Moduln im Hauptblock $\mathcal{B}$ auch Charakterformeln für Kipp-Moduln "auf den Wänden" erhält, wird in [Soe97] erklärt.

References

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, 1969. MR **39:**4129

[Ark96] Sergej M. Arkhipov, *Semi-infinite cohomology of associative algebras and bar duality*, Preprint q-alg/9602013, 1996.

[BGG75] Joseph N. Bernstein, Israel M. Gelfand, and Sergei I. Gelfand, *Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules*, Lie Groups and their Representations (I. M. Gelfand, ed.), Halsted: New York, 1975, pp. 21–64. MR **58:**28285

[CI89] David H. Collingwood and Ron Irving, *A decomposition theorem for certain self-dual modules in the category $\mathcal{O}$*, Duke Math. J. **58** (1989), 89–102. MR **90k:**17010

[Deo87] Vinay V. Deodhar, *On some geometric aspects of Bruhat orderings II. The parabolic analogue of Kazhdan-Lusztig polynomials*, Journal of Algebra **111** (1987), 483–506. MR **89a:**20054

[DGK82] Vinay V. Deodhar, Ofer Gabber, and Victor Kac, *Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras*, Adv. in Math. **45** (1982), 92–116. MR **83i:**17012

[Don86] Stephen Donkin, *Finite resolutions of modules for reductive algebraic groups*, Journal of Algebra **101** (1986), 473–488. MR **87h:**20067

[HS71] Peter J. Hilton and Urs Stammbach, *A course in homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 4, Springer, 1971. MR **49:**10751

[Kac90] Victor G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd edition, Cambridge University Press, 1990. MR **92k:**17038

[Kas90] Masaki Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture for a symmetrizable Kac-Moody Lie algebra*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Birkhäuser, 1990, Progress in Mathematics 87, pp. 407–433. MR **93a:**17026

[KL93] David Kazhdan and George Lusztig, *Tensor structures arising from affine Lie algebras, I, II*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 905–1011. MR **93m:**17014

[KL94] David Kazhdan and George Lusztig, *Tensor structures arising from affine Lie algebras, III, IV*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 335–453. MR **93m:**17014

[Pol91] Patrick Polo, *Projective versus injective modules over graded Lie algebras and a particular parabolic category $\mathcal{O}$ for affine Kac-Moody algebras*, Preprint, 1991.

[RCW82] Alvany Rocha-Caridi and Nolan R. Wallach, *Projective modules over graded Lie algebras*, Mathematische Zeitschrift **180** (1982), 151–177. MR **83h:**17018

[Rin91] Claus Michael Ringel, *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*, Mathematische Zeitschrift **208** (1991), 209–223. MR **93c:**16010

[Soe97] Wolfgang Soergel, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln*, Represent. Theory (1997).

[Vor93] Alexander A. Voronov, *Semi-infinite homological algebra*, Invent. Math. **113** (1993), 103–146. MR **94f:**17021

Universität Freiburg, Mathematisches Institut, Eckerstrasse 1, D-79104 Freiburg, Germany

E-mail address: soergel@mathematik.uni-freiburg.de