REPRESENTATION THEORY
An Electronic Journal of the American Mathematical Society
Volume 10, Pages 86–129 (February 17, 2006)
S 1088-4165(06)00270-6

SUR CERTAINS PAQUETS D'ARTHUR ET INVOLUTION D'AUBERT-SCHNEIDER-STUHLER GÉNÉRALISÉE

C. MŒGLIN

ABSTRACT. In this paper, we construct a set of representations for classical p-adic groups. This set contains the discrete series and the unipotent representations. It is the basic tool to study Arthur's packets. The construction is done in two different ways: The first one uses Jacquet modules and gives explicit knowledge. The second one uses a generalization of the Aubert-Schneider-Stuhler involution and gives a resolution in the Grothendieck group.

Le but de cet article est de construire des paquets d'Arthur pour les groupes p-adiques orthogonaux ou symplectiques qui sont formés de représentations qui, en général, ne sont ni des séries discrètes ni des représentations duales des séries discrètes, duales au sens de l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler ([3], [17]). On sera plus explicite ci-dessous mais les représentations obtenues sont quand même très particulières et elles s'obtiennent à partir des séries discrètes par une dualité généralisant la précédente. Ce cas est encore un cas où le paquet est défini par un morphisme de $\psi : W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe et où, un tel morphisme étant fixé (avec des propriétés), les représentations du paquet sont en bijection avec les caractères, ϵ, du centralisateur de ce morphisme. Nos résultats nécessitent que p soit grand et ne sont non conditionnels que pour certains ψ; comme expliqué à la fin de l'introduction c'est [16] qui prouve que l'on a bien construit les paquets d'Arthur dans le cas où nos hypothèses sont satisfaites; la définition de [1] nécessite de montrer une égalité de trace ce que nous ferons en [16]. Soyons plus précis sur la description de l'article.

Soit ρ une représentation cuspidale irréductible de $GL(d_\rho, F)$; cela définit d_ρ. On suppose que ρ est autoduale et on note ψ_ρ le morphisme de Langlands de $W_F \to GL(d_\rho,\mathbb{C})$ qui lui correspond grâce à Harris-Taylor et Henniart. L'image de ψ_ρ est elle aussi autoduale ce qui entraîne qu'elle est incluse soit dans le groupe orthogonal $O(d_\rho,\mathbb{C})$ (on dit alors que ρ est orthogonal et on pose $\eta_\rho = 1$) soit dans le groupe symplectique $Sp(d_\rho,\mathbb{C})$ (on dit que ρ est symplectique et on pose $\eta_\rho = -1$). Soit maintenant a un entier, on note V_a la représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimension a; elle est à image dans $Sp(a,\mathbb{C})$ si a est pair et dans $O(a,\mathbb{C})$ si a est impair. Soit maintenant un ensemble de triplets $Jord := \{(\rho, a, b)\}$ avec ρ autoduale comme ci-dessus, $a, b \in \mathbb{N}$ et on construit une représentation ψ_{Jord} de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $GL(\sum_{(\rho,a,b)\in Jord} abd_\rho, \mathbb{C})$ par $\bigoplus_{(\rho,a,b)\in Jord} \psi_\rho \otimes V_a \otimes V_b$. On dit que $Jord$ est autodual si le signe, $(-1)^{a+b}\eta_\rho$, défini pour tout triplet

Received by the editors January 19, 2005 and, in revised form, December 5, 2005.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22E50.
Key words and phrases. Representations of classical p-adic groups, discrete series; Arthur's packet, Aubert-Schneider-Stuhler involution.

est indépendant du triplet choisi. Il est alors noté η_{Jord}. Soit $Jord$ autodual, on dit alors que $Jord$ est de type symplectique si pour tout $\eta_{Jord} = -1$ et orthogonal sinon. On appelle rang de $Jord$ l'entier $\sum_{(\rho,a,b)\in Jord} d_\rho ab$. On vérifie aisément que si $Jord$ est autodual de type symplectique (orthogonal) de rang N, la représentation ψ_{Jord} est à valeurs dans $Sp(N,\mathbb{C})$ (resp. $O(N,\mathbb{C})$). Ici on vient de définir un groupe attaché à ψ; dans le cas où N est impair, on veut que ψ soit à valeurs dans $SO(N,\mathbb{C})$, ce qui entraîne une condition supplémentaire que nous n'écrivons pas mais que l'on supposera toujours satisfaite.

Réciproquement l'ensemble des triplets $Jord$ autoduaux de type symplectique (resp. orthogonaux) de rang N classifient l'ensemble des classes d'isomorphie d'homorphismes, ψ, de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans $Sp(N,\mathbb{C})$ (resp. $O(N,\mathbb{C})$) tels que le commutant de ψ dans $Sp(N,\mathbb{C})$ (resp. $O(N,\mathbb{C})$) soit de centre fini.

Si ψ correspond à $Jord$, on écrit $Jord = Jord(\psi)$ et $\psi = \psi_{Jord}$. Quand $Jord$ et ρ sont fixés, on note $Jord_\rho := \{(a,b); (\rho,a,b) \in Jord\}$.

Convention. dans tout ce papier, on ne considérera que des ensembles $Jord$ autoduaux et les morphismes ψ qui leur correspondent. Si on se limite aux ensembles autoduaux, c'est uniquement parce qu'il est facile de ramener ceux qui ne le sont pas à ce cas; du point de vue des représentations, il faut faire une induction qui n'introduit pas de réductibilité. On ne fait pas cela ici.

On dit que $Jord$, ou le morphisme ψ qui lui correspond, est élémentaire si pour tout $(\rho,a,b) \in Jord$ soit a soit b vaut 1. On verra ci-dessous une caractérisation plus jolie, dans certains cas de cette propriété.

On dit que $Jord$ (ou ψ comme ci-dessus) est élémentaire de type cuspidal si en plus d'être élémentaire pour tout $(\rho,a,b) \in Jord$ si $a > 2$, alors $(\rho, a-2, b) \in Jord$ et si $b > 2$ alors $(\rho,a,b-2) \in Jord$. De façon plus imagée, on pourrait dire que $Jord$ est sans trous.

Caractère du centralisateur. Soit encore $Jord$ autodual comme ci-dessus et ψ le morphisme associé. Le centralisateur de ψ dans le groupe orthogonal ou symplectique (notion dépendant de η_{Jord}) est isomorphe à $\times_{(\rho,a,b)} O(mult_{Jord}(\rho,a,b))$ où (ρ,a,b) parcourt l'ensemble $Jord$ considéré sans multiplicité. Ainsi un caractère de ce centralisateur, trivial sur la composante neutre, s'identifie naturellement à un morphisme de $Jord$ dans $\{\pm 1\}$. On notera génériquement un tel morphisme ϵ.

On note Δ le morphisme diagonal de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$. Alors $\psi \circ \Delta$ est un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans un groupe orthogonal ou symplectique. On dit de façon habituelle que $\psi \circ \Delta$ est discret si le centralisateur de son image est un groupe fini. Et on dit que ψ est pseudo-discret si $\psi \circ \Delta$ est discret. En terme combinatoire, on sait calculer la décomposition de Jordan de $\psi \circ \Delta$ en fonction de celle de ψ; précisément si $Jord(\psi) = \{(\rho,a,b)\}$ éventuellement avec multiplicité, alors $Jord(\psi \circ \Delta) = \bigcup_{(\rho,a,b)\in Jord(\psi)} \{(\rho,\delta); \delta \in [a+b-1, |a-b|+1]\}$. Cela permet de traduire en terme combinatoire la condition d'être pseudo discret:

$$\forall (\rho,a,b), (\rho,a',b') \in Jord(\psi), [a'+b'-1, |a'-b'|+1] \cap [a+b-1, |a-b|+1] = \emptyset.$$

Cette condition est beaucoup plus forte que de simplement demander que $Jord(\psi)$ soit sans multiplicité.

Remarque. Soit $Jord$ autodual et pseudo discret et ψ le morphisme qui lui correspond. L'application naturelle $Cent\psi \to Cent(\psi \circ \Delta)$ se factorise en un isomorphisme si et seulement si ψ est élémentaire.

En effet, fixons $Jord = Jord(\psi)$ autodual et pseudo discret. On sait grâce à l'hypothèse d'autodualité et de l'absence de multiplicité à la fois pour $Jord(\psi)$ et pour $Jord(\psi \circ \Delta)$ que:

$$Cent(\psi) \simeq \times_{(\rho,a,b)\in Jord}\{\pm 1\}, \qquad Cent(\psi\circ\Delta) \simeq \times_{(\rho,\delta)\in Jord(\psi\circ\Delta)}\{\pm 1\};$$

le facteur correspondant à $(\rho, a, b) \in Jord$ s'envoie diagonalement dans le produit des facteurs correspondant aux $(\rho, \delta) \in Jord(\psi \circ \Delta)$ avec $\delta \in [a + b - 1, |a - b| + 1]$. L'hypothèse que ce morphisme est surjectif nécessite que $a + b - 1 = |a - b| + 1$. Cela s'écrit pour tout $(\rho, a, b) \in Jord$, $sup(a, b) + inf(a, b) - 1 = sup(a, b) - inf(a, b) + 1$ c'est-à-dire $inf(a, b) = 1$; ceci veut exactement dire que ψ est élémentaire. Le morphisme décrit est injectif (ici intervient nettement l'hypothèse de pseudo discret). Cela termine la preuve de la remarque.

Soit ϵ un caractère comme ci-dessus, en supposant que $Jord$ est élémentaire, pseudo discret; on voit ϵ comme un morphisme de $Jord(\psi \circ \Delta)$ dans $\{\pm 1\}$ et on dit que ϵ est alterné si $\epsilon(\rho, a) = -1$ pour tout $\rho, a \in Jord(\rho \circ \Delta)$ tel que a soit pair et minimum dans $Jord_\rho(\psi \circ \Delta)$ et si $\epsilon(\rho, a) \neq \epsilon(\rho, a')$ pour tout ρ, a, a' tels que $a \neq a' \in Jord_\rho(\psi \circ \Delta)$ et $Jord_\rho(\psi \circ \Delta) \cap]a, a'[= \emptyset$.

Le premier but de ce papier est d'associer à tout couple (ψ, ϵ) tel que $Jord(\psi)$ soit autodual élémentaire et pseudo discret, une représentation irréductible d'un groupe $G_\sharp$ tel que le groupe dual de $G_\sharp$, noté G^*, soit le groupe attaché à ψ ci-dessus; avec les notations traditionnelles ${}^LG_\sharp = G^* \times W_F$. Si N est impair $G_\sharp$ est $Sp(N - 1, F)$. Si N est pair, $G_\sharp$ est le groupe d'une forme orthogonal de dimension N si ψ est orthogonal et $N + 1$ si ψ est symplectique; pour déterminer complètement la forme orthogonale, on impose que son invariant de Hasse soit $+1$ exactement quand la restriction de ϵ au centre du groupe attaché à ψ est trivial et son discriminant (avec les normalisations tels que le discriminant ne dépend que du noyau anisotrope) est la classe de carré qui correspond au caractère quadratique $det(\psi_{W_F})$. Remarquons que dans le cas où ψ est symplectique, ce déterminant est 1.

Toutefois ce papier ne dit rien de nouveau dans le cas où ψ est de type cuspidal et où ϵ est alterné; pour faire bref, on dit qu'un tel couple (ψ, ϵ) est cuspidal. Je suis donc obligée de faire des hypothèses dans ce cas: fixons un sous-groupe de W_F, noté $\mathcal{I}$ tel que ψ soit trivial sur $\mathcal{I}$. L'hypothèse idéale est:

Hypothèse. *On suppose qu'à tout couple cuspidal (ψ', ϵ') tel que ψ' est trivial sur la deuxième copie de $SL(2, \mathbb{C})$ et tel que la restriction de ψ' à W_F soit trivial sur $\mathcal{I}$, on sait associer une représentation cuspidale de $G_\sharp$. On suppose aussi que cette application a la propriété suivante; soit (ψ', ϵ') comme ci-dessus, d'où $\pi(\psi', \epsilon')$ une représentation cuspidale irréductible. Soit aussi ρ comme ci-dessus, en particulier autoduale et unitaire, alors la représentation induite $\rho|\,|^s \times \pi(\psi', \epsilon')$ pour $s \in \mathbb{R}$ est irréductible sauf si $s = \pm(a + 1)/2$ où $a = sup\{\alpha \in Jord_\rho(\psi')\}$ si cet ensemble est non vide et, si cet ensemble est vide, a vaut -1 si $\eta_\rho\eta_\psi = 1$ et 0 sinon.*

Précisons que nous avons besoin de cette hypothèse pour G et tous les groupes de même type que G mais de rang plus petit. Pour traiter le cas d'un paquet associé à un paramètre ψ fixé, il suffit d'avoir l'hypothèse pour tous les (ψ', ϵ') cuspidaux tels que le noyau de la restriction de ψ' à W_F (vue comme une représentation de W_F) soit une sous-représentation de la restriction de ψ à W_F. Cette hypothèse est connue pour les morphismes ψ' dont la restriction à W_F se factorise par le Frobenius; est connue est vite dit, cela est certainement inclus dans les travaux de Lusztig [8] et est complètement explicité par exemple dans [9] pour le cas des groupes orthogonaux impairs. Il me semble que dans le cas où ψ est trivial sur le groupe de ramification sauvage est aussi compris par Lusztig car Lusztig a montré qu'il s'interprète en terme d'algèbre de Hecke; du côté des représentations, c'est le cas de niveau 0. En dehors de ces cas, il me semble que rien n'est connu mais les constructions de cuspidales progressant, cela devrait pouvoir se régler.

Et il nous suffit même de l'hypothèse plus technique de 2.1; c'est donc cette dernière hypothèse que l'on fait dans l'article. Toutefois, dans l'état actuel, je ne connais aucun cas où l'hypothèse plus précise de 2.1 soit satisfaite sans que celle faite ci-dessus le soit aussi pour un bon choix de $\mathcal{I}$. Expliquons ici très sommairement, que pour ψ, ϵ fixé, nous n'avons besoin de l'existence de la représentation cuspidale que pour un couple $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ construit en 2.1; cette représentation cuspidale, π_{cusp} est le support cuspidal (partiel cf. [12]) de la représentation que l'on va associée à ψ, ϵ. Et il faut aussi connaître les points de réductibilité des induites $\rho| |^s \times \pi_{cusp}$ pour s réel où ρ comme ci-dessus est tel que $Jord_\rho(\psi) \neq \emptyset$; c'est ce dernier point qui est un vrai affaiblissement mais au prix d'une limitation sur les ψ.

Le deuxième but de ce papier est de ramener une des conjectures d'Arthur à son analogue pour les séries discrètes; à savoir, fixons ψ autodual élémentaire pseudo discret. Pour ϵ un caractère du centralisateur de ψ notons ϵ_Z la restriction de ϵ au centre du groupe attaché à ψ; cela détermine $\sharp$ comme ci-dessus. On veut alors démontrer que la combinaison linéaire des distributions sur $G_\sharp$ (où l'on écrit la représentation au lieu de son caractère)

$$\sharp \sum_{\epsilon;\epsilon_Z=\sharp} \epsilon(\psi(z_2))\pi(\psi,\epsilon) \text{ est stable}$$

$$\Leftrightarrow \sharp \sum_{\epsilon;\epsilon_Z=\sharp} \pi(\psi\circ\Delta,\epsilon) \text{ est stable.}$$

Le z_2 ci-dessus est le centre de la deuxième copie de $SL(2,\mathbb{C})$. Le $\sharp$ mis devant n'est pas que pour la décoration, il est là pour que (dans le cas des groupes orthogonaux) la distribution pour $\sharp = 1$ et celle pour $\sharp = -1$ soient transferts l'une de l'autre. L'assertion pour les séries discrètes est connue dans quelques cas particuliers ([15],[11],[10]) donc pour des morphismes ψ où on connait l'hypothèse forte de cette introduction. Sous cette hypothèse forte, on a classifié, conjointement avec M. Tadic, les séries discrètes en [12] et [13]; c'est [12] qui utilise ces hypothèses fortes, [13] n'utilie que l'hypothèse faible faite en 2.1 et expliquée ci-dessus. On n'utiliera pas [12]. En particulier, en voyant $\psi\circ\Delta$ comme un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans G^* que l'on prolonge trivialement en un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans G^* trivial sur la 2e copie de $SL(2,\mathbb{C})$, on construit dans ce travail une représentation $\pi(\psi\circ\Delta,\epsilon)$. Il est facile d'identifier cette représentation à celle étudiée dans [13] (ce sont exactement les mêmes constructions) et le résultat principal de [13] montre que cette représentation est une série discrète.

La deuxième partie de l'article écrit $\pi(\psi,\epsilon)$ comme une combinaison linéaire (dans le group de Grotendieck) d'induites de restrictions de la représentation $\pi(\psi\circ\Delta,\epsilon)$ donc d'une série discrète. Pour obtenir l'assertion (conditionnelle) de stabilité, il faut pouvoir faire varier ϵ parmi tous les caractères du centralisateur de ψ; pour la fin de l'article (à partir de la section 7) on suppose que l'on sait construire

$\pi(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ pour ψ fixé et tous les caractères ϵ avec les propriétés de réductibilité annoncées; $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ dépend de ψ et de ϵ.

Ceci est totalement inspiré de la construction par Aubert de la généralisation de l'involution d'Iwahori-Matsumoto [3] et aussi [17]; cette involution ayant été simultanément étudiée dans ces 2 références.

La formule donnée ici permet de calculer les traces des représentations en fonction des traces d'induites de restriction de séries discrètes; sans être très explicite c'est quand même assez puissant pour comparer avec d'autres groupes. Dans un travail commun avec J.-L. Waldspurger (cf. [16]) on copie les constructions faites ici pour les groupes linéaires produit semi-direct avec l'automorphisme extérieur, θ, $g \mapsto^t g^{-1}$ et on montre que la distribution écrite ci-dessus a pour transfert le caractère de la représentation associée à ψ pour le groupe linéaire convenable prolongée convenablement à θ. On renvoit le lecteur intéressé à notre article qui demande des hypothèses dans le cas des séries discrètes et la connaissance d'un lemme fondamental. Mais cette formule de caractère détermine uniquement les représentations dans le paquet d'Arthur et justifie le fait que les $\pi(\psi, \epsilon)$ ici construites sont nécessairement (dans les cas où les hypothèses sont connues) les représentations du paquet d'Arthur associé à ψ ([16], paragraphe preuve du transfert, qui traite même des ψ généraux); par contre l'application $\epsilon \mapsto \pi(\psi, \epsilon)$ n'est pas en général celle d'Arthur, en fait cette application n'est pas canonique, elle n'est même pas fixée par les propriétés souhaitées pour l'endoscopie mais elle est fixée par ces propriétés et par le choix du prolongement de l'action de θ sur la représentation du groupe linéaire; et d'un point de vue local, il n'y a pas de choix canonique pour ce prolongement. On étudie les différents choix possibles en loc.cite, en calculant précisément les signes qui leur sont attachés (cf [16], paragraphe comparaison des normalisations) et l'influence que cela a sur l'application $\epsilon \mapsto \pi(\psi, \epsilon)$; dans [16] on étudie même le cas d'un ψ très général.

Je remercie le référé pour sa lecture précise et constructive de cet article et Irène Waldspurger pour son aide informatique.

1. Notations générales

Pour G et $G_\sharp$ comme dans l'introduction, pour tout m entier, on note $G(m)$, $G(m)_\sharp$ un groupe de même type que G ou $G_\sharp$ mais de rang m, du moins quand cela existe. Quand le rang est fixé de façon clair, il disparaît des notations. On fixe un parabolique minimal de G pour avoir la notion de parabolique standard.

On fixe ψ un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ dans G^*, autodual, élémentaire, pseudo discret et ϵ un morphisme (algébrique) de $Cent_{G^*}\psi$ dans ± 1; ϵ se factorise donc par la composante neutre. On a déjà défini $Jord(\psi)$ et on interprète ϵ comme un morphisme de $Jord(\psi)$ dans ± 1.

Dans tout ce papier, ρ est le nom générique pour une représentation cuspidale autoduale de $GL(d_\rho, F)$ (ce qui définit d_ρ). On a défini η_ρ dans l'introduction. On note $Jord_\rho(\psi) := \{(a,b); (\rho, a, b) \in Jord(\psi)\}$. Comme ψ est élémentaire, on récrit $Jord_\rho(\psi)$ sous la forme de couple (α, δ_α), où $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\delta_\alpha = \pm 1$ en faisant correspondre au triplet (ρ, a, b) le triplet $(\rho, sup(a,b), signe(a-b)1)$ ce qui n'est bien défini que si $a \neq b$; si $a = b$, ce qui est équivalent, avec nos hypothèses, à $\alpha = 1$, δ_α n'est pas défini; c'est évidemment volontaire et δ_1 pourra valoir $+1$ ou -1 à volonté. Le problème va se poser dans les hypothèses du genre soit (α, δ_α) et (β, δ_β) des éléments de $Jord_\psi(\rho)$ tel que $\delta_\alpha = \delta_\beta$; cette dernière hypothèse sera donc toujours satisfaite si α ou β vaut 1. De plus les éléments de $Jord_\rho(\psi)$ ont tous même parité; parfois on dira que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers pairs (resp. impairs) même si cet ensemble est vide mais si $\eta_\rho \neq \eta_{Jord}$ (resp. $\eta_\rho = \eta_{Jord}$).

Pour $(\alpha, \delta_\alpha) \in Jord_\rho(\psi)$, on pose $\alpha_- := sup\{\beta \in Jord_\rho(\psi); \beta < \alpha\}$ si un tel ensemble est non vide et $\alpha_- = 0$ si l'ensemble est vide mais α est pair et sinon on dit que α_- est non défini. Il est donc intéressant d'ajouter à $Jord_\rho(\psi)$ le couple $(0, \delta_0)$ quand $Jord_\rho(\psi)$ contient un élément (α, δ_α) avec α pair. Ici aussi δ_0 n'est pas défini et vaut à volonté $+1$ ou -1. On note $Jord_\rho^+(\psi)$ cet ensemble étendu quand il faut prolonger ϵ à cet ensemble, on le prolonge par $+1$.

Les hypothèses faites dans ce travail sont tel que pour tout $(\rho, \alpha, \delta_\alpha) \in Jord(\psi)$, δ_α est uniquement déterminé par (ρ, α) (pour ψ fixé bien sûr); quand on n'aura pas besoin de δ_α on pourra identifié $Jord_\rho(\psi)$ à un ensemble d'entiers (éventuellement vide).

Soit ψ, ϵ et ρ comme ci-dessus; on suppose que $Jord_\rho(\psi) \neq \emptyset$. On définit, quand l'ensemble intervenant est non vide

$$b_{\rho,\psi,\epsilon} := sup\{\alpha \in Jord_\rho(\psi); \forall i \in [0, [\alpha/2]],\ \text{soit } \alpha - 2i \in Jord_\rho^+(\psi) \\ \text{et } \epsilon(\alpha - 2i) = (-1)^i \epsilon(\alpha) \text{soit } \alpha = 1\};$$

sinon, on pose $b_{\rho,\psi,\epsilon} = -1$ quand $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers impairs et 0 sinon.

On note $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ le plus petit élément de $Jord_\rho(\psi)$, s'il existe, qui est strictement supérieur à $b_{\rho,\psi,\epsilon}$. Sinon on dit que $a_{\rho,\psi,\epsilon} = \infty$.

Ces 2 nombres sont importants; quand $a_{\rho,\psi,\epsilon} = \infty$, on dira occasionnellement que ψ est ρ cuspidale. Cela traduit le fait que l'on peut sans le moindre problème démontrer toute assertion faisant intervenir ρ comme si (ψ, ϵ) est vraiment cuspidal. Plus présément, soit (ψ, ϵ) est vraiment cuspidal, soit il existe ρ' non isomorphe à ρ tel que (ψ, ϵ) ne soit pas ρ' cuspidal; on peut alors tout obtenir tout assertion relativement à ρ par récurrence en utilisant dans les définitions que l'on va donner ρ' au lieu de ρ.

On garde les notations ci-dessus et en particulier, on fixe ρ mais on suppose aussi que $a_{\rho,\psi,\epsilon} \neq \infty$. On définit alors un nouveau couple (ψ', ϵ') par

si $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$, $Jord(\psi') = Jord(\psi) \setminus (\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}, \delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}) \cup (\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2, \delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}})$;

si $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$, $Jord(\psi') = Jord(\psi) \setminus \{(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}, \delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}), (\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon}, \delta_{b_{\rho,\psi,\epsilon}})\}$.

Et on définit ϵ' naturellement par restriction dans le cas 2 et, dans le cas 1, en posant en plus $\epsilon'(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2) = \epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$. On remarque que $Jord_\rho(\psi') = \emptyset$ uniquement dans le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 1 = a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2$ et que dans le cas contraire:

> si $b_{\rho,\psi,\epsilon} = a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2$, $b_{\rho,\psi',\epsilon'} = b_{\rho,\psi,\epsilon} - 2$ et $a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est le plus petit élément de $Jord_\rho(\psi)$ strictement supérieur à $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ s'il existe et ∞ sinon; en effet l'ensemble permettant de définir $b_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est exactement l'ensemble définissant $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ auquel on a enlevé son élément maximal, $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ lui-même, car $b_{\rho,\psi,\epsilon} - 2i \in Jord_\rho(\psi')$ pour tout $i \in [1, [b_{\rho,\psi,\epsilon}/2]]$ mais ceci n'est plus vrai pour $i = 0$ (avec l'alternance des signes). De même, l'élément minimal de $Jord_\rho(\psi')$ moins cet ensemble est l'élément minimal de $Jord_\rho(\psi) \setminus \{\alpha \in Jord_\rho(\psi); \alpha \leq a_{\rho,\psi,\epsilon}\}$;
>
> $b_{\rho,\psi',\epsilon'} = b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $a_{\rho,\psi',\epsilon'} = a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2$ si soit $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon} + 4$ soit $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 4$ mais $\epsilon(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon}) = \epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$; ici les ensembles définissant $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $b_{\rho,\psi',\epsilon'}$ ne changent pas;

$b_{\rho,\psi',\epsilon'} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$ si $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 4$ et $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) \neq \epsilon(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon})$; dans ce cas $a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est le plus petit élément de $Jord_\rho(\psi)$ strictement supérieur à $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ s'il existe et ∞ sinon; ici l'ensemble définissant $b_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est celui définissant $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ auquel on ajoute l'élément $a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2 = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$.

Vu l'importance jouée par $\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}$, on le notera pour alléger l'écriture, $\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$.

Une propriété. Dans tout ce travail, on utilise le fait qu'une représentation irréductible d'un groupe de même type que G est isomorphe à sa contragrédiente quitte à tordre par un automorphisme (venant du groupe des similitudes de la forme stabilisée par G). Cela a la conséquence suivante: soit σ une représentation d'un groupe linéaire et π' une représentation irréductible d'un groupe de même type que G; alors tout quotient irréductible de l'induite $\sigma \times \pi'$ est isomorphe à un sous-module irréductible de l'induite $\sigma^* \times \pi'$ et vice et versa. On trouve une démonstration de ce fait dans [14] chapitre 4, II.1 en tenant compte de la définition donnée en I.1.

Notation pour l'induction. Soit $G(m)$ un groupe de même type que G mais rang m ($m \in \mathbb{N}$) et soit π une représentation de G'; soit aussi L un produit de groupe linéaire $GL(n_1, F) \times \cdots \times GL(n_r, F)$, pour une collection d'entiers $n_1, \ldots, n_r$ et soit σ une représentation de L. On considère $L \times G(m)$ comme un sous-groupe de Levi standard du groupe $G(m + \sum_{i\in[1,r]} r_i)$; on note P le parabolique standard de Levi M et on pose

$$\sigma \times \pi := ind_P^{G(m+\sum_{i\in[1,r]} r_i)} \sigma \otimes \pi.$$

C'est une représentation et non pas un élément du groupe de Grothendieck même si souvent seule l'image de $\sigma \times \pi$ dans le groupe de Grothendieck nous importera. Cette notation a l'avantage d'alléger considérablement les notations et la rédaction et elle n'introduit aucune ambiguité car P est parfaitement défini dès que l'on connaît σ et π; elle ne pose un problème d'écriture que dans le cas où m vaudrait 0 où il faut admettre que π ne disparaît pas de la notation; par convention, il suffit de poser 1 l'unique représentation de $G(0)$. Mais même dans ce cas, il n'y a pas d'ambiguité dans le choix du parabolique étant donné nos hypothèses sur G.

2. Construction

2.1. **Support cuspidal partiel.** On fixe ψ un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans G^* (cf l'introduction pour la définition de G^*), élémentaire et ϵ un morphisme de $Cent_{G^*}\psi$ dans ± 1; si $G = Sp(2n, F)$ on suppose ici et dans tout le papier que $\prod_{(\rho,\alpha)\in Jord(\psi)} \epsilon(\alpha) = 1$. A (ψ, ϵ) on associe le support cuspidal partiel $(Jord_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ où $Jord_{cusp}$ est formé de couples (ρ, a) et ϵ_{cusp} est un morphisme de $Jord_{cusp}$ dans ± 1, c'est à dire que $Jord_{cusp}$ définit un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans un groupe $G^{*'}$ de même type que G^* mais en général de rang plus petit. On détermine cela uniquement par les propriétés suivantes (on rappelle que Δ est le plongement diagonal de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$):

$(\psi \circ \Delta, \epsilon) = (\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ exactement quand pour tout ρ tel que $Jord_\rho(\psi) \neq \emptyset$, $a_{\rho,\psi,\epsilon} = \infty$.

Sinon, on fixe ρ tel que $a_{\rho,\psi,\epsilon} \neq \infty$ et on définit (ψ', ϵ') avec ce ρ. On demande que $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}) = (\psi'_{cusp}, \epsilon'_{cusp})$, ce qui, par induction, permet de définir $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$.

Pour ψ, ϵ comme ci-dessus, on pose

$$N_{\psi,\epsilon} := 1/2(\sum_{(\rho,\alpha,\delta_\alpha)\in Jord(\psi)} \alpha\, d_\rho \; - \sum_{(\rho,\beta)\in Jord_{cusp}} \beta\, d_\rho).$$

On vérifie que l'on vient de définir un entier. Ainsi ψ_{cusp} se voit comme un morphisme de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $G^{*'}$ un groupe de même type que G^* mais de rang plus petit de $N_{\psi,\epsilon}$.

On a ainsi défini $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ et on remarque que si $G = Sp(2n, F)$ l'hypothèse sur ϵ entraîne que ϵ_{cusp} vérifie la même hypothèse. Plus généralement, quelque soit G, on vérifie que $\prod_{(\rho,\alpha)\in Jord} \epsilon(\alpha) = \prod_{(\rho,\alpha)\in Jord_{cusp}} \epsilon_{cusp}(\alpha)$ et on note ce nombre $\sharp_{cusp}$. On remarque que ψ_{cusp} lui-même dépend de ψ et de ϵ. Notons Δ l'application diagonale de $SL(2,\mathbb{C})$ dans $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$, on vérifie aisément que $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ ne dépend que de $\psi\circ\Delta$ et de ϵ.

On appelle données cuspidales un couple $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ vérifiant les propriétés suivantes: ψ_{cusp} est un morpisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans G^* dont la restriction à W_F est bornée et continue et la restriction à $SL(2,\mathbb{C})$ est algébrique et ϵ_{cusp} est un caractère du centralisateur de ψ_{cusp} dans G^* satisfaisant à:

Le centralisateur de ψ_{cusp} dans G^* est un groupe fini;

ψ_{cusp} est sans trou (c'est une terminologie que j'ai déjà employée) c'est-à-dire que si $(\rho, a) \in Jord(\psi)$ avec $a > 2$ alors $(\rho, a-2) \in Jord(\psi)$;

ϵ_{cusp} est alterné, c'est-à-dire que pour tout $(\rho, a) \in Jord(\psi)$ tel que $a \geq 2$, $\epsilon_{cusp}(\rho, a) = -\epsilon_{cusp}(\rho, a-2)$ avec la convention que $\epsilon_{cups}(\rho, 0) = 0$ si $a = 2$.

On remarque que le couple $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ du paragraphe précédent est bien une donnée cuspidale. On fixe ψ, ϵ et on fait l'hypothèse suivante:

Hypothèse. *On admet que l'on sait associer une représentation cuspidale, $\pi(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ de $G(n - N_{\psi,\epsilon})_{\sharp_{cusp}}$ au couple $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ vérifiant l'hypothèse de base suivante:*

Soit ρ comme ci-dessus tel que $Jord_\rho(\psi) \neq \emptyset$; l'induite $\rho|\,|^s \times \pi(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$ est irréductible pour tout $s \in \mathbb{R}$ sauf précisément $s = \pm(b_{\rho,\psi_{cusp},\epsilon_{cusp}} + 1)/2$ (la notation $b_{\rho,\psi_{cusp},\epsilon_{cusp}}$ est celle de 1 mais c'est aussi l'élément maximum de $Jord_\rho(\psi_{cusp})$ quand cet ensemble est non vide et 0 ou -1 quand $Jord_\rho(\psi_{cusp})$ est vide.)

Une conjecture que j'ai déjà formulée est qu'il y a une bijection entre l'ensemble des représentations cuspidales de G (à isomorphie près) et l'ensemble des données cuspidales (à conjugaison près) vérifiant les propriétés ci-dessus. Cette bijection n'est pas uniquement déterminée par les propriétés ci-dessus mais peu s'en faut; la difficulté apparaît dans la valeur de $\epsilon(\rho, a)$ quand $a = 1$. Je ne crois pas qu'il y ait une façon réellement canonique de fixer cette correspondance. Ici nous n'utilisons qu'une partie de cette conjecture.

L'hypothèse faite ici est beaucoup plus faible, en particulier on attire l'attention du lecteur sur le fait que l'on n'a fait d'hypothèse sur les points de réductibilité que pour les $\rho \simeq \rho^*$ telles que $Jord_\rho(\psi) \neq \emptyset$. On a vraiment gagné quelque chose et l'intérêt de ce gain est ce que l'on peut tirer de [2]*10.3 comme expliqué en* [16] *(paragraphe Remarques sur l'hypothèse, points de réductibilité des induites de cuspidales).*

2.2. **Convention importante.** Suivant la suggestion du référé, nous avons choisi finalement de prendre les hypothèses minimales nécessaires pour nos constructions; cela nous oblige à limiter les représentations ρ cuspidales qui interviennent dans les énoncés ci-dessous à celles pour lesquelles on connaît les points de réductibilités des induites $\rho|\,|^s \times \pi(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp})$; cela inclut tous les ρ telles que $Jord_\rho(\psi) \neq \emptyset$.

2.3. **Propriétés de base.**

Définition. Soient π une représentation lisse irréductible de $G(n)$ et ρ une représentation cuspidale irréductible, unitaire, de $GL(d_\rho, F)$ comme en 2.2. Soit aussi $x \in \mathbb{R}$; on dit que $Jac_{\rho|\,|^x}(\pi) \neq 0$ si π est sous-module d'une induite de la forme $\rho|\,|^x \times \pi'$, où π' est convenable de $G(n-d_\rho)$. Plus précisément, on considère le module de Jacquet de π relativement au parabolique standard (on a évidemment fixé un parabolique minimal) de Levi $GL(d_\rho) \times G(n-d_\rho)$ et son facteur direct sur lequel $GL(d_\rho)$ opère par un multiple de la représentation cuspidale $\rho|\,|^x$; on note ce facteur direct $\pi[\rho, x]$. Quand $\pi[\rho, x]$ est de la forme $\rho|\,|^x \otimes \Pi'$, on note cette représentation $\Pi' = Jac_{\rho|\,|^x}\pi$. Quand cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est commode de définir $Jac_{\rho|\,|^x}(\pi)$ dans le groupe de Grothendieck des représentations de $G(n-d_\rho)$ et cela interprète correctement l'assertion $Jac_{\rho|\,|^x}(\pi) \neq 0$. Mais dans ce papier, nous n'avons pas besoin de connaître $Jac_{\rho|\,|^x}\pi$ dans ce cas plus général dont je ne sais d'ailleurs pas s'il peut se produire.

Remarque. Soit ρ, x comme ci-dessus et π' une représentation irréductible d'un groupe de même type que G. Soit π un sous-module irréductible de l'induite $\sigma := \rho|\,|^x \times \pi'$; on suppose que $x \neq 0$ et que $Jac_{\rho|\,|^{-x}}\pi \neq 0$ alors que $Jac_{\rho|\,|^{-x}}\pi' = 0$. Alors σ est irréductible.

L'hypothèse sur π assure que π est isomorphe à un sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^{-x} \times \pi'$ (réciprocité de Frobenius). D'après la remarque faite à la fin de 1 cela entraîne que π est isomorphe à un quotient irréductible de σ. D'autre part $\rho|\,|^{-x} \otimes \pi'$ intervient avec la même multiplicité (1 en l'occurence) dans le module de Jacquet de π et dans celui de σ. Ainsi π intervient avec multiplicité 1 dans σ et c'est donc un facteur direct. Mais la réciprocité de Frobenius montre encore que σ n'a qu'un unique sous-module irréductible et σ coïncide donc avec π et est irréductible comme annoncé.

Le but est d'associer à tout couple (ψ, ϵ) une représentation irréductible, $\pi(\psi, \epsilon)$ qui dans le cas cuspidal est l'application dont l'existence est supposée. Ceci est expliqué dans l'introduction et l'hypothèse faite est celle du paragraphe précédent la définition précise est donné dans le paragraphe suivant, on a besoin des propriétés ci-dessous pour que la définition ait un sens.

On donne d'abord quelques propriétés de base de ces représentations; ce sont des propriétés techniques qui sont là pour justifier les définitions. Elles seront démontrées après les définitions. Dans ce qui suit x est toujours un réel.

Propriétés, énoncé.

Module de Jacquet: $Jac_{\rho|\,|^x}(\pi(\psi, \epsilon)) \neq 0$ nécessite que $2|x| + 1 \in Jord_\rho(\psi)$, $2|x| + 1 > b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $x = \delta_{2|x|+1}|x|$.

Irréductibilité non unitaire: On suppose que soit $x > 1/2$ et $2x - 1 \notin Jord_\rho(\psi)$ soit que $0 < x \leq (b_{\rho,\psi,\epsilon} - 1)/2$, alors l'induite $\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible.

(Irr)réductibilité unitaire: L'induite $\rho \times \pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible quand $1 \in Jord_\rho(\psi)$ et semi-simple sans multiplicité de longueur 2 sinon. Soit τ l'un des sous-modules irréductible ou toute l'induite quand celle-ci est irréductible, alors l'induite $\rho \times \cdots \times \rho \times \tau$ est irréductible pour autant de facteurs que l'on veut de ρ.

On a déjà défini (ψ', ϵ') à partir de (ψ, ϵ). On va aussi avoir besoin d'un couple $(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ quand $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$, avec $b_{\rho,\psi,\epsilon} \neq 0, 1$; sous cette hypothèse, $(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ s'obtient en enlevant à $Jord_\rho(\psi)$ tous ses éléments inférieurs ou égaux à $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ et en les remplaçant par les triplets $(\rho, \alpha+2, -\delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ pour $\alpha < b_{\rho,\psi,\epsilon}$ (en incluant $\alpha = 0$ si $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ est pair) et on définit $\tilde{\epsilon}(\alpha) = \epsilon(\alpha)$ pour $\alpha \in Jord_\rho(\psi)$ avec $\alpha > a_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $\tilde{\epsilon}(\alpha) = \epsilon(\alpha - 2)$ pour $\alpha \in Jord_\rho(\tilde{\psi})$ et $\alpha \leq a_{\rho,\psi,\epsilon}$. Une autre façon de présenter les choses est de séparer le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ est pair de celui où il est impair; dans le premier cas, on enlève seulement $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}, \delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ et on remplace les triplets $(\rho, \alpha, \delta_\alpha)$ pour $\alpha \leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$ par $(\rho, \alpha, -\delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ mais $\tilde{\epsilon}$ change aussi en $\tilde{\epsilon}(\alpha) = -\epsilon(\alpha)$ pour tout $\alpha \leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$. Dans le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ est impair, on enlève à $Jord_\rho(\psi)$ à la fois $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}, \delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ et $(\rho, 1)$ et le reste est comme dans le cas pair, changement de δ_α en $-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $\tilde{\epsilon}(\alpha) = -\epsilon(\alpha)$ pour $1 < \alpha \leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$.

Si $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 1$ et $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 3$ ou si $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 0$ et $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 2$, on pose $(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) = (\psi', \epsilon')$ uniquement pour unifier les notations.

On peut remarquer que $(\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}) = (\tilde{\psi}_{cusp}, \tilde{\epsilon}_{cusp})$.

2.4. **Définition, première étape.** On justifiera les définitions après les avoir énoncées mais on a besoin de la notation suivante, soit $[x, y]$ un segment, croissant ou décroissant dont les bornes peuvent être des demi-entiers; la représentation de $GL((y-x+1)d_\rho)$ induite $\rho| |^x \times \cdots \times \rho| |^y$ a un unique sous-module irréductible d'après les résultats maintenant standard de Zelevinsky; on note ce sous-module $\langle \rho| |^x, \ldots, \rho| |^y \rangle$.

Plus généralement, on noter entre $\langle \, \rangle$ le socle de la représentation écrite entre les crochets (le socle est la somme des sous-modules irréductibles, en fait dans ce travail le socle sera toujours irréductible).

Dans ce qui suite on fixe ρ; il est extrêmement facile de vérifier que ces définitions sont, en fait indépendantes de ce choix. Cela vient du fait que pour tout x, y des nombres réels et pour tout ρ, ρ' cuspidales unitaires de groupes linéaires, l'induites $\rho| |^x \times \rho'| |^y$ est irréductible. On montrera les assertions de l'énoncé ci-dessous en admettant par récurrence les propriétés de base pour les groupes $G(n')$ avec $n' < n$. Et ensuite on démontrera les propriétés de base pour les représentations ainsi construites. La construction se fait donc par induction et nécessite une double démonstration comme expliquée.

Définition, construction.

1. On suppose que $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$ ou que $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 0$; alors l'induite $\rho| |^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon')$ a un unique sous-module irréductible et c'est cette représentation que l'on note $\pi(\psi, \epsilon)$.
2. On suppose que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers pairs et que $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$; alors la représentation induite $\langle \rho| |^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}1/2} \rangle \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ a un unique sous-module irréductible. C'est ce sous-module que l'on appelle $\pi(\psi, \epsilon)$.
3. On suppose que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers impairs et que $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$, avec $b_{\rho,\psi,\epsilon} \neq 1$; alors les représentations induites
$$\langle \rho| |^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho \rangle \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$$
et
$$\langle \rho| |^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho \rangle | |^{-\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon')$$

ont exactement un sous-module irréductible en commun et $\pi(\psi,\epsilon)$ est par définition ce sous-module irréductible.

4. On suppose simplement que $a_{\rho,\psi,\epsilon}=b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$ et $b_{\rho,\psi,\epsilon}\neq 0$ est impair; la représentation induite $\langle \rho|\,|^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times \pi(\psi',\epsilon')$ a exactement 2 sous-modules irréductibles et $\pi(\psi,\epsilon)$ est l'un d'eux. On suppose que $b_{\rho,\psi,\epsilon}=a_{\rho,\psi,\epsilon}-2>0$ et est pair, alors

$$\pi(\psi,\epsilon)\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon').$$

Dans le cas 1, on doit montrer l'unicité du sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi',\epsilon')$. C'est immédiat par un calcul de module de Jacquet car, par la propriété de base "Module de Jacquet", $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{a_{\rho,\psi,\epsilon}}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi',\epsilon')=0$ puisque $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ n'est pas dans $Jord_\rho(\psi')$.

L'unicité affirmée au cas 2 n'est pas plus compliquée; on utilise ici le fait que pour tout $x\in[1/2,(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2]$, $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}}\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)=0$ car $(\rho,2x+1,\delta_{\rho,\psi,\epsilon})\notin Jord(\tilde\psi)$; c'est la présence du signe $\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ qui assure cela.

Le cas 3 est plus pénible; on calcule la multiplicité de la représentation

$$\bigotimes_{x\in[(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2,0]}\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}\otimes\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)$$

dans le module de Jacquet de la représentation induite $\sigma:=\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho\rangle\times\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)$. On calcule d'abord $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\sigma$; cela vaut $\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2},\dots,\rho\rangle\times\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)$ et puis de proche en proche on calcule, pour x variant comme ci-dessus, $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}}\cdots Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\sigma$. Et tant que $x>0$, on trouve $\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(x-1)},\dots,\rho\rangle\times\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)$; pour cela on utilise à chaque fois le fait que, par les propriétés de base, pour ces valeurs de x, $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}}\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)=0$. Par contre pour $x=0$, comme $\rho\simeq\rho^*$, il y a une multiplicité 2 qui arrive. Cela entraîne que la multiplicité de la représentation $\otimes_{x\in[(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2,0]}\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}\otimes\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)$ dans le module de Jacquet de σ est exactement 2. Ainsi, par réciprocité, la représentation induite σ a au plus 2 sous-modules irréductibles. On vérifie (en utilisant la définition de $\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)$) qu'il existe une inclusion:

$$\pi(\tilde\psi,\tilde\epsilon)\hookrightarrow\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon').$$

Maintenant, d'après les résultats bien connus de Zelevinski, la représentation de $GL(N,F)$ (N convenable) induite

$$\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho\rangle\times\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$$

est de longueur 2, le sous-module irréductible est $\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$ et on note le quotient irréductible

$$\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle,\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho\rangle.$$

On a alors les morphismes équivariants suivants:

$$\begin{array}{c}
0 \\
\uparrow \\
\langle\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle,\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}}-1)/2,\dots,\rho\rangle\rangle\times\pi(\psi',\epsilon') =: \sigma_q \\
\uparrow \\
\sigma\hookrightarrow\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho\rangle\times\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon') \\
\uparrow \\
\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon') =: \sigma_s \\
\uparrow \\
0
\end{array}$$

On montre que $\sigma\cap\sigma_s$ est non nul en calculant la multiplicité de la représentation $\tau := \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\otimes\cdots\otimes\rho\otimes\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ dans le module de Jacquet de σ_q; cette multiplicité est 1, alors qu'elle est 2 dans le module de Jacquet de σ. Ainsi σ et σ_s ont au moins un sous-module irréductible en commun. Notons σ_1 un tel sous-module et on veut montrer que σ_1 est unique. Pour pouvoir conclure, il faut calculer plus précisément les modules de Jacquet successifs, $Jac_\rho\cdots Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}}\cdots Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\sigma_s)$. D'après les résultats de Bernstein-Zelevinski, ce terme a une filtration dont le gradué a un terme isomorphe à $\bigotimes_{x\in[\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2,0]}\rho|\,|^x\otimes$ $\langle\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')$, un autre terme isomorphe à $\bigotimes_{x\in[\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2,0]}\rho|\,|^x\otimes\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')$. Mais τ est un sous-module de la première induite écrite et est un quotient de la deuxième induite écrite sans en être un sous-module (en effet si c'était un sous-module, alors $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\neq 0$ ce qui est exclu par les propriétés de base pour $\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$). De plus, cela décrit toutes les apparitions de τ comme sous-quotient du module de Jacquet. Comme τ est un sous-module du module de Jacquet de tout sous-module de σ, cela entraîne que σ_s contient au plus un sous-module irréductible isomorphe à un sous-module de σ. Cela permet de terminer le cas 3.

Pour le cas 4; le nombre de sous-modules irréductibles de l'induite

$$\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')$$

est inférieur ou égal à la multiplicité de la représentation

$$\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\dots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle\otimes\pi(\psi',\epsilon')$$

dans le module de Jacquet de l'induite. Un calcul facile qui utilise la première des propriétés de base montre que cette multiplicité est 2. Il y a donc au plus 2 sous-modules et il faut montrer qu'elle est exactement 2. Supposons d'abord que $b_{\rho,\psi,\epsilon}=1$; ici on doit montrer que l'induite $\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\rho\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')$ a exactement 2 sous-modules irréductibles. Par la 3e propriété de base, on sait que l'induite $\rho\times\pi(\psi',\epsilon')$ est semi-simple de longueur 2, sans multiplicité; on la décompose donc en $\pi_+\oplus\pi_-$. Et on a une inclusion:

$$\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\rho\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')\hookrightarrow\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\times\rho\times\pi(\psi',\epsilon')\simeq\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\times\pi_+\oplus\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\times\pi_-.$$

Par un calcul de module de Jacquet, on vérifie que pour $\zeta=\pm$, l'intersection

$$\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}},\rho\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')\cap\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\times\pi_\zeta$$

ne peut être une inclusion de la première représentation dans la seconde, mais ceci entraîne aussi que cette intersection ne peut être vide. D'où l'existence de 2 sous-modules irréductibles distincts et, d'ailleurs, non isomorphes car avec des modules de Jacquet non isomorphes. Le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon} \neq 1$ mais impair se traite de façon similaire.

Il reste à démontrer 5 sous les hypothèses qui y sont faites. En appliquant le cas 1 de proche en proche pour $\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ (ce qui est loisible), on vérifie qu'il existe une inclusion:

$$\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}) \hookrightarrow \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi',\epsilon').$$

Il existe donc un sous-quotient irréductible σ de l'induite pour le groupe linéaire convenable

$$\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}) \hookrightarrow \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}$$

tel que

$$\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}) \hookrightarrow \sigma \times \pi(\psi',\epsilon').$$

En utilisant les propriétés des modules de Jacquet par induction, on vérifie que la seule possibilité est que σ soit précisément le sous-module de l'induite écrite. Ainsi

$$\begin{aligned}\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow &\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \\ &\times \langle \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2},\ldots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi',\epsilon').\end{aligned}$$

L'induite pour le groupe linéaire convenable

$$\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \times \langle \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2},\ldots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$$

est de longueur exactement 2, son sous-module irréductible est

$$\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$$

et on note σ_0 son quotient irréductible. Il suffit donc de vérifier que $\pi(\psi,\epsilon)$ n'est pas sous-module de $\sigma_0 \times \pi(\psi',\epsilon')$. Pour cela il suffit de prouver que le module de Jacquet de cette induite ne contient pas de terme de la forme:

$$\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \otimes \cdots \otimes \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1//2} \otimes \pi'',$$

où π'' est n'importe quelle représentation. Pour le voir on peut encore remplacer $\sigma_0 \times \pi(\psi',\epsilon')$ par une induite de la forme:

$$\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}3/2} \times \langle \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \times \pi''',$$

avec $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}}\pi''' = 0$ pour tout $x \in [1/2,(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2]$; et l'assertion résulte alors des formules de Bernstein-Zelevinsky.

2.5. **Preuve de la propriétés de base, module de Jacquet.** Bien que les définitions ne soient pas terminées, on peut déjà démontrer des propriétés de base de 2.3. On fixe donc (ψ,ϵ).

Propriétés des modules de Jacquet. Fixons ρ et x; on suppose que $Jac_{\rho|\,|^x}\pi(\psi,\epsilon) \neq 0$. Supposons d'abord que $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$. On a défini (ψ',ϵ') et on sait que $\pi(\psi,\epsilon)$ est un sous-module de l'induite $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi',\epsilon')$. Les résultats maintenant standard de Bernstein et Zelevinski, montrent que soit $x = \delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ soit $Jac_{\rho|\,|^x}(\pi(\psi',\epsilon')) \neq 0$ soit $x = -\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$. Le premier cas est une des valeurs autorisées. Examinons le deuxième cas, c'est-à-dire $Jac_{\rho|\,|^x}\pi(\psi',\epsilon') \neq 0$. Rappelons que $b_{\rho,\psi',\epsilon'} \in \{a_{\rho,\psi,\epsilon}-2, b_{\rho,\psi,\epsilon}\}$. Par récurrence, si $Jac_{\rho|\,|^x}\pi(\psi',\epsilon') \neq 0$, on sait que $2|x|+1 \in Jord(\psi')$, $2|x|+1 > b_{\rho,\psi',\epsilon'}$ et que le signe de x est $\delta_{2|x|+1}$. Comme $Jord(\psi') = Jord(\psi) \setminus \{(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon},\delta_{\rho,\psi,\epsilon})\} \cup \{\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon}-2,\delta_{\rho,\psi,\epsilon}\}$, le seul cas à exclure est celui où $b_{\rho,\psi',\epsilon'} = b_{\rho,\psi,\epsilon} < a_{\rho,\psi,\epsilon}-2 = a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ et $x = x_0 :=$

$\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2$. Par construction de $\pi(\psi',\epsilon')$, cette représentation est sous-module d'une induite de la forme $\rho|\,|^{x_0}\times\pi''$, où π'' est convenable; ce sont les définitions données où on a en plus $Jac_{\rho|\,|^{x_0}}\pi''=0$. Par unicité, on vérifie qu'alors:

$$(*)\qquad \pi(\psi,\epsilon)\hookrightarrow\langle\rho|\,|^{x_0+1},\rho|\,|^{x_0}\rangle\times\pi'$$

et $Jac_{\rho|\,|^{x_0}}$ de cette induite est 0. D'où $Jac_{\rho|\,|^{x_0}}\pi(\psi,\epsilon)=0$.

Il reste encore à éliminer le dernier cas, $x=x_1:=-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$. Le cas où $a_{\rho,\psi',\epsilon'}=a_{\rho,\psi,\epsilon}-2$ résulte de $(*)$ ci-dessus démontré sous les mêmes hypothèses dès que l'on a vérifié que $Jac_{\rho|\,|^{x_1}}\pi'=0$, ce qui est facile. Considérons donc le cas où $b_{\rho,\psi',\epsilon'}=a_{\rho,\psi,\epsilon}-2$.

L'assertion $Jac_{\rho|\,|^{x_1}}\pi(\psi,\epsilon)\neq 0$ est équivalente à l'assertion $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi',\epsilon')$ est irréductible comme on l'a remarqué au début de 2.3. Mais $\pi(\psi,\epsilon)$ en est aussi un sous-module par définition, et elle n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans cette induite parce que $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\otimes\pi(\psi',\epsilon')$ intervient avec la même multiplicité (1 en l'occurence) dans le module de Jacquet de $\pi(\psi,\epsilon)$ et dans celui de l'induite. Il faut donc démontrer que cette induite n'est pas irréductible.

Il faut encore distinguer le cas où $a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est défini de celui où il ne l'est pas (c'est-à-dire il est infini). Dans le deuxième cas, si $\pi(\psi',\epsilon')$ est cuspidal cela résulte de la définition des blocs de Jordan et donc des propriétés que nous avons admises dans "hypothèse"; c'est d'ailleurs le cas de base clé même si c'est le plus simple. Supposons encore que l'on ait dans le 2e cas mais que $\pi(\psi',\epsilon')$ n'est pas cuspidal; on distingue encore les 2 cas suivants; il existe $\rho'\neq\rho$ mais avec les mêmes propriétés et $x'\neq 0$ tel que $\pi(\psi',\epsilon')=\langle\rho|\,|^{x'}\times\pi(\psi'',\epsilon'')\rangle$ où ψ'',ϵ'' se déduit de ψ',ϵ' en remplaçant un bloc de $Jord(\psi')$ (ρ',a',δ') en $(\rho',a'-2,\delta')$ et en définissant convenablement ϵ''; il est utile de remarquer que (ρ',a',δ') est aussi dans $Jord(\psi)$. Par hypothèse de récurrence $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi'',\epsilon'')$ n'est pas irréductible et d'après ce qui précède contient un unique sous-module irréductible que l'on identifie comme étant $\pi(\psi_1,\epsilon_1)$ où ψ_1 se déduit de ψ en remplaçant (ρ',a',ϵ') par $(\rho',a'-2,\delta')$ dans l'ensemble de ses blocs de Jordan. On a donc maintenant:

$$\begin{aligned}\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi',\epsilon')&\hookrightarrow\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\rho|\,|^{x'}\times\pi(\psi'',\epsilon'')\\&\simeq\rho'|\,|^{x''}\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi'',\epsilon''),\end{aligned}$$

et cette dernière représentation contient l'induite $\rho|\,|^{x'}\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)$. On montre maintenant que, l'intersection étant prise dans l'induite du milieu:

$$\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi',\epsilon')\cup\rho'|\,|^{x'}\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)\neq 0$$

en calculant simplement la multiplicité du terme

$$\rho'|\,|^{x'}\otimes\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\otimes\pi(\psi'',\epsilon'')$$

dans le module de Jacquet de chacune des induites écrites; il vaut exactement 1 à chaque fois. Il n'y a plus qu'à remarquer que dans le module de Jacquet de cette intersection on ne trouve pas $\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\otimes\pi(\psi',\epsilon')$ car il ne se trouve pas dans le module de Jacquet de $\rho|\,|^{x'}\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)$. Ainsi l'intersection n'épuise pas l'induite

$$\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi',\epsilon').$$

Ceci prouve sa réductibilité. Il reste à regarder le cas où $\pi(\psi',\epsilon')$ est l'un des 2 sous-modules irréductibles d'une induite de la forme

$$\langle\rho'|\,|^{x'},\ldots,\rho'|\,|^{y'}\rangle\times\pi(\psi'',\epsilon'').$$

On procède exactement de la même façon.

Dans le premier cas, c'est-à-dire celui où $a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est défini, on a alors $a_{\rho,\psi',\epsilon'} > a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi',\epsilon'}+2$. Démontrer l'irréductibilité pour $\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ est équivalente à la même assertion pour $\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ changé en $-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$. On va donc supposer que $\delta_{\rho,\psi,\epsilon} = \delta_{\rho,\psi',\epsilon'}$. On se ramène aussi sans difficulté au cas où $a_{\rho,\psi',\epsilon'} = a_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$. En définissant (ψ'',ϵ'') à partir de (ψ',ϵ') comme on a défini (ψ',ϵ') à partir de (ψ,ϵ) et en posant $\delta = \delta_{\rho,\psi',\epsilon'} = \delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ (par hypothèse), on vérifie que

$$\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2} \times \pi(\psi'',\epsilon'').$$

Ainsi, deux cas sont possibles:

$$\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \langle\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \pi(\psi'',\epsilon'');$$
$$\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \langle\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi'',\epsilon'').$$

Dans le premier cas, avec les propriétés de base par récurrence pour (ψ'',ϵ''), on vérifie aisément que

$$Jac_{\rho|\,|^{-\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} \langle\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \pi(\psi'',\epsilon'') = 0$$

ce qui, à fortiori, donne $Jac_{\rho|\,|^{-\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi,\epsilon) = 0$ comme cherché. On suppose donc que l'on est dans le deuxième cas. Comme on doit avoir $Jac_{\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi,\epsilon) \neq 0$, le deuxième cas n'est possible que si $Jac_{\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi'',\epsilon'') \neq 0$. Avec les propriétés de base, cela entraîne que $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi'',\epsilon''}$ et donc que $\epsilon''(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = \epsilon''(\rho, a_{\rho,\psi'',\epsilon''} - 2)$. Le premier signe n'est autre que $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon} + 2)$ et le deuxième est $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$, mais ceci ne nous sert pas. On vérifie simplement que cela entraîne une inclusion pour (ψ''',ϵ''') défini à partir de (ψ'',ϵ''):

$$\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}$$
$$\times \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \pi(\psi''',\epsilon''').$$

Or on a, grâce à la propriété de base dite d'irréductibilité non unitaire de $\pi(\psi''',\epsilon''')$ pour le 2e isomorphisme ci-dessous:

$$\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \pi(\psi''',\epsilon''')$$
$$\simeq \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi''',\epsilon''')$$
$$\simeq \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi''',\epsilon''')$$

et la suite exacte:

$$\begin{array}{c}
0\\
\uparrow\\
\langle\rho|\,|^{-\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle\rangle \times \pi(\psi''',\epsilon''')\\
\uparrow\\
\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi''',\epsilon''')\\
\uparrow\\
\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi''',\epsilon''')\\
\uparrow\\
0
\end{array}$$

L'image de $\pi(\psi,\epsilon)$ dans le quotient est nécessairement 0 car $Jac_{\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi,\epsilon) \neq 0$. Et on obtient la propriété cherchée en remarquant que

$$Jac_{\rho|\,|^{-\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi''',\epsilon''') = 0.$$

On a ainsi terminé la preuve de la propriété de base pour les modules de Jacquet des représentations $\pi(\psi,\epsilon)$ quand $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$.

Supposons que l'on ait $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$ mais que $b_{\rho,\psi,\epsilon} \geq 2$. Ainsi $\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho^{x_0}\rangle \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ avec $x_0 = \delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2$ ou 0 suivant que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers pairs ou impairs; mais aussi $\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$. Ainsi si $Jac_{\rho|\,|^x}(\pi(\psi,\epsilon)) \neq 0$, les modules de Jacquet de chacune de ces induites doivent avoir un sous-quotient de la forme $\rho|\,|^x \times \tilde{\pi}$. Cela permet de conclure; on ne fait pas les détails, c'est beaucoup plus facile que la démonstration ci-dessus.

Dans le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 1$ ou 0 et $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$, on ne dispose plus que d'une induite; dans le cas où $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers pairs, il faut encore montrer que $Jord_{\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}}\pi(\psi,\epsilon) = 0$. Encore une fois, cela revient à démontrer que la représentation induite $\rho|\,|^{1/2} \times \pi(\psi',\epsilon')$ est réductible (cf la remarque du début de 2.3). Cela se fait par récurrence comme ci-dessus, la base de la récurrence étant le cas cuspidal où on utilise la définition des blocs de Jordan.

Le cas où $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers impairs est plus difficile. Il faut démontrer que $Jac_\rho\pi(\psi,\epsilon) = 0$; nous allons le faire en détail. On remarque que l'induite $\sigma := \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}, \rho\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$ a un unique quotient irréductible: cela revient au même (cf la propriété qui termine 1) que de calculer les sous-modules irréductibles de l'induite $\langle \rho, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$. Or $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}} Jac_\rho(\sigma) \simeq \pi(\psi',\epsilon')$ est irréductible d'où l'assertion par réciprocité de Frobenius. On sait que σ a 2 sous-modules irréductibles que l'on note σ_1 et σ_2; l'un des 2, disons $\sigma_1 = \pi(\psi,\epsilon)$. En tant que sous-quotient irréductible de l'induite, σ_1 et σ_2 interviennent avec multiplicité 1. Supposons que $Jac_\rho\sigma_1 \neq 0$. On calcule Jac_ρ de l'induite et cela vaut $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}} \times \pi(\psi',\epsilon')$. D'après la propriété de base sur l'irréductibilité appliquée par récurrence à $\pi(\psi',\epsilon')$, cette dernière induite est irréductible. Ainsi $Jac_\rho\sigma_1$ coïncide avec cette induite irréductible. Ainsi le module de Jacquet de $Jac_{\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}} Jac_\rho\sigma_1 \neq 0$ et σ_1 est aussi quotient de l'induite $\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}, \rho\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$. La multiplicité 1 assure alors que σ_1 est facteur direct et l'existence de σ_2 empêche l'irréductibilité; cela contredit l'unicité du quotient irréductible et termine la preuve.

2.6. **Fin des définitions.** Il reste donc un cas où $\pi(\psi,\epsilon)$ n'a pas été défini, c'est celui où $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 1$ et $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 3$. On reprend la notation (ψ',ϵ') déjà introduite; d'après la propriété de réductibilité appliquée à $\pi(\psi',\epsilon')$, on sait que $\sigma' := \rho \times \pi(\psi',\epsilon')$ est semi-simple de longueur 2 et sans multiplicité. On écrit donc cette induite sous la forme $\pi_+ \oplus \pi_-$. On reviendra ci-dessous sur les choix dans cette décomposition. Et on note $\pi(\psi,\epsilon)$ l'unique sous-module irréductible de $\rho|\,|^{\delta_3} \times \pi_\zeta$ où $\zeta = \epsilon(\rho,3)\delta_{\rho,3}$. Il semble intéressant de faire dépendre le choix de cette façon.

Au sujet du choix dans la décomposition de σ': considérons d'abord le cas où $Jord_\rho(\psi)$ ne contient que 2 éléments; il n'y a aucun choix canonique (à mon sens) dans ce cas pour séparer les 2 sous-modules de σ' et on fait donc n'importe quel choix ici. Par contre si $Jord_\rho(\psi)$ contient au moins 3 éléments, on peut distinguer les 2 sous-modules, en considérant par récurrence que les choix ont été faits pour les groupes plus petits. Pour cela, on remarque que $a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ est bien défini (c'est l'élément minimal de $Jord_\rho(\psi')$). On définit alors (ψ'',ϵ'') à partir de (ψ',ϵ') en remplaçant simplement dans $Jord_\rho(\psi')$, $a_{\rho,\psi',\epsilon'}$ par 1. On a une inclusion

$$\pi(\psi',\epsilon') \hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}}\rangle \times \pi(\psi'',\epsilon'').$$

Ainsi

$$\sigma' \hookrightarrow \rho \times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}}\rangle \times \pi(\psi'', \epsilon'').$$

Or on a la suite exacte

$$0 \to \langle \rho, \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}}\rangle\rangle$$
$$\to \rho \times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}}\rangle \to \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho\rangle \to 0.$$

On pose

$\sigma'_s := \sigma' \cap \langle \rho, \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}}\rangle\rangle \times \pi(\psi'', \epsilon'')$,

σ'_q l'image de σ' dans $\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho\rangle \times \pi(\psi'', \epsilon'')$.

Ainsi σ' est la somme de ces 2 représentations en admettant le cas où l'une pourrait être nulle et l'autre non irréductible; si aucune des 2 n'est nulle, puisque l'on sait que σ' est semi-simple de longeur 2, chacune est irréductible. Il est facile de vérifier que ni σ'_s ni σ'_q ne sont nuls: en effet on calcule $Jac_\rho \sigma'$ qui vaut 2 fois $\pi(\psi', \epsilon')$. On calcule $Jac_\rho \sigma'_s$: c'est un sous-quotient de $\tau := \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}(a_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi',\epsilon'}}\rangle \times \pi(\psi'', \epsilon'')$. On a la même assertion pour $Jac_\rho \sigma'_q$. Mais $\pi(\psi', \epsilon')$ n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans l'induite τ et σ' ne peut donc être réduite ni à σ'_s ni à σ'_q.

Un choix raisonable me semble être $\sigma'_q = \pi'_{\epsilon(a_{\rho,\psi',\epsilon'})}$ et $\sigma'_s = \pi'_{-\epsilon(a_{\rho,\psi',\epsilon'})}$. Mais il y a sûrement des situations où cela n'est pas le meilleur choix. Mais ce choix n'influe pas sur les résultats de stabilité par exemple.

2.7. **Propriétés d'irréductibilité.**

Proposition. *On fixe (ψ, ϵ) d'où $a_{\rho,\psi,\epsilon}, b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$. On fixe aussi $x \geq 1/2$ tel que soit $2x - 1 \notin Jord_\rho(\psi) \cup \{0\}$ soit $2x + 1 \leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$. Alors $\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible.*

Le principe de la démonstration est le suivant dans quasiment tous les cas. On fixe $x \geq 1/2$ et δ tel que $(\rho, 2x+1, \delta) \notin Jord_\rho(\psi)$; ceci est toujours possible par un bon choix de δ. Grâce à la propriété sur les modules de Jacquet qui vient d'être démontrée, on sait que l'induite $\sigma := \rho|\,|^{\delta x} \times \pi(\psi, \epsilon)$ a un unique sous-module irréductible que l'on note τ. De plus la multiplicité de τ comme sous-quotient de σ est 1 (calcul de module de Jacquet). Il suffit donc de montrer que τ est aussi un quotient de σ ou, ce qui revient au même (cf la propriété qui termine 1), un sous-module de $\rho|\,|^{-\delta x} \times \pi(\psi, \epsilon)$.

L'idéal pour prouver ce genre de chose est d'utiliser les opérateurs d'entrelacement; il faut en définir un qui soit holomorphe de $\rho|\,|^{\delta x} \times \pi(\psi, \epsilon) \to \rho|\,|^{-\delta x} \times \pi(\psi, \epsilon)$ et montrer qu'il est injectif. Je n'ai pas choisi cette voie ici car il y a des difficultés que je ne sais pas résoudre. On va utiliser une méthode avec les modules de Jacquet.

Revenons donc à la situation ci-dessus; pour montrer que τ est sous-module de $\rho|\,|^{-\delta x} \times \pi(\psi, \epsilon)$ il suffit de démontrer que $Jac_{\rho|\,|^{-\delta x}} \tau \neq 0$ si $Jac_{\rho|\,|^{-\delta x}} \pi(\psi, \epsilon) = 0$. Dans les cas où $Jac_{\rho|\,|^{-\delta x}} \pi(\psi, \epsilon) \neq 0$ on vérifiera que cette projection du module de Jacquet est irréductible; on calcule alors le module de Jacquet le long d'un parabolique de Levi $GL(2d_\rho) \times G(n - 2d_\rho)$ et on le projette sur le support cuspidal de $GL(2d_\rho)$, qui est aussi celui de l'induite irréductible de ce groupe, $\rho|\,|^{-\delta x} \times \rho|\,|^{-\delta x}$ et il suffit de démontrer que ce module de Jacquet pour τ est non nul.

Pour démontrer que $Jac_{\rho|\,|^{-\delta x}} \tau \neq 0$, il suffit de trouver une représentation irréductible d'un GL convenable, notée T, et un couple (ψ_1, ϵ_1) tels que

les représentations d'un GL convenable $\rho|\,|^{\pm x} \times T$ soient irréductibles;

$\rho|\,|^x \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$ soit aussi irréductible;

et $\pi(\psi,\epsilon)$ est un sous-module de $T\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)$.

Car alors:

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow \rho|\,|^{\delta x}\times\pi(\psi,\epsilon)\hookrightarrow\rho|\,|^{\delta x}\times T\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)\\ &\simeq T\times\rho|\,|^{\delta x}\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)\simeq T\times\rho|\,|^{-\delta x}\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)\simeq\rho|\,|^{-\delta x}\times T\times\pi(\psi_1,\epsilon_1).\end{aligned}$$

Ce qui donne une inclusion $\tau\hookrightarrow\rho|\,|^{-\delta x}\times\tau'$ avec τ' une représentation convenable de $G(n)$. On va faire une liste des cas que cela règle. On suppose d'abord que $\epsilon(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon})\neq\epsilon(\rho,b_{\rho,\psi,\epsilon})$.

Cas où $(\rho,2x+1)\notin Jord_\rho(\psi)$ et $x\neq(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2$. Il suffit de prendre $T:=\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}$ et $(\psi_1,\epsilon_1)=(\psi',\epsilon')$. L'irréductibilité de $\rho|\,|^{\pm x}\times T$ vient de l'hypothèse sur x et du fait que $x\neq(a+1)/2$ par l'hypothèse générale. L'irréductibilité de $\rho|\,|^{x}\times\pi(\psi',\epsilon')$ vient de ce que x vérifie les bonnes hypothèses pour (ψ',ϵ'); ici on utilise le fait que $b_{\rho,\psi',\epsilon'}\geq b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et que $Jord_\rho(\psi')=Jord_\rho(\psi)\setminus(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon},\delta_{\rho,\psi,\epsilon})\cup(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon}-2,\delta_{\rho,\psi,\epsilon})$.

Cas où $(\rho,2x+1)\in Jord_\rho(\psi)$ mais $2x+1\neq a_{\rho,\psi,\epsilon}$. On prend les mêmes T et (ψ_1,ϵ_1) que ci-dessus. Il y a 2 points supplémentaires à vérifier; d'abord que $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,2x+1}x}}\pi(\psi,\epsilon)$ est irréductible ou nul. L'hypothèse sur x assure que soit $(\rho,2x-1)\notin Jord_\rho(\psi)$ soit $2x+1\leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$, cas de nullité du Jac. S'il y a non nullité le Jac correspondant est isomorphe à $\pi(\psi_2,\epsilon_2)$ où $Jord(\psi_2)=Jord(\psi)\setminus(\rho,2x+1,\delta_{\rho,2x+1})\cup(\rho,2x-1,\delta_{\rho,2x+1})$ avec ϵ_2 qui se déduit de ϵ de façon évidente; d'où l'irréductibilité. Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow\rho|\,|^{-\delta x}\times T\times\rho|\,|^{-\delta x}\times\pi(\psi_2,\epsilon_2)\\ &\simeq\rho|\,|^{-\delta x}\times\rho|\,|^{-\delta x}\times T\times\pi(\psi_2,\epsilon_2).\end{aligned}$$

D'où encore $Jac_{\rho|\,|^{-\delta x}\times\rho|\,|^{-\delta x}}\tau\neq 0$ et c'est ce que l'on voulait.

Cas où $x=(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2$; on prend les mêmes T et (ψ',ϵ'). La difficulté ici est que $T\times\rho^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}x}$ n'est pas irréductible. On obtient donc uniquement une inclusion

$$\tau\hookrightarrow\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\times T\times\pi(\psi',\epsilon')\simeq T\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\times\pi(\psi',\epsilon').$$

On peut encore remplacer $T\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}$ par un sous-quotient irréductible convenable. En fait il y a en 2, l'un est $\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle$ et l'autre est $\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2},\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$. On note $\tilde{T}$ celui qui convient et dans tous les cas, on écrit encore $\pi(\psi',\epsilon')\hookrightarrow\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\times\pi(\psi'',\epsilon'')$ car $(a_{\rho,\psi',\epsilon'},\delta_{\rho,\psi',\epsilon'})=(a_{\rho,\psi,\epsilon}-2,\delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ alors que $b_{\rho,\psi',\epsilon'}=b_{\rho,\psi,\epsilon}<2x-1=a_{\rho,\psi,\epsilon}-4$. Donc on continue les inclusions

$$\tau\hookrightarrow\tilde{T}\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\times\pi(\psi'',\epsilon'')\simeq\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\times\tilde{T}\times\pi(\psi'',\epsilon'').$$

Cela montre encore que $Jac_{\rho|\,|\pm(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\tau\neq 0$ comme cherché.

Cas où $x=(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ avec toujours $\epsilon(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon})\neq\epsilon(\rho,b_{\rho,\psi,\epsilon})$. Supposons que $b_{\rho,\psi,\epsilon}<a_{\rho,\psi,\epsilon}-4$. On prend alors $T=\langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle$ et pour (ψ_1,ϵ_1) le couple qui se déduit de (ψ,ϵ) en changeant $(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon},\delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ en $(\rho,b_{\rho,\psi,\epsilon}+2,\delta_{\rho,\psi,\epsilon})$. L'irréductibilité de $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times T$ est un résultat pour les groupes linéaires et l'irréductibilité de $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi_1,\epsilon_1)$ est obtenue

par récurrence en remarquant que $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}-2) \notin Jord_\rho(\psi_1)$. On a donc encore

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times T \times \pi(\psi_1,\epsilon_1)\\ &\hookrightarrow \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\\ &\times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}, \dots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle \times \pi(\psi_1,\epsilon_1).\end{aligned}$$

Et on obtient encore la non nullité de $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\tau$.

Supposons maintenant que $b_{\rho,\psi,\epsilon} = a_{\rho,\psi,\epsilon}-4$. On sépare encore 2 cas. Celui où $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ est aussi l'élément maximal de $Jord_\rho(\psi)$. Dans ce cas, avec la notation traditionnelle (ψ',ϵ'), la représentation $\pi(\psi',\epsilon')$ n'est pas forcément cuspidale mais on peut aisément se ramener à ce cas: si elle n'est pas cuspidale, il existe ρ' non isomorphe à ρ tel que (ψ',ϵ') ne soit pas ρ' cuspidale. On utilise alors ρ' dans la définition de $\pi(\psi',\epsilon')$ et une récurrence facile donne la propriété du module de Jacquet cherchée. On suppose donc que $\pi(\psi',\epsilon')$ est cuspidale. Le point est ici de démontrer, sous l'hypothèse que $\pi(\psi',\epsilon')$ est cuspidal que

$$\sigma := \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \pi(\psi',\epsilon')$$

est de longueur exactement 2, où $a = a_{\rho,\psi,\epsilon}$ avec $a_{\rho,\psi,\epsilon}-2$ le plus grand élément de $Jord_\rho(\psi')$. On vérifie aisément que cette induite est soit de longueur 2 soit contient une série discrète: le module de Jacquet cuspidal a un semi-simplifié qui est somme de 8 représentations irréductibles qui sont de la forme $\lambda_{\zeta,\zeta'} := \rho|\,|^{\zeta(a-1)/2} \otimes \rho|\,|^{\zeta'(a-1)/2} \otimes \pi(\psi',\epsilon')$, avec $\zeta,\zeta' \in \{\pm 1\}$, chacune intervenant avec multiplicité 2. De plus σ a un unique quotient irréductible, σ_q qui dans son module de Jacquet contient la représentation $\lambda_{-,-}$, nécessairement avec multiplicité 2 et un unique sous-module irréductible σ_s dont le module de Jacquet contient la représentation $\lambda_{+,+}$ aussi avec multiplicité 2. Les représentations σ_s et σ_q se déduisent l'une de l'autre par l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler. En outre soit τ un sous-quotient irréductible de σ dont le module de Jacquet contient l'une des représentations $\lambda_{\zeta,\zeta'}$ avec $\zeta\zeta' = -$, alors il contient aussi l'autre représentation du même type à cause de l'irréductibilité de l'induite dans $GL(2d_\rho)$ de $\rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{-(a-1)/2}$ (rappelons qu'ici nécessairement $a > 2$). Si σ_s a son module de Jacquet qui contient $\lambda_{+,-}$ et $\lambda_{-,+}$, il en est de même de σ_q à cause des propriétés de l'involution et vice et versa; dans ce cas les modules de Jacquet de σ_s et σ_q épuisent le module de Jacquet de σ. Ainsi soit σ est de longueur 2, soit le module de Jacquet de σ_s ne contient que la représentation $\lambda_{+,+}$ avec multiplicité 2; en particulier σ_s est une série discrète. Je ne connais pas de moyens élémentaires pour éliminer ce cas, il faut en référer à Harish-Chandra; c'est ce qui est fait dans [12] qui de façon détournée élimine ce cas mais je vais rappeler ici l'argument. Le point est qu'Harish-Chandra a démontré que pour τ une série discrète d'un GL convenable et σ_d une série discrète de $G(n)$, le composé des opérateurs d'entrelacement standard:

$$\tau|\,|^s \times \sigma_d \to \tau|\,|^{-s} \times \sigma_d \to \tau|\,|^s \times \sigma_d$$

a, en $s = 0$ un pôle au plus double; le résultat est dû à Harish-Chandra mais la référence que j'utilise est [19]. Pour calculer ce composé d'opérateur d'entrelacement, qui est le produit par une fonction méromorphe de s, on inclut σ_d dans σ et on considère la suite des opérateurs suivants:

$$\begin{aligned}M_1(s) &:= \tau|\,|^s \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon') \\ &\to \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \tau|\,|^s \times \pi(\psi', \epsilon'), \\ M_2(s) &:= \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \tau|\,|^s \times \pi(\psi', \epsilon') \\ &\to \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \tau|\,|^{-s} \times \pi(\psi', \epsilon'), \\ M_3(s) &:= \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \tau|\,|^{-s} \times \pi(\psi', \epsilon') \\ &\to \tau|\,|^{-s} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon');\end{aligned}$$

il faut calculer, $M_3(-s) \circ M_2(-s) \circ M_1(-s) \circ M_3(s) \circ M_2(s) \circ M_1(s)$. On l'applique avec τ la représentation de Steinberg généralisée $< \rho|\,|^{(a-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-(a-1)/2} >$. On vérifie grâce aux calculs faits par Shahidi pour les groupes linéaires ([18]) que pour ce choix, $M_1(-s) \circ M_3(s)$ dans un espace indépendant de s, se traduit par la multiplication par la fonction méromorphe qui à une fonction holomorphe et inversible près (les facteurs espsilon) est (on écrit très abusivement $L(s')$ au lieu de $L(\rho \times \rho, s')$) $(L(s)L(a+s)^{-1}L(-s-a+1)L(-s+1)^{-1})^2$; en effet l'opérateur d'entrelacement se fait dans un groupe linéaire (ici x est l'induction dans le groupe linéaire par rapport au parabolique standard évident dans les notations) et correspond au composé des opérateurs d'entrelacement standard:

$$\begin{aligned}\rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \tau|\,|^{-s} &\to \tau|\,|^{-s} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \\ &\to \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \rho|\,|^{(a-1)/2} \times \tau|\,|^{s}.\end{aligned}$$

On sait donc que l'opérateur est le produit par une fonction méromorphe de s (c'est en fait dû simplement à l'irréductibilité générique de l'induite). Pour cacluler cette fonction méromorphe, on peut utiliser les résultats fins de [18] mais on peut même aller plus vite: on plonge $\tau|\,|^{-s}$ dans l'induite $\rho|\,|^{(a-1)/2-s} \times \cdots \times \rho|\,|^{-(a-1)/2-s}$ et on récrit le même composé d'opérateurs d'entrelacement en remplaçant τ par cette induite; on a des espaces plus gros mais le composé est encore la multiplication par une fonction holomorphe qu'il est cette fois très facile de calculer en utilisant simplement le résultat le fait que le composé des opérateurs d'entrelacement standard (pour ρ cuspidal et $x, x' \in \mathbb{C}$)

$$\rho|\,|^x \times \rho|\,|^{x'} \to \rho|\,|^{x'} \times \rho|\,|^x \to \rho|\,|^x \times \rho|\,|^{x'}$$

est une fonction méromorphe ayant mêmes zéros et mêmes pôles que la fonction

$$L(\rho \times \rho, x - x')L(\rho \times \rho, x' - x)/L(\rho \times \rho, 1 + x - x')L(\rho \times \rho, 1 - x + x')$$

que l'on récrit $L(\rho\times\rho, x-x')L(\rho\times\rho, 1+x-x')^{-1}L(\rho\times\rho, x'-x)L(\rho\times\rho, 1+x'-x)^{-1}$. Ainsi la fonction cherchée a mêmes zéros et mêmes pôles que (on enlève encore $\rho\times\rho$ pour alléger les formules)

$$\begin{aligned}\times_{\ell\in[-(a-1)/2,(a-1)/2]}\, & L((a-1)/2 - \ell + s)^2 L((a-1)/2 - \ell + s + 1)^{-2} \\ & L(-(a-1)/2 + \ell - s)^2 L(-(a-1)/2 + \ell - s + 1)^{-2} \\ &\qquad = L(s)^2 L(a+s)^{-2} L(-(a-1) - s)^2 L(1-s)^{-2},\end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.

L'opérateur $M_2(-s) \circ M_2(s)$ lui est holomorphe en $s = 0$ et non nul; cela est la définition des blocs de Jordan (cf. par exemple [12] ou [9]). Quant au composé $M_3(-s)\circ M_1(s)$ il s'identifie comme ci-dessus au produit par la fonction $(L(-s)L(a-$

$s)^{-1}L(s-a+1)L(s+1)^{-1})^2$. Cela donne, en composant tout, un pôle d'ordre 4. Et donc la fonction cherchée a aussi un pôle d'ordre 4 ce qui est contradictoire avec le fait que σ_d est une série discrète. Cela prouve notre assertion dans ce cas.

Il reste donc le cas où il existe $a_+ \in Jord_\rho(\psi)$ tel que $a_+ > a_{\rho,\psi,\epsilon}$ et on fixe a_+ minimum avec cette condition. On pose (ψ_1, ϵ_1) le couple qui se déduit de (ψ, ϵ):

si $\epsilon(\rho, a_+) = \epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$, en enlevant à $Jord_\rho(\psi)$ à la fois $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ et a_+ et on pose alors

$$\tilde{T} := \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle;$$

si $\epsilon(\rho, a_+) \neq \epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$, en remplaçant $Jord_\rho(\psi)$, $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$ par $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}-2)$ et (ρ, a_+) par $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$ (le signe $\delta_?$ n'a pas d'importance) et on pose alors

$$\tilde{T} := \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle.$$

On vérifie, que d'après les définitions, $\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \tilde{T} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$. Dans certains cas $\tilde{T}$ est irréductible; il s'agit du cas où $\delta_{\rho,\psi,\epsilon} = \delta_{a_+}$ si $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = \epsilon(\rho, a_+)$ et du cas où $\delta_{\rho,\psi,\epsilon} \neq \delta_{a_+}$ si $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) \neq \epsilon(\rho, a_+)$. Dans ces cas d'irréductibilité, on vérifie encore les isomorphismes, pour $\eta = -$ dans le premier cas et $+$ dans le deuxième:

$$\begin{aligned}\tilde{T} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1) &\simeq \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\eta\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2}\rangle \\ &\quad \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1) \\ &\simeq \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\eta\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2}\rangle \\ &\quad \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)\end{aligned}$$

grâce à l'irréductibilité de $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$; dans le premier cas cette irréductibilité provient de ce que $a_{\rho,\psi,\epsilon} - 2 \notin Jord_\rho(\psi_1)$ et dans le deuxième cas elle provient de ce que $b_{\rho,\psi_1,\epsilon_1} = a_{\rho,\psi,\epsilon}$. Dans le cas d'irréductibilité de $\tilde{T}$, on pose $\tilde{T}' := \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\eta\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2}\rangle \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}$ et dans les cas où $\tilde{T}$ est réductible, on pose tout simplement $\tilde{T} = \tilde{T}'$. Dans tous les cas $\tilde{T}'$ est de longueur 2, avec pour η bien choisi, en fait comme ci-dessus, un sous-quotient isomorphe à $T_1 := \langle \rho|\,|^{\eta\delta_+(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\eta\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2}\rangle\rangle$ et l'autre isomorphe à $T_2 := \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\eta\delta_+(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$.

Il existe donc un sous-quotient irréductible de $\tilde{T}'$, noté T, tel que $\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow T \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$. Le point est que pour $\zeta = \pm$, l'induite du GL convenable, $\rho|\,|^{\zeta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times T$ est irréductible. C'est clair si $T \simeq T_2$ et pour $T \simeq T_1$, si elle n'est pas irréductible elle contient un sous-quotient isomorphe à $\rho|\,|^{\pm(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times T_2$. Pour éliminer ce cas, on montre par un calcul de module de Jacquet que la représentation $\rho|\,|^{\pm(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times T_2$ n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans l'induite $\rho|\,|^{\pm(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \tilde{T}'$. On obtient alors:

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \rho|\,|^{-}\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2 \times T \times \pi(\psi_1,\epsilon_1) \\ &\simeq \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times T \times \pi(\psi_1,\epsilon_1).\end{aligned}$$

On veut encore continuer par l'inclusion

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times T \times \pi(\psi_1,\epsilon_1) \\ &\hookrightarrow \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \\ &\quad \times \langle \rho|\,|^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\eta\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2}\rangle \times \pi(\psi_1,\epsilon_1).\end{aligned}$$

On rappelle que $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} T \times \pi(\psi_1,\epsilon_1) \neq 0$ car ceci est vrai pour son sous-module $\pi(\psi,\epsilon)$. Mais cela entraine que si $T \simeq T_1$ alors $\delta_{\rho,\psi,\epsilon} = \eta\delta_{a_+}$ et que si $T \simeq T_2$, alors $\delta_{\rho,\psi,\epsilon} = -\eta\delta_{a_+}$. Ainsi si $T \simeq T_1$, on a l'assertion cherchée immédiatement; si $T \simeq T_2$, on obtient l'assertion en refaisant en sens inverse:

$$
\begin{aligned}
T \times \pi(\psi_1,\epsilon_1) \hookrightarrow{} & \langle \rho| |^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2} \rangle \\
& \times \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi_1,\epsilon_1) \\
& \simeq \langle \rho| |^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho| |^{\eta\delta_{a_+}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2} \rangle \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \\
& \times \pi(\psi_1,\epsilon_1) \simeq \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \\
& \times \langle \rho| |^{\delta_{a_+}(a_+-1)/2}, \ldots, \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1+2\eta)/2} \rangle \times \pi(\psi_1,\epsilon_1).
\end{aligned}
$$

Et on obtient comme cherché $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} \tau \neq 0$.

Cela termine la preuve du cas où $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) \neq \epsilon(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon})$. Dans le cas opposé, les démonstration sont similaires, en réglant la plupart des cas avec l'inclusion

$$
\pi(\psi,\epsilon) \hookrightarrow \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \rangle \times \pi(\psi',\epsilon'),
$$

où, ici, $Jord(\psi')$ se déduit de $Jord(\psi)$ en enlevant les blocs $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})$ et $(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon})$. Le point délicat ici est $x = (b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ puisque $\rho| |^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi',\epsilon')$ n'est pas irréductible alors que l'on veut démontrer l'irréductibilité de $\rho| |^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi,\epsilon)$.

On traite d'abord le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 2$, c'est-à-dire $x = 1/2$. On note encore τ un sous-module irréductible de $\sigma := \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\psi,\epsilon)$ et pour démontrer l'irréductibilité, il suffit de démontrer que $Jac_{\rho| |^{-1/2\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}} \tau \neq 0$. Montrons cela. On a l'inclusion:

$$
\begin{aligned}
\tau \hookrightarrow \sigma \hookrightarrow{} & \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \rangle \\
& \times \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\psi',\epsilon') \simeq \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \rangle \\
& \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\psi',\epsilon'),
\end{aligned}
$$

où (ψ',ϵ') se déduit de (ψ,ϵ) en enlevant de $Jord_\rho(\psi)$ les 2 blocs $(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}, \delta_{\rho,\psi,\epsilon})$ et $(\rho, 2, \delta_{\rho,2})$. Pour $\zeta \in \{\pm 1\}$, on note $(\tilde{\psi}'_\zeta, \tilde{\epsilon}')$ le couple qui se déduit de (ψ',ϵ') en ajoutant le bloc $(\rho, 2, \zeta)$ avec $\tilde{\epsilon}'(\rho,2) = +$. On va utiliser le fait que la représentation induite $\rho| |^{1/2} \times \pi(\psi',\epsilon')$ est de longueur exactement 2 avec les 2 représentations $\pi(\tilde{\psi}'_\zeta, \tilde{\epsilon}')$ comme sous-quotients (ceci est loisible par récurrence cf. 3.1). Ainsi, on trouve qu'il existe ζ et une inclusion:

$$
\tau \hookrightarrow \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \rangle \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\tilde{\psi}'_\zeta, \tilde{\epsilon}').
$$

Nécessairement $\zeta = -$; en effet, si $\zeta = +$, on vérifie que $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}} \pi(\tilde{\psi}'_+, \tilde{\epsilon}') \neq 0$ et en faisant commuter par irréductibilité, on en déduit que

$$
Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}} \tau \neq 0
$$

ce qui contredit le fait que $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}} \pi(\psi,\epsilon) = 0$. C'est ici que l'on utilise le fait que $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 2$. On écrit encore

$$
\tau \hookrightarrow \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}3/2} \rangle \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\tilde{\psi}'_-, \tilde{\epsilon}').
$$

Le problème est maintenant de décomposer l'induite $\sigma_1 := \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\tilde{\psi}'_-, \tilde{\epsilon}')$. Dans le groupe de Grothendieck,

$$\begin{aligned}\sigma_1 = &\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \times \pi(\tilde{\psi}'_-, \tilde{\epsilon}')\\ &\oplus \langle \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \times \pi(\tilde{\psi}'_-, \tilde{\epsilon}').\end{aligned}$$

Pour $\zeta' \in \{\pm 1\}$, on pose $\sigma_{\zeta'} := \langle \rho|\,|^{\zeta'\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}, \rho|\,|^{-\zeta'\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \times \pi(\tilde{\psi}'_-, \tilde{\epsilon}')$. Admettons que pour tout ζ', $\sigma_{\zeta'}$ est semi-simple et concluons. Grâce à cela, il existe ζ' et une inclusion

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}3/2}\rangle \times \sigma_{\zeta'}\\ &\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}3/2}\rangle \times \langle \rho|\,|^{\zeta'\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}, \rho|\,|^{-\zeta'\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle\\ &\times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times \pi(\psi', \epsilon') \simeq \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2} \times < \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}3/2}\rangle\\ &\times \langle \rho|\,|^{\zeta'\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}, \rho|\,|^{-\zeta'\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon').\end{aligned}$$

D'où $Jac_{\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}1/2}}\tau \neq 0$ comme cherché. Il reste donc à démontrer la semi-simplicité; ce serait clair si l'on savait que la représentation $\pi(\tilde{\psi}'_-, \tilde{\epsilon}')$ est unitaire. Je pense bien que toutes les représentations construites sont des composantes locales de formes automorphes de carré intégrable et qu'il en est donc, a fortiori, bien ainsi. Toutefois, on ne peut utiliser cet argument; on sait quand même qu'une représentation du type $\pi(\psi, \epsilon)$ est une série discrète si $\delta_{\rho,a} = +$ pour tout $(\rho, a) \in Jord(\psi)$. Dans ce cas, la représentation est certainement unitaire et on a la semi-simplicité. Au moins la semi-simplicité cherchée est conservée après application de l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler. On a donc aussi le résultat si $\delta_{(\rho,a)}$ est constant dans $Jord$ ici $Jord(\tilde{\psi}'_-)$. Pour avoir le cas général, on se ramène à ce cas; je ne le fais pas car je ferai une démonstration du même genre pour prouver la propriété de base d'(ir)réductibilité unitaire qui est le résultat analogue quand $Jord_\rho$ est formé d'entiers impairs et non, comme ici, d'entiers pairs. Cela termine la démonstration de ce cas.

On suppose donc maintenant que $b_{\rho,\psi,\epsilon} > 2$ et montrons l'irréductibilité cherchée. Soit τ un sous-module irréductible de $\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi, \epsilon)$. Comme $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi, \epsilon) = 0$, il suffit de démontrer que $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\tau \neq 0$. On reprend la notation (ψ', ϵ') ci-dessus et l'inclusion déjà écrite. On va admettre (ceci est loisible par récurrence cf. 3.1) que l'induite $\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon')$ est exactement de longueur 2. Dans ces conditions les sous-quotients de cette induite sont exactement les représentations $\pi(\psi'_\zeta, \epsilon')$, pour $\zeta = \pm$ où $Jord(\psi'_\zeta)$ se déduit de $Jord(\psi')$ en remplaçant le bloc $(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon} - 2)$ par $(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon}, \zeta)$. Ainsi:

$$\begin{aligned}\tau &\hookrightarrow \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon')\\ &\simeq \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon').\end{aligned}$$

Il existe donc ζ tel que

$$\tau \hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon').$$

On utilise le fait que $\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon')$ est irréductible quelque soit ζ (hypothèse de récurrence en remarquant que $b_{\rho,\psi,\epsilon} - 2 \notin Jord_\rho(\psi'_\zeta)$). D'où

$$\begin{aligned}
\tau &\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon')\\
&\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon')\\
&\simeq \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon')\\
&\simeq \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2}\rangle \times \pi(\psi'_\zeta, \epsilon');
\end{aligned}$$

remarquons que pour le dernier isomorphisme on utilise le fait que

$$\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon} - 1)/2 \in [\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon} - 1)/2, -\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon} - 3)/2].$$

Cela montre que $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau) \neq 0$ comme cherché. A priori, on aurait pu partir de τ un sous-module de $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi, \epsilon)$ et essayer de démontrer que $Jac_{\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\tau \neq 0$. La preuve ci-dessus ne s'applique pas, ce qui peut paraître inquétant; en fait le même type de preuve montre que soit on a la non nullité cherchée soit $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau) \neq 0$. Mais cette dernière éventualité est impossible car $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi, \epsilon) = 0$. Cela termine la démonstration.

2.8. **Propriétés, suite.**

Proposition. *Soit (ψ, ϵ) d'où $\pi(\psi, \epsilon)$ et soit ρ comme dans* 1 *et* 2.2 *avec $Jord_\rho(\psi)$ formé d'entiers impairs. La représentation induite $\sigma := \rho \times \pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible si $1 \in Jord_\rho(\psi)$ et est semi-simple de longueur 2 et sans multiplicité sinon. De plus si $1 \in Jord_\rho(\psi)$ alors toutes les induites $\rho \times \cdots \times \rho \times \pi(\psi, \epsilon)$ sont irréductibles. Enfin si $1 \notin Jord_\rho(\psi)$ et si τ est l'un des sous-modules irréductibles de $\rho \times \pi(\psi, \epsilon)$ alors les induites $\rho \times \cdots \times \rho \times \tau$ sont irréductibles.*

La démonstration est longue parce que l'on ne sait pas que $\pi(\psi, \epsilon)$ est unitaire et donc on n'a pas automatiquement la semi-simplicité.

On fixe τ un sous-module irréductible de σ. On vérifie que $Jac_\rho(\sigma)$ est de longueur 2, chaque sous-quotient étant isomorphe à $\pi(\psi, \epsilon)$. On en déduit que σ a au plus 2 sous-modules irréductibles. Fixons τ l'un de ses sous-modules irréductibles.

D'autre part, la représentation $\pi(\psi, \epsilon)$, comme toute représentation irréductible d'un groupe classique est autoduale (à la torsion près par un automorphisme éventuellement extérieur); il en est donc de même de σ. Ainsi tout sous-module irréductible de σ est isomorphe à un quotient irréductible de σ. Ainsi si τ n'est pas facteur direct, il a multiplicité au moins 2 dans σ.

On distingue maintenant les possibilités pour $Jac_\rho(\tau)$ qui est nécessairement non nul. Le premier cas est celui où $Jac_\rho(\tau)$ n'est pas irréductible, alors $Jac_\rho(\tau) \simeq Jac_\rho(\sigma)$ et τ a au plus multiplicité 1 dans σ et est l'unique sous-module irréductible. Dans ce cas, avec ce qui précède σ est irréductible isomorpheà τ. L'autre cas est celui où $Jac_\rho(\tau) \simeq \pi(\psi, \epsilon)$; il est alors clair que σ n'est pas irréductible. On note τ_1 le sous-quotient de σ tel que $Jac_\rho(\tau_1) \neq 0$ et qui n'est pas τ (bien que l'on puisse avoir $\tau_1 \simeq \tau$). D'après ce que l'on a vu, si l'on peut démontrer que $\tau_1 \not\simeq \tau$ alors τ sera facteur direct et τ_1 sera sous-module et le même argument dira que τ_1 aussi est facteur direct. Le fait que σ a au plus 2 sous-modules irréductibles assure alors que σ est semi-simple de longueur 2.

En d'autres termes, on doit démontrer que $Jac_\rho(\tau)$ n'est pas irréductible quand $1 \in Jord_\rho(\psi)$ et que si $1 \notin Jord_\rho(\psi)$, $Jac_\rho(\tau)$ ne contient pas 2 copies de $\pi(\psi,\epsilon)$, τ_1 est alors défini et il faut alors encore démontrer que $\tau_1 \not\simeq \tau$. On montrera simultanément la fin de la proposition à savoir l'irréductibilité de $\rho\times\cdots\times\rho\times\pi(\psi,\epsilon)$ quand $1 \in Jord_\rho(\psi)$ et l'irréductibilité de $\rho\times\cdots\rho\times\tau$ quand $1 \notin Jord_\rho(\psi)$ et τ est un des sous-modules irréductibles de $\rho\times\pi(\psi,\epsilon)$.

On démontre ces propriétés par récurrence. On a défini (au moins dans certains cas) $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ ainsi que $b_{\rho,\psi,\epsilon}$.

2.8.1. Supposons d'abord que $a_{\rho,\psi,\epsilon} > sup(b_{\rho,\psi,\epsilon}+2,3)$. Alors on dispose de (ψ',ϵ') cf. 2.4 et $\pi(\psi,\epsilon)$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times\pi(\psi',\epsilon')$. L'hypothèse ici assure que $\rho\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}$ est une représentation irréductible du GL convenable. On note avec des $'$ les objets relatifs à ψ' définis de façon analogue à ceux définis pour ψ. On a donc les inclusions:

$$\tau \hookrightarrow \sigma \hookrightarrow \rho\times\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\pi(\psi',\epsilon') \simeq \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\sigma'.$$

Ainsi $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau)\neq 0$ et est un sous-module de σ'. Or $1\in Jord_\rho(\psi) \iff 1 \in Jord(\psi')$. Par récurrence, on en déduit que σ' est irréductible si et seulement si $1\in Jord_\rho(\psi)$. Supposons donc que $1 \in Jord_\rho(\psi)$; cela entraîne que σ' est irréductible et que $Jord_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau)$ est isomorphe à σ', ce qui est aussi vrai pour $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\sigma)$. Ainsi τ a multiplicité au plus 1 dans σ, ce qui entraîne que σ est semi-simple. Mais si σ n'est pas irréductible, τ_1 est aussi un sous-module et lui aussi doit avoir $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau_1)\simeq\sigma'$. Ce qui est exclu par $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau) \simeq Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\sigma)$. On vient donc de montrer que si $1\in Jord_\rho(\psi)$ alors σ est irréductible. Supposons toujours que $1\in Jord_\rho(\psi)$ et considérons l'induite $\tilde\sigma := \rho\times\cdots\rho\times\pi(\psi,\epsilon)$ et on définit $\tilde{\sigma'}$ en changeant (ψ,ϵ) en (ψ',ϵ'); on a encore pour tout sous-module $\tilde\tau$ de $\tilde\sigma$ les inclusions $\tilde\tau\hookrightarrow\tilde\sigma\hookrightarrow\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tilde{\sigma'}$. D'où encore:

$$\begin{aligned}Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tilde\tau) &\hookrightarrow Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tilde\sigma)\\ &\hookrightarrow Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tilde{\sigma'})\simeq\tilde{\sigma'}.\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $\tilde{\sigma'}$ est irréductible et ainsi $\tilde\sigma$ a au plus un sous-module irréductible et ce sous-module intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de $\tilde\sigma$. Cela termine la preuve de l'irréductibilité de $\tilde\sigma$ comme celle de σ.

Supposons maintenant que $1\notin Jord_\rho(\psi)$, en particulier, il en est de même pour ψ' et, par récurrence, $\sigma' = \tau'\oplus\tau'_1$. Clairement $\sigma = \sigma\cap\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tau'\oplus \sigma\cap\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\cap\tau'_1$. Pour fixer les notations, on suppose (comme on en a le droit) que $\tau\hookrightarrow\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tau'$. Et on pose $\sigma_1 := \sigma\cap\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tau'_1$. On va d'abord démontrer que σ_1 est non nul puisque τ_1 en est un sous-module irréductible. En effet, comme $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\sigma)\simeq\sigma'$ alors que $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\sigma\cap\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tau')\simeq\tau'$, on obtient déjà que $\sigma_1\neq 0$ et en particulier σ n'est pas irréductible. Pour la deuxième assertion cherchée, on calcule $Jac_\rho(\sigma\cap\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times\tau')$; c'est un sous-module de $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times \pi(\psi',\epsilon')$ puisque $Jac_\rho(\tau')\simeq\pi(\psi',\epsilon')$. De plus ce sous-module est soit isomorphe à $\pi(\psi,\epsilon)$, soit il contient cette représentation avec multiplicité 2 (comme sous-quotient). Mais $\pi(\psi,\epsilon)$ n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\times \pi(\psi',\epsilon')$, il est clair que $\pi(\psi,\epsilon)$ ne peut intervenir qu'avec multiplicité 1 dans

$Jac_\rho(\sigma \cap \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \tau')$. D'où le fait que τ_1 n'est pas un sous-quotient de $\sigma \cap \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \tau'$ et donc que τ_1 est un sous-quotient de σ_1. Comme tout sous-module irréductible de σ_1 est un sous-module de σ et a donc son Jac_ρ non nul, τ_1 est un (en fait l'unique) sous-module irréductible de σ_1. Mais ainsi

$$Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\tau_1 \simeq \tau_1' \not\simeq \tau \simeq Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tau).$$

Cela prouve que τ_1 n'est pas isomorphe à τ et on a donc fini, sous l'hypothèse de cette sous-section, de prouver que $\rho \times \pi(\psi,\epsilon)$ est semi-simple de longueur 2. Fixons τ l'un de ses sous-modules irréductibles et considérons $\tilde\tau := \rho \times \cdots \times \rho \times \tau$. On vérifie que $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tilde\tau) \neq 0$ (comme ci-dessus) mais alors nécessairement $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\tilde\tau) \simeq \rho \times \cdots \rho \times \tau'$ (avec les notations ci-dessus), c'est-à-dire est irréductible. Comme tout sous-module irréductible de $\tilde\tau$ a la même propriété cela prouve l'unicité du sous-module irréductible et le fait que ce sous-module n'a que multiplicité 1 comme sous-quotient de $\tilde\tau$. Or $\tilde\tau$ est aussi autodual et on obtient l'irréductibilité de $\tilde\tau$ comme ci-dessus.

2.8.2. On suppose ici que $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$ avec $b_{\rho,\psi,\epsilon} > 1$. Ainsi, d'après les définitions $\pi(\psi,\epsilon)$ est un sous-module irréductible de $\langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$. On a montré que l'induite écrite a exactement 2 sous-modules irréductibles dans le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ est impair et on a donc dans ce cas nécesssairement

$$Jac_{\rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} \cdots Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi,\epsilon) \simeq \pi(\psi',\epsilon').$$

Dans le cas pair, on obtient le même résultat directement en utilisant le cas 2 de la définition de $\pi(\psi,\epsilon)$. On va procéder exactement comme dans la démonstration ci-dessus, en remplaçant l'utilisation faite du calcul de $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}$ par ces modules de Jacquet successifs; on note JAC cette opération. On pose encore $\sigma := \rho \times \pi(\psi,\epsilon)$ et $\sigma' := \rho \times \pi(\psi',\epsilon')$. Ce qui fait marcher la démonstration est que

$$JAC(\sigma) = \sigma';$$

pour avoir cela on montre d'abord de proche en proche (par marche descendante) que pour tout $i > 0$, $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon} i}} Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(i+1)}} \cdots Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\sigma = \rho \times Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon} i}} Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(i+1)}} \cdots Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi,\epsilon)$; cela est clair. Quant on arrive à $i = 0$, il y a 3 termes, l'un comme ci-dessus avec $i = 0$ et le terme $Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon} 1}} Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon} i+1}} \cdots Jac_{\rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}\pi(\psi,\epsilon)$ avec multiplicité 2. Quand on continue à prendre $Jac_{\rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}}$ du résultat la contribution de ce terme supplémentaire disparaît. Et on obtient finalement $JAC(\sigma) \simeq \rho \times JAC(\pi(\psi,\epsilon)) \simeq \sigma'$ d'après ce qui précède.

On sait que $\rho \times \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle$ est irréductible, car on a $0 \in [\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2, -\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2]$. On a donc encore des inclusions

$$\tau \hookrightarrow \sigma \hookrightarrow \langle \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times \sigma'.$$

D'où $JAC(\tau) \neq 0$ et par exactitude $JAC(\tau) \hookrightarrow JAC(\sigma) \simeq \sigma'$. Ainsi si σ' est irréductible $JAC(\tau)$ est irréductible et isomorphe à $JAC(\sigma)$. Cela assure comme ci-dessus que τ intervient avec multiplicité 1 dans σ et qu'il en est l'unique sous-module irréductible. On a vu que cela entraîne l'irréductibilité de σ; par récurrence on sait que σ' est irréductible quand $1 \in Jord_\rho(\psi')$ mais cela est encore équivalent à $1 \in Jord_\rho(\psi)$. Dans le cas où $1 \in Jord_\rho(\psi)$, on montre de la même façon l'irréductibilité de l'induite $\rho \times \cdots \times \rho \times \pi(\psi,\epsilon)$.

Supposons ensuite que $1 \notin Jord_\rho(\psi)$ d'où $1 \notin Jord_\rho(\psi')$ et $\sigma' \simeq \tau' \oplus \tau_1'$ avec $\tau' \not\simeq \tau_1'$ et on peut encore supposer que $JAC(\tau)$ contient τ'. On pose encore $\sigma_1 := \sigma \cap \langle \rho| \, |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho| \, |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \rangle \times \tau_1'$ et σ_1 est non nul car $JAC(\sigma)$ contient τ_1'. Alors τ_1 est un sous-module irréductible de σ_1 qui vérifie $JAC(\tau_1) \simeq \tau_1'$ et on conclut comme ci-dessus. On termine la preuve de la proposition, sous les hypothèses de cette sous-section comme dans la sous-section précédente.

2.8.3. Ici on traite le cas où $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 3$ et $b_{\rho,\psi,\epsilon} = 1$. On doit montrer que σ est irréductible, ou, ce que nous allons faire, qu'il a un unique sous-module irréductible qui intervient, comme sous-quotient, avec multiplicité 1 dans σ. Il faut faire la même chose pour $\tilde{\sigma} := \rho \times \cdots \times \rho \times \pi(\psi, \epsilon)$ où ρ intervient un nombre arbitraire de fois. Pour cela on représente $\pi(\psi, \epsilon)$ comme l'un des 2 sous-modules irréductibles de l'induite $\langle \rho| \, |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}, \rho \rangle \times \pi(\psi', \epsilon')$ et en utilisant le fait que $\rho \times \cdots \times \rho \times \langle \rho| \, |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}, \rho \rangle$ est irréductible pour le GL convenable, on vérifie encore que pour tout sous-module $\tilde{\tau}$ de $\tilde{\sigma}$, on a une inclusion $\tilde{\tau} \hookrightarrow \tilde{\sigma} \hookrightarrow \langle \rho^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}, \rho \rangle \times \rho \times \cdots \times \rho \times \pi(\psi', \epsilon')$. Cela prouve que $Jac_{\rho| \, |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}}(\tilde{\tau}) \neq 0$. On a aussi que $Jac_{\rho| \, |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}} \pi(\psi, \epsilon)$ est l'un des 2 sous-modules irréductibles de $\rho \times \pi(\psi', \epsilon')$. Notons le τ. Par récurrence on sait que $\rho \times \cdots \times \rho \times \tau$ est irréductible. Et $Jac_{\rho| \, |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}}(\tilde{\sigma})$ est donc isomorphe à la représentation irréductible $\rho \times \cdots \times \rho \times \tau$. Cela prouve encore que $\tilde{\sigma}$ contient un unique sous-module irréductible et que ce sous-module intervient avec multiplicité 1 dans $\tilde{\sigma}$; on a ici utilisé le fait que l'induite $\rho \times \pi(\psi', \epsilon')$ est semi-simple sans multiplicité. Cela termine la démonstration.

2.8.4. Reste le cas le plus difficile c'est-à-dire où $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ n'est pas défini (ou vaut -1) et où $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 3$. Ici on fait des réductions pour se ramener au cas où pour tout $a \in Jord_\rho(\psi)$ avec $a > 3$, $a - 2 \in Jord(\psi)$ et $\epsilon(a) \neq \epsilon(a-2)$. En effet s'il existe $a \in Jord(\psi)$ avec $a > 3$ et $a - 2 \notin Jord(\psi)$, on note $(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ le couple qui se déduit de (ψ, ϵ) uniquement en changeant a en $a-2$ et on vérifie que $\pi(\psi, \epsilon)$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho| \, |^{\delta_a(a-1)/2} \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$. Ensuite on procède comme dans la sous-section 2.8.1.

Montrons que l'on peut aussi supposer que $\epsilon(a) \neq \epsilon(a-2)$ pour tout $a \in Jord_\rho(\psi)$ avec $a > 3$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et notons a le plus petit élément de $Jord_\rho(\psi)$ tel que $\epsilon(a) = \epsilon(a-2)$. On suppose aussi qu'il existe $b \in Jord_\rho(\psi)$ tel que $b < a$ et $\delta_b = \delta_a$; on traitera le cas restant ci-dessous. On fixe un tel b maximal avec ces propriétés. On définit $\tilde{\psi}$ en enlevant de $Jord(\psi)$ les blocs (ρ, a, δ_a) et (ρ, b, δ_b) et on montre qu'il existe $\tilde{\epsilon}$ et une inclusion de $\pi(\psi, \epsilon)$ dans $\langle \rho| \, |^{\delta_a(a-1)/2}, \ldots, \rho| \, |^{-\delta_a(b-1)/2} \rangle \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$. En effet, on note (ψ_1, ϵ_1) le couple qui se déduit de (ψ, ϵ) en enlevant les blocs de Jordan (ρ, a, δ_a) et (ρ, b, δ_b) et en remplaçant tous les blocs $(\rho, \alpha, \delta_\alpha)$ pour $\alpha < b$ par $(\rho, \alpha - 2, -\delta_a)$. On montre aisément que $\pi(\psi, \epsilon)$ est un sous-module de l'induite $\times_{\alpha \in Jord_\rho(\psi), \alpha < b} \rho| \, |^{\delta_\alpha(\alpha-1)/2} \times \langle \rho| \, |^{\delta_a(a-1)/2}, \ldots, \rho| \, |^{-\delta_a(b-1)/2} \rangle \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$. Cette dernière induite est isomorphe à l'induite $\langle \rho| \, |^{\delta_a(a-1)/2}, \ldots, \rho| \, |^{-\delta_a(b-1)/2} \rangle \times \times_{\alpha \in Jord_\rho(\psi), \alpha < b} \rho| \, |^{\delta_\alpha(\alpha-1)/2} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$. Avec les propriétés de modules de Jacquet, on vérifie que l'on peut remplacer l'induite $\times_{\alpha \in Jord_\rho(\psi), \alpha < b} \rho| \, |^{\delta_\alpha(\alpha-1)/2} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$ par une représentation de la forme $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ comme annoncée. Comme $1 \notin Jord(\tilde{\psi})$ on conclut encore aisément.

Reste ici le cas où b n'existe pas. La méthode employée est aussi celle du cas $\epsilon(\alpha) \neq \epsilon(\alpha-2)$ pour tout $\alpha \in Jord_\rho(\psi)$ avec $\alpha \geq 2$; on admet donc aussi cette possibilité. L'idée qui ne peut apparaître explicitement est de représenter $\pi(\psi, \epsilon)$ comme composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable, c'est ce qui suggère l'inclusion de $\pi(\psi,\epsilon)$ dans une induite convenable qui permet la démonstration.

On remarque d'abord que si $\delta_a=\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ pour tout $a\in Jord_\rho(\psi)$ l'induite $\sigma:=\rho\times\pi(\psi,\epsilon)$ est semi-simple de longueur 2 exactement quand $1\notin Jord_\rho(\psi)$ et sans multiplicité; en effet si $\delta_{\rho,\psi,\epsilon}=+$, on est essentiellement ramené au cas où $\pi(\psi,\epsilon)$ est une série discrète et le résultat est alors connu: c'est un cas très particulier du résultat principal de [13] qui se démontre sans problème avec les méthodes développées ici le point de départ étant que l'on connait le résultat par hypothèse si $\pi(\psi,\epsilon)$. Si ce signe est $-$, on applique l'involution d'Aubert, Schneider-Stuhler et on se ramène au cas précédent. Donc ici on fixe a minimum dans $Jord_\rho(\psi)$ tel que $\delta_a\neq\delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ et on fait une récurrence décroissante sur a puisque le problème est résolu si a n'existe pas. En particulier, sous les hypothèses auxquelles on s'était ramené dans ce paragraphe, la définition de a est comme ci-dessus. On définit alors ψ' en imposant que $Jord(\psi')$ se déduise de $Jord(\psi)$ en enlevant le bloc (ρ,a,δ_a) et en y ajoutant le bloc $(\rho,1)$. On note S la représentation de $GL(d_\rho(a-1)/2,F)$, $\langle\rho|\,|^{\delta_a(a-1)/2},\dots,\rho|\,|\rangle$ et on vérifiera qu'il existe un morphisme $\epsilon':Jord(\psi')\to\{\pm1\}$ tel que $\pi(\psi,\epsilon)\hookrightarrow S\times\pi(\psi',\epsilon')$. On pose encore $\sigma:=\rho\times\pi(\psi,\epsilon)$. Ici, par récurrence $\rho\times\pi(\psi',\epsilon')$ est irréductible mais par contre $\rho\times S$ ne l'est pas. On sait même que $\rho\times S$ est de longueur exactement 2, on note $\overline{S}$ son quotient irréductible et S_0 son sous-module irréductible. On remarque que $\overline{S}\simeq\langle\rho|\,|^{\delta_a(a-1)/2},\dots,\rho\rangle$. On remarque aussi que $\overline{S}\times\pi(\psi',\epsilon')$ a un unique sous-module irréductible (calcul de module de Jacquet qui utilise l'irréductibilité de $\rho\times\pi(\psi',\epsilon')$). On note $\overline{\tau}$ ce sous-module irréductible. Le point est ici de démontrer que $\overline{\tau}$ est en fait aussi un sous-module de σ. Admettons cela; par un calcul facile la multiplicité de la représentation $\langle\rho|\,|^{\delta_a(a-1)/2},\dots,\rho|\,|\rangle\otimes\rho\otimes\pi(\psi',\epsilon')$ dans le module de Jacquet de $\overline{\tau}$ est 2 et elle est aussi 2 dans le module de Jacquet de σ. Cela prouve que $\overline{\tau}$ intervient avec multiplicité 1 et c'est bien ce que l'on voulait. Il est toutefois assez difficile de démontrer que $\overline{\tau}$ est un sous-module de σ. Ce qui est facile est de démontrer que $\overline{\tau}$ est un sous-quotient de σ, pour cela il suffit, par unicité, de vérifier que l'image de σ dans $\overline{S}\times\pi(\psi',\epsilon')$ est non nulle, ce qui se fait en montrant que le module de Jacquet de σ ne peut être inclus dans celui de $S_0\times\pi(\psi',\epsilon')$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\overline{\tau}$ n'est pas un sous-module de σ. Alors $Jac_\rho(\overline{\tau})=0$ et le module de Jacquet de $\overline{\tau}$ n'a pas $S_0\otimes\pi(\psi',\epsilon')$ comme sous-quotient. On calcule alors le module de Jacquet de $\overline{S}\times\pi(\psi',\epsilon')/\overline{\tau}$ relativement au parabolique de Levi $GL(d_\rho(a+1)/2)\times G(n-d_\rho(a-1)/2)$ et on le projette sur le support cuspidal du facteur GL qui est aussi le support cuspidal de $\overline{S}$. On vérifie alors que cette projection est exactement $S_0\otimes\pi(\psi',\epsilon')$. Ainsi $S_0\otimes\pi(\psi',\epsilon')$ est un quotient du module de Jacquet de $\overline{S}\times\pi(\psi',\epsilon')$. D'où, par réciprocité de Frobenius, un homomorphisme non nul de $\overline{S}\times\pi(\psi',\epsilon')$ dans $S_0\times\pi(\psi',\epsilon')$. Ainsi un quotient irréductible, $\tilde{\tau}$, de $\overline{S}\times\pi(\psi',\epsilon')$ est aussi un sous-quotient de $S_0\times\pi(\psi',\epsilon')$. Nécessairement, par dualité, $\tilde{\tau}$ est un sous-module de l'induite $\langle\rho,\dots,\rho|\,|^{-\delta_a(a-1)/2}\rangle\times\pi(\psi',\epsilon')$. On note $\tilde{\psi}$ le morphisme qui se déduit de ψ en changeant simplement δ_a en $-\delta_a$. On vérifie qu'il existe $\tilde{\epsilon}:Jord(\tilde{\psi})\to\{\pm1\}$ tel que $\tilde{\tau}$ est un sous-module de $\tilde{\sigma}:=\rho\times\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$. On a alors le droit d'appliquer l'hypothèse de récurrence car l'analogue du a est plus grand; ainsi, et cela va nous servir, $\tilde{\tau}$ intervient avec multiplicité 1 dans $\tilde{\sigma}$. Et on note $\tilde{\tau}_1$

l'autre sous-module irréductible de cette induite. Maintenant on a la suite exacte:

$$0 \to \langle \rho, \dots, \rho| \,|^{-\delta_a(a-1)/2}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon') \to \rho \times \langle \rho| \,|^{-\delta_a}, \dots, \rho| \,|^{-\delta_a(a-1)/2}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon')$$
$$\to \langle \langle \rho| \,|^{-\delta_a}, \dots, \rho| \,|^{-\delta_a(a-1)/2}\rangle, \rho\rangle \times \pi(\psi', \epsilon') \to 0.$$

Les termes extrêmes ne sont autres que $\overline{S}^* \times \pi(\psi', \epsilon')$ et $S_0^* \times \pi(\psi', \epsilon')$. En particulier ces induites ont même semi-simplifié que leurs analogues sans $*$ et contiennent donc chacune $\tilde{\tau}$. Il est clair que $\tilde{\sigma}$ est un sous-module de l'induite du milieu et ainsi $\rho \times \langle \rho| \,|^{-\delta_a}, \dots, \rho| \,|^{-\delta_a(a-1)/2}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon')$ contient $\tilde{\tau}$ avec multiplicité au moins 2 et $\tilde{\tau}_1$ avec multiplicité au moins 1. Ainsi dans son module de Jacquet, on doit trouver le terme $\rho \otimes \langle \rho| \,|^{-\delta_a}, \dots, \rho| \,|^{-\delta_a(a-1)/2}\rangle \otimes \pi(\psi', \epsilon')$ avec multiplicité au moins 3, ce qui est exclu. Et termine la preuve.

Il reste à démontrer l'inclusion cherchée de $\pi(\psi, \epsilon) \hookrightarrow \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2}, \dots, \rho| \,|^{\delta_a}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon')$. En partant des définitions, on trouve que

$$\pi(\psi, \epsilon) \hookrightarrow \times_{\beta \in [1,(a-1)/2[} \rho| \,|^{-\delta_a \beta} \times \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2} \times \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-3)/2}, \dots, \rho\rangle \times \pi(\psi_1, \epsilon_1),$$

où ψ_1 se déduit de ψ en remplaçant d'abord tous les blocs de Jordan $(\rho, \alpha, \delta_\alpha)$ de $Jord(\psi)$ pour $\alpha \leq a$ par $(\rho, \alpha - 2, \delta_\alpha)$ puis en enlevant les 2 blocs, $(\rho, 1)$ et $(\rho, a-2, \delta_a)$ et ϵ_1 se déduit naturellement de ϵ. Ensuite on récrit

$$\times_{\beta \in [1,(a-1)/2[} \rho| \,|^{-\delta_a \beta} \times \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2} \times \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-3)/2}, \dots, \rho\rangle \times \pi(\psi_1, \epsilon_1)$$
$$\simeq \rho| \,|^{-\delta_a} \times \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2} \times \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-3)/2}, \dots, \rho\rangle \times_{\beta \in [2,(a-3)/2]} \rho| \,|^{-\delta_a \beta} \times \pi(\psi_1, \epsilon_1).$$

On note ψ_2, ϵ_2 le couple qui se déduit de (ψ_1, ϵ_1) en remplaçant les blocs de Jordan $(\rho, \alpha - 2, -\delta_a)$ par $(\rho, \alpha, -\delta_a)$ pour tout $\alpha < a$; en d'autres termes (ψ_2, ϵ_2) se déduit de (ψ, ϵ) en enlevant les blocs de Jordan (ρ, a, δ_a) et $(\rho, 3, -\delta_a)$. Et on vérifie que l'on a une inclusion

$$\pi(\psi, \epsilon) \hookrightarrow \rho| \,|^{-\delta_a} \times \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2}, \dots, \rho\rangle \times \pi(\psi_2, \epsilon_2);$$

on fait cette vérification en utilisant les propriétés des modules de Jacquet de $\pi(\psi, \epsilon)$, on donnera plus d'explications dans le cas ci-dessous. On écrit encore

$$\rho| \,|^{-\delta_a} \times \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2}, \dots, \rho\rangle \times \pi(\psi_2, \epsilon_2)$$
$$\hookrightarrow \rho| \,|^{-\delta_a} \times \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2}, \dots, \rho| \,|^{\delta_a}\rangle \times \rho \times \pi(\psi_2, \epsilon_2)$$
$$\simeq \langle \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2}, \dots, \rho| \,|^{\delta_a}\rangle \times \rho| \,|^{-\delta_a} \times \rho \times \pi(\psi_2, \epsilon_2).$$

Et puis on trouve (ψ', ϵ') comme annoncé, on peut d'ailleurs préciser que $\epsilon'(\rho, 3) = \epsilon'(\rho, 1) \neq \epsilon'(\rho, 5)$.

2.8.5. On traite maintenant le cas où $a_{\rho,\psi,\epsilon} = 3$, $1 \notin Jord_\rho(\psi)$ et où pour tout $a \in Jord_\rho(\psi)$ avec $a > a_{\rho,\psi,\epsilon}$, $a - 2 \in Jord_\rho(\psi)$ et $\epsilon(a) \neq \epsilon(a-2)$.

On suppose donc encore qu'il existe $a \in Jord_\rho(\psi)$ tel que $\delta_a \neq \delta_3$; on fixe a minimum avec cette propriété.

On note (ψ', ϵ') le couple qui se déduit de (ψ, ϵ) en remplaçant dans $Jord_\rho(\psi)$ tous les éléments, b, avec $b \leq a$ par $b - 2$ et en ne touchant pas au reste. On montre que $\pi(\psi, \epsilon)$ est un sous-module de l'induite $\langle \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2}, \dots, \rho| \,|^{\delta_a}\rangle \times \pi(\psi', \epsilon')$. En effet, par définition:

$$\pi(\psi, \epsilon) \hookrightarrow \times_{x \in [1,(a-3)/2]} \rho| \,|^{-\delta_a x} \times \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2} \times \pi(\psi', \epsilon')$$
$$\simeq \rho| \,|^{\delta_a(a-1)/2} \times_{x \in [1,(a-3)/2]} \rho| \,|^{-\delta_a x} \times \pi(\psi', \epsilon').$$

Or $\rho|\,|^{\pm x}\times\pi(\psi',\epsilon')$ est irréductible pour tout $x\in[1,(a-3)/2]$ par la propriété de base de $\pi(\psi',\epsilon')$ car $0<x\leq(b_{\rho,\psi',\epsilon'}-1)/2$ pour ces valeurs puisque $b_{\rho,\psi',\epsilon'}=a_{\rho,\psi,\epsilon}-2$. On montre ainsi que $\pi(\psi,\epsilon)$ est un sous-module de l'induite

$$\times_{y\in[(a-1)/2,1]}\rho|\,|^{\delta_a y}\times\pi(\psi',\epsilon').$$

Ainsi il existe une sous-représentation $\tilde S$ de l'induite $\times_{y\in[(a-1)/2,1]}\rho|\,|^{\delta_a y}$ telle que $\pi(\psi,\epsilon)$ soit un sous-module de l'induite $\tilde S\times\pi(\psi',\epsilon')$. Si $\tilde S\not\simeq\langle\rho|\,|^{\delta_a(a-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{\delta_a}\rangle$, il existe $y<(a-1)/2$ tel que $Jac_{\rho|\,|^{\delta_a y}}\pi(\psi,\epsilon)\neq 0$. Mais cela contredit une propriété de base car $\delta_a=-\delta_{2y+1}$ par hypothèse. Et on obtient donc l'inclusion cherchée. Et cela termine la preuve.

3. Proposition clé.

On fixe (ψ,ϵ) ainsi que ρ comme dans 1. On fixe aussi $\mathcal{A}$ un ensemble de réels positifs ou nuls, éventuellement non distincts. Soit I un intervalle de $\mathbb{N}$ avec une bijection λ_I fixée avec $\mathcal{A}$ et une application sgn_I de I dans $\{\pm1\}$. On note $\sigma_{I,\mathcal{A}}$ la représentation de $GL(d_\rho|\mathcal{A}|,F)$ induite $\times_{i\in I}\rho|\,|^{sgn_I(i)\lambda_I(i)}$. Pour simplifier les notations, on dit que $\mathcal{A}$ a été ordonné et relativisé par I.

Proposition (avec les notations ci-dessus)**.** *On suppose que pour tout $x\in\mathcal{A}$, $x<(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$. Soit τ un sous-quotient irréductible de l'induite $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x\times\pi(\psi,\epsilon)$. Alors, il existe un intervalle I qui ordonne et relativise $\mathcal{A}$ tel que τ soit un sous-module de l'induite $\sigma_{I,\mathcal{A}}\times\pi(\psi,\epsilon)$.*

Cette proposition se démontre par récurrence sur 2 choses, d'abord par récurrence descendante sur $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ puis par récurrence montante sur $|\mathcal{A}|$ pour $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ fixé. En d'autres termes, on admet le résultat pour les ensembles $\mathcal{A}'$ et les couples (ψ',ϵ') soit si $a_{\rho,\psi',\epsilon'}>a_{\rho,\psi,\epsilon}$ soit si $|\mathcal{A}'|<|\mathcal{A}|$ avec $a_{\rho,\psi',\epsilon'}\geq a_{\rho,\psi,\epsilon}$. Ici il faut faire attention que $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ n'est pas toujours défini, ou plus exactement que l'on a accepté la valeur infinie; ce nombre $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ est donc soit borné par 2 fois le rang du groupe plus 1 soit est infini. Le début de la récurrence en $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ est donc le cas "infini".

Montrons le début de la récurrence, si $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ est infini la représentation $\pi(\psi,\epsilon)$ est ρ-cuspidale. Et l'assertion n'est pas difficile par réciprocité de Frobenius; n'importe quel quotient du module de Jacquet (cuspidal) de τ donne une inclusion dans une induite qui convient. De même si $|\mathcal{A}|$ est vide, il n'y a rien à démontrer.

Comme le cas où $\mathcal{A}$ a un seul élément joue un rôle particulier, on fait d'abord quelques remarques sur ce cas. Soit donc x un réel positif ou nul. Si $x=0$, on a vu que $\rho\times\pi(\psi,\epsilon)$ est semi-simple ce qui est en fait équivalent à l'assertion de la proposition dans ce cas. Si $x>0$, la proposition annonce que tout sous-quotient irréductible est un sous-module de l'une des 2 induites $\rho|\,|^{\pm x}\times\pi(\psi,\epsilon)$. Chacune de ses induites a un unique sous-module car l'hypothèse $x<(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ assure que $Jac_{\rho|\,|^{\pm x}}(\pi(\psi,\epsilon))=0$. Ainsi, dans ce cas la proposition est équivalente à:

3.1. *Pour $x\in]0,(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2[$, l'induite $\rho|\,|^x\times\pi(\psi,\epsilon)$ est de longueur inférieure ou égale à 2 ses constituants étant l'unique sous-module irréductible et l'unique quotient irréductible, ces 2 représentations pouvant coïncider (dans le cas où l'induite est irréductible).*

Mais je ne sais pas démontrer ce cas là sans faire une récurrence qui nécessite le cas général. Attaquons-nous à la démonstration. Il faut utiliser la définition de $\pi(\psi,\epsilon)$ qui est différente suivant que $a_{\rho,\psi,\epsilon}>b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$ ou quand on a l'égalité. Mais la différence la plus fondamentale est quand $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = \epsilon(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon})$ ou quand au contraire ces 2 signes sont différents.

3.2. **Premier cas:** $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) \neq \epsilon(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon})$**.** On pose alors $(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ le couple qui se déduit de (ψ, ϵ) uniquement en changeant $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ en $b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$. On a donc $b_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}} = b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$ et $a_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}} > a_{\rho,\psi,\epsilon}$. On pose alors $\mathcal{A}' := \{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2, (a_{\rho,\psi,\epsilon}-3)/2, \dots, (b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2\}$ et $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$. Et clairement, $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$ est un sous-quotient de $\times_{x\in\tilde{\mathcal{A}}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$. On applique donc la récurrence puisque $a_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}} > a_{\rho,\psi,\epsilon}$. Soit τ comme dans l'énoncé, il est a fortiori un sous-quotient irréductible de l'induite $\times_{x\in\tilde{\mathcal{A}}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ et il existe donc un intervalle $\tilde{I}$ qui ordonne et relativise $\tilde{\mathcal{A}}$ de façon à ce que τ soit un sous-module de l'induite $\times_{i\in\tilde{I}}\rho|\,|^{sgn(i)\lambda(i)} \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$. Il existe donc un sous-quotient irréductible, σ', de la représentation (d'un GL convenable) $\sigma_{\tilde{I},\tilde{\mathcal{A}}}$ tel que τ soit un sous-module de l'induite $\sigma' \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$. Si l'on peut choisir σ' tel qu'il existe $x \in \pm\mathcal{A}$ avec $Jac_{\rho|\,|^x}\sigma' \neq 0$, on pourra conclure; en effet, on aura alors $Jac_{\rho|\,|^x}\tau \neq 0$ c'est-à-dire qu'il existe τ' un sous-quotient de $\times_{x'\in\mathcal{A}-\{|x|\}}\rho|\,|^{x'} \times \pi(\psi, \epsilon)$ et une inclusion $\tau \hookrightarrow \rho|\,|^x \times \tau'$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à τ' pour terminer la preuve. On suppose donc que ce n'est pas possible et on va vérifier que nécessairement $\sigma' \simeq \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle$; ce qui évidemment n'arrive que pour une valeur bien précise de $\mathcal{A}$. Cela résulte d'abord de la classification des représentations irréductibles des GL et du calcul de leur module de Jacquet qui a été fait complètement par Zelevinski. Mais cela montre seulement que σ' est de la forme $\langle\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^t\rangle$ avec δ un signe convenable et t convenable. En fait $\delta = \delta_{\rho,\psi,\epsilon}$ car, en revenant à la définition première de τ comme sous-quotient de $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$, il faut $Jac_{\rho|\,|^{\delta(a_{\rho,\psi,\epsilon}}}\pi(\psi, \epsilon) \neq 0$. De plus $|t| < (a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ à cause des hypothèses sur $\mathcal{A}$ et donc $\rho|\,|^t \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ est irréductible sauf pour $t = \pm(b_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}}+1)/2$ ce qui n'est autre que $\pm(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2$. Supposons que t n'a pas l'une de ces 2 valeurs mais aussi que $t \neq 0$. Alors

$$
\begin{aligned}
\tau &\hookrightarrow \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^t\rangle \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) \\
&\hookrightarrow \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{t+\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \rho|\,|^t \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) \\
&\simeq \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{t+\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \rho|\,|^{-t} \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}) \\
&\simeq \rho|\,|^{-t} \times \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{t+\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}).
\end{aligned}
$$

Et ainsi $Jac_{\rho|\,|^{-t}}\tau \neq 0$ et nécessairement $|t| \in \mathcal{A}$ ce qui permet de conclure. Dans le cas $t = 0$, on remarque que $\mathcal{A}$ est l'ensemble $[0, (b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2)]$ et on décompose complètement l'induite $\times_{x\in[0,(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2]}\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$. On va montrer que l'ensemble de ses sous-quotients irréductibles coïncide avec l'ensemble des sous-représentations des induites $\rho \times \pi(\psi'', \epsilon'')$ où (ψ'', ϵ'') parcourt l'ensemble des paramètres qui se déduisent de (ψ, ϵ) en changeant uniquement dans $Jord_\rho(\psi)$ les éléments (ρ, i, δ_i) quand $i \leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$ (et est impair) en $(\rho, i+2, \delta''_i)$ où δ''_i est libre. Quant à ϵ'' il se déduit naturellement de ϵ. On fait remarquer que $Jord_\rho(\psi)$ contient tous les entiers impairs inférieurs ou égaux à $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ mais ne contient pas $b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$ qui serait nécessairement $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ ce qui contredit l'hypothèse sur ϵ.

Pour montrer notre assertion, fixons i_0 un entier impair inférieur ou égal à $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et supposons $i_0 \neq 1$. On décompose, $\times_{x\in[(i_0-1)/2,(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2]}\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$. On vérifie que tout sous-quotient irréductible est de la forme $\pi(\psi''_{i_0}, \epsilon''_{i_0})$ où $(\psi''_{i_0}, \epsilon''_{i_0})$

s'obtient en changeant dans $Jord_\rho(\psi)$ les éléments (ρ, i, δ_i) pour $i \in [i_{0,\rho,\psi,\epsilon}]$ en $(\rho, i+2, \delta''_{i+1})$ où δ''_{i+2} est libre. Cela se fait progressivement en faisant décroitre i_0 et en utlisant le cas particulier où $|\mathcal{A}| = 1$. Pour traiter ensuite le cas $i_0 = 1$, on utilise la semi-simplicité de 2.8 pour obtenir, que tout sous-quotient irréductible de l'induite $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$ est un sous-module irréductible d'une induite de la forme $\rho \times \pi(\psi'', \epsilon'')$ où ψ'', ϵ'' est l'un des couples obtenus à l'étape $i_0 = 2$. Ainsi tous ces sous-quotients irréductibles vérifient $Jac_\rho \neq 0$.

On est donc ramené au cas où $\tau \hookrightarrow \langle\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle \times\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$. Evidemment par hypothèse, on sait que τ est un sous-quotient de l'induite $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi, \epsilon)$ et $\mathcal{A}$ est maintenant connu comme étant l'ensemble des $|x|$ où x parcourt l'intervalle $[(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2, \ldots, -(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2]$ donc τ est un sous-quotient de $T\times\pi(\psi, \epsilon)$ où T est la représentation induite du GL convenable $\times\rho^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}$. Il existe un sous-quotient irréductible T' de T tel que τ soit sous-quotient de l'induite $T' \times \pi(\psi, \epsilon)$. L'intérêt de faire cela est que la conjonction de cette assertion et de ce que l'on sait déjà (à savoir que τ est un sous-module d'une induite convenable) va permettre de caractériser uniquement τ. On pourra alors montrer que c'est une représentation de la forme $\pi(\tilde{\psi'}, \tilde{\epsilon'})$ pour un couple connu et qui vérifie l'assertion de l'énoncé. Contrairement à ce que la preuve pourrait laisser croire, les représentations τ comme dans l'énoncé, en général ne sont pas des représentations du type $\pi(?, ?)$ mais c'est la preuve qui ramène à ce cas simple.

A partir de maintenant, je vais supposer que $\delta_{\rho,\psi,\epsilon} = +$ pour éviter de le traîner. Et après une nouvelle réduction, on va se ramener au cas où une représentation T' qui convient est $\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle$; on le montre, en prenant T' quelconque en calculant le module de Jacquet de l'induite $T' \times \pi(\psi, \epsilon)$ pour le Levi $GL(d_\rho((a_{\rho,\psi,\epsilon} + b_{\rho,\psi,\epsilon})/2 + 1)) \times G(n - d_\rho((a_{\rho,\psi,\epsilon} - b_{\rho,\psi,\epsilon})/2))$. Et on utilise le fait qu'un sous-quotient de ce module de Jacquet admet nécessairement la représentation $\langle\rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle \otimes \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ comme quotient. Pour cela on utilise la filtration de Bernstein-Zelevinski pour le module de Jacquet; cette filtration est indexée par des doubles classes dans le groupe de Weyl modulo les groupes de Weyl des Levi qui interviennent. Ces doubles classes sont indexées par un découpage en 3 du facteur GL du parabolique qui sert à induire $T' \times \pi(\psi, \epsilon)$, on admet ici des parties vides. Déjà on oublie toutes les doubles classes telles que les parties du découpage n'ont pas un cardinal multiple de d_ρ; on va d'ailleurs implicitement faire comme ci $d_\rho = 1$, quand on aura besoin d'une description vraiment technique. La première partie du découpage s'envoie par l'élément du groupe de Weyl dans le facteur GL du second parabolique, la troisièreme partie aussi après une dualisation et la partie du milieu s'envoie dans l'autre facteur (c'est à dire le groupe de même type que G) du second parabolique; notons d_2 le nombre d'éléments de cette partie. Par voie de conséquence, il faut calculer la restriction de $\pi(\psi, \epsilon)$ le long d'un parabolique de la forme $GL(v) \times G(n - v)$ où $n - v = n - d_\rho(a_{\rho,\psi,\epsilon} - b_{\rho,\psi,\epsilon}) - d_2$. Si $d_2 \neq 0$, tous les sous-quotients irréductibles de cette restriction ont leur support cuspidal pour l'action du GL qui contient un terme de la $\rho|\,|^x$ avec $|x| > (a_{\rho,\psi,\epsilon} - 1)/2$. Ces termes là ne peuvent donc donner lieu à une représentation ayant un quotient comme décrit ci-dessus. On n'a donc pas à en tenir compte non plus.

Les doubles classes restantes, sont en bijection avec les entiers $j_w \in [0, b_{\rho,\psi,\epsilon}+2]$, un représentant de la double classe étant l'élément, w, du groupe de Weyl qui s'identifie à la fonction de $[1,(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1]$ dans $\{\pm 1\}\times[1,(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1]$ (car $w(i)=+i$ pour tout $i>1+(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2)$ qui vérifie $w(i)=+i$ pour tout $i\leq j_w$, $w(i)=-((a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+2-i+j_w)$ pour tout $i\in]j_w,b_{\rho,\psi,\epsilon}+3]$ et $w(i)=j_w+(i-b_{\rho,\psi,\epsilon}-2)$ pour $i\in]b_{\rho,\psi,\epsilon}+3,(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1]$. Il faut donc calculer la restriction de $T'\times\pi(\psi,\epsilon)$ au Levi $GL(d_\rho j_w)\times GL(d_\rho(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3-j_w))\times GL(d_\rho(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2)\times G(n-d_\rho(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2)$. Puis il faut ensuite dualiser la représentation du 3e facteur après avoir permuté les 2e et 3e facteurs. Ensuite on induit au Levi $GL(d_\rho(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2)\times G(n-d_\rho(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2)$. Et cette induite doit admettre $\langle\rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\otimes\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ comme sous-quotient. Cela dit qu'il existe $T_1'\otimes T_2'$ sous-quotient irréductible de la restriction (module de Jacquet) de T' au Levi $GL(d_\rho j_w)\times GL(d_\rho(b_{\rho,\psi,\epsilon}+2-j_w))$ tel que $\langle\rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle$ soit un sous-quotient de l'induite $T_1'\times\langle\rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\times(T_2')^*$. D'après la classification de Zelevinski, nécessairement T_1' et $(T_2')^*$ sont des représentations de la forme $\langle ?,\ldots,?\rangle$ où les entiers entre les crochets vont en décroissant. Pour des questions de support cuspidal, il existe $x\in[(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2,-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2]$ tel que soit $(T_1',(T_2')^*)$ soit à l'ordre près $\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2},\ldots,\rho|\,|^{x}\rangle,\langle\rho|\,|^{x-1},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle$ (le premier terme n'intervient pas si x à la valeur maximale autorisée et le deuxième n'intervient pas quand il a la valeur minimale autorisée). Mais on connait aussi le support cuspidal de T' en particulier il est sans multiplicité (toutes les représentations cuspidales qui interviennent sont distinctes). Cela ne laisse plus que 2 possibilités:

1. $T_1'=0$, $T_2'=\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle$,
2. $T_1'=\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle$, $T_2'=\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}$.

On va régler le cas 2; dans ce cas le seul T' possible est l'unique sous-module irréductible inclus dans $T_1'\times T_2'$ que l'on note $\langle T_1',T_2'\rangle$. On va ramener ce cas au premier cas. On a les morphismes suivants, où on utilise le fait que la représentation $T_2'\times\pi(\psi,\epsilon)$ est irréductible car $T_2'\simeq\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}$ et 2.3:

$$\langle T_1',T_2'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)\hookrightarrow T_1'\times T_2'\times\pi(\psi,\epsilon)\simeq T_1'\times(T_2')^*\times\pi(\psi,\epsilon)\to(T_2')^*\times T_1'\times\pi(\psi,\epsilon).$$

La dernière flèche est purement une flèche dans un GL convenable, le noyau dans le GL est l'unique sous-module de $T_1'\times(T_2')^*$ c'est à dire $\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle$ et son image est l'unique sous-module irréductible de l'induite $(T_2')^*\times T_1'$ que l'on note $\langle(T_2')^*,T_1'\rangle$. On pose

$$\sigma_s:=\langle T_1',T_2'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)\cap\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$$

et σ_q l'image de $\langle T_1',T_2'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$ dans $\langle(T_2')^*,T_1'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$. Par un calcul de module de Jacquet facile, cette dernière induite, $\langle(T_2')^*,T_1'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$, a un unique sous-module irréductible et l'induite $\langle T_1',T_2'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$ a un unique quotient irréductible (pour vérifier cette dernière assertion on dualise pour se ramener à un problème de sous-module) qui n'est autre que le sous-module irréductible de $\langle(T_2')^*,T_1'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$. De plus, cette représentation intervient avec multiplicité 1 dans chacune des 2 induites considérées et elle vérifie l'assertion cherchée dans l'énoncé. On a donc montré que hormis ce sous-quotient (pour qui l'affaire est réglée) tous les autres sous-quotients irréductibles de l'induite $\langle T_1',T_2'\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$ sont aussi sous-quotients de l'induite $\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$. Et on est donc bien ramené à démontrer la proposition pour tout sous-quotient irréductible τ de $\langle\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\times\pi(\psi,\epsilon)$. On rappelle que, par hypothèse, τ est aussi sous-module de $\langle\rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2},\ldots,\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\times\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$.

On fixe τ comme ci-dessus. On rappelle que avec toutes les réductions que l'on a faite, on en est au cas où $\mathcal{A}$ contient un nombre de valeur absolue $(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2$; par hypothèse de l'énoncé ce nombre est strictement inférieur à $(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ et on a donc $b_{\rho,\psi,\epsilon} < a_{\rho,\psi,\epsilon}-4$.

On remarque d'abord que les 2 hypothèses assurent que τ est uniquement déterminé par ces hypothèses. En effet, il suffit de calculer la multiplicité de la représentation $\langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle \otimes \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ dans le module de Jacquet convenable de l'induite $\langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle \times \pi(\psi,\epsilon)$; cela a été fait ci-dessus et on trouve la multiplicité 1. On définit (ψ'',ϵ'') à partir de (ψ,ϵ) en ajoutant à $Jord_\rho(\psi)$ les 2 blocs $(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon}+2, \delta_{b_{\rho,\psi,\epsilon}+2}=+, \epsilon(b_{\rho,\psi,\epsilon}+2)=\epsilon(a))$ et $(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon}+4, \delta_{b_{\rho,\psi,\epsilon}+2}=+, \epsilon(b_{\rho,\psi,\epsilon}+2)=\epsilon(a))$. Et le but est maintenant de démontrer que $\tau\simeq\pi(\psi'',\epsilon'')$. L'induite $\langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \pi(\psi,\epsilon)$ a 2 sous-modules irréductibles: en effet, on vérifie que l'intersection

$$\langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \pi(\psi,\epsilon)$$
$$\cap\,\langle\langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle, \langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle\rangle \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$$

est non nulle mais ne contient, dans son module de Jacquet, le terme $\langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \otimes \pi(\psi,\epsilon)$ qu'avec multiplicité 1. Cela assure qu'il y a un autre sous-module irréductible, c'est lui que nous notons π''; alors π'' est aussi sous-module irréductible de l'induite $\langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$. L'induite $\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ est de longueur exactement 2 (c'est le cas particulier où $|\mathcal{A}|=1$ que l'on peut utiliser ici par récurrence) avec un sous-module, noté $\langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\rangle$ pour lequel $Jac_{\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}} \neq 0$ et un quotient pour lequel ce Jac est nul (lui vérifie $Jac_{\rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}} \neq 0$). Comme $Jac_{\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}}(\pi'') \neq 0$, nécessairement π'' est inclus dans $\langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\rangle$. Remarquons pour la suite que cette dernière induite a au plus un unique sous-module irréductible qui vérifie $Jac_{\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}}=0$. Il reste à montrer que π'' est aussi un sous-module de l'induite $\sigma := \langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}\rangle \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$; ceci entraînera que $\pi''=\tau$. On vérifie que σ a 2 sous-modules irréductibles (cela est facile); les 2 ne peuvent être inclus dans l'induite

$$\langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \langle \rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\rangle$$

d'après ce que l'on a vu ci-dessus. Les deux ne peuvent aussi être inclus dans l'induite $\langle \rho|\,|^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\rangle \times \langle \rho|\,|^{-(b_{\rho,\psi,\epsilon}+3)/2}, \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\rangle$ avec des notations similaires à ce qui précède. Il y en a donc un dans chaque induite et cela distingue les 2 sous-modules. On note τ'' le premier de ces sous-modules irréductibles; comme $Jac_{\rho|\,|^{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}}\sigma=0$, ceci est a fortiori vérifié pour τ'' d'où le fait que $\tau''\simeq\pi''$ (cf. la caractérisation de π'' donnée ci-dessus). Ainsi π'' est un sous-module de σ et cela termine la démonstration.

3.3. **Le cas $\epsilon(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon})=\epsilon(\rho,b_{\rho,\psi,\epsilon})$.** On note τ un sous-quotient irréductible de l'induite $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi,\epsilon)$. On sait que $\pi(\psi,\epsilon)$ est un sous-module irréductible de l'induite $<\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}> \times\pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$. On pose ici $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A}\cup\{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2,\dots,0\}\cup\{(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2,\dots,1\}$ et τ est a fortiori un sous-quotient irréductible de l'induite $\times_{x\in\tilde{\mathcal{A}}}\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$. Comme $a_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}} > a_{\rho,\psi,\epsilon}$, on applique l'hypothèse de récurrence et on sait qu'il existe un intervalle $\tilde{I}$ qui ordonne et relativise $\tilde{A}$ tel que τ soit un sous-module de $\sigma_{\tilde{I},\tilde{A}} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ (notations de l'énoncé). En particulier il existe un sous-quotient irréductible de $\sigma_{\tilde{I},\tilde{A}}$, noté T tel que τ soit un sous-module de l'induite $T \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$. Supposons qu'il existe $x_0 \neq \delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ tel que $Jac_{\rho|\,|^{x_0}}T \neq 0$; il en est de même $Jac_{\rho|\,|^{x_0}}\tau \neq 0$ et nécessairement $|x_0| \in \mathcal{A}$ et on conclut comme au début de la preuve. D'après la classification de Zelevinski des représentations irréductibles des groupes linéaires, on écrit T comme l'unique sous-module irréductible d'une induite de la forme $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_\ell$ (avec $\ell \in \mathbb{N}$) et où pour $i \in [1,\ell]$, Δ_i est une représentation de la forme $\langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}d_i}, \ldots, \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}f_i}\rangle$ et où on suppose que $d_i - f_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et où on suppose aussi $d_1 \leq \cdots \geq d_i \leq \cdots \leq d_\ell$. En écrivant T sous cette forme, $Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}d_1}}T \neq 0$. Cela prouve que $d_1 = (a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$. Mais comme $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ est le plus grand élément de $\tilde{A}$ et qu'il y intervient avec multiplicité 1, on a $\ell = 1$ (avec les notations introduites). Ainsi en posant $f = \delta_{\rho,\psi,\epsilon}f_1$, on voit que $-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}f > (b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ et que $\mathcal{A} = \{(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2, \ldots, |f|\}$. D'après l'hypothèse sur $\mathcal{A}$, on a aussi $|f| < (a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ et donc, à fortiori $2|f|-1 \in]b_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}}, a_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}}[$ (ici on utilise que $b_{\rho,\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}} = b_{\rho,\psi,\epsilon}-2$). Ainsi $\rho|\,|^f \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$ est irréductible donc isomorphe à $\rho|\,|^{-f} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})$. Cela entraîne les morphismes:

$$\begin{aligned}
\tau &\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^f\rangle \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\\
&\hookrightarrow \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{f-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \rho|\,|^f \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\\
&\simeq \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{f-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \rho|\,|^{-f} \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon})\\
&\simeq \rho|\,|^{-f} \times \langle \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \ldots, \rho|\,|^{f-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}}\rangle \times \pi(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon}),
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme résultant de ce que $-f \in [\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2, -\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2]$. On en déduit encore que $Jac_{\rho|\,|^{-f}}\tau \neq 0$ avec $|f| \in \mathcal{A}$. Cela termine la preuve.

4. Involution d'Aubert généralisée

Soit $x_0 \in 1/2\mathbb{Z}_{>0}$; on pose ici $X_0 := 2x_0+1$, la notation disparaîtra rapidement. On fixe ρ comme en 1; toutes les constructions ci-dessous dépendent de ce choix de ρ. Toutefois, ρ étant fixé, on ne le fait pas apparaître dans la notation; il n'en sera plus de même dans 6 où on remettra ρ dans la notation. On note $\mathcal{P}_{d_\rho}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de G dont un Levi est isomorphe à $\times_{i\in[1,\ell]}GL(a_id_\rho, F) \times G(n - \sum_{i\in[1,\ell]} a_i d\rho)$ pour une collection arbitraire de $a_i, i \in [1,\ell]$. Pour P dans $\mathcal{P}_{d_\rho}$ et pour une représentation σ d'un Levi de P, de longueur finie, on note $\sigma_{\leq x_0}$ un sous-quotient de σ tel que tous les sous-quotients de $\sigma_{\leq x_0}$ vus comme représentation de $\times_{i\in[1,\ell]}GL(a_id_\rho)$ ait pour support cuspidal une collection de représentations de la forme $\rho|\,|^{x_{1,\tau}}, \ldots \rho|\,|^{x_{\sum a_i,\tau}}$ avec des $x_{j,\tau}$ réels et vérifiant $j \in [1, \sum a_i]$, $|x_{j,\tau}| \leq x_0$, maximal avec cette propriété. On sait que $\sigma_{\leq x_0}$ est bien défini et est un facteur direct de σ. On définit $\sigma_{<x_0}$ en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte dans ce qui précède.

On définit l'involution d'Aubert à support $< x_0$ de la façon suivante (qui s'inspire fortement de [3] 1.5): pour toute représentation lisse π de $G(n)$, (ici *corg* est le corang ou encore le rang du tore central d'un Levi du parabolique considéré)

$$inv_{<X_0}(\pi) := \sum_{P\in\mathcal{P}_{d_\rho}} (-1)^{corg P} Ind_P^G(res_P(\pi)_{<x_0}).$$

Il faut comprendre cette formule comme un élément du groupe de Grothendieck associé aux représentations lisses de type fini de G.

Proposition. *$inv_{<X_0}$ est une involution dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses de G.*

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, cette proposition n'est pas vraie pour les groupes linéaires.

Pour calculer $inv_{<X_0}(inv_{<x_0}(\pi))$, il faut savoir calculer pour tout couple de paraboliques P, Q dans $\mathcal{P}_{d_\rho}$, $(res_Q^G\, Ind_P^G(res_P^G\pi)_{<x_0})_{<x_0}$. On utilise pour cela la description combinatoire de Bernstein-Zelevinski qui en donne une filtration indéxée par les doubles classes du groupe de Weyl modulo celui de P et celui de Q. Une double classe, contenant w, donne lieu à un parabolique P_w tel que $P_w \subset P$, un parabolique $P_{w^{-1}}$ tel $P_{w^{-1}} \subset Q$ et à un terme $(ind_{P^Q_{w^{-1}}}\, w^{-1} res^P_{P_w}(res^G_P(\pi))_{<x_0})_{<x_0}$. On remarque d'abord que ce terme est 0 sauf si P_w et $P_{w^{-1}}$ sont dans $\mathcal{P}_{d_\rho}$ et qu'alors cela n'est pas autre chose que $ind^Q_{P_{w^{-1}}} w^{-1}(res^G_{P_w}\pi)_{<x_0}$. C'est cela le point clé; pour le vérifier j'ai préféré écrire l'assertion en terme de partitions; à P correspond une collection d'entiers $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_\ell)$ dont la somme est inférieure ou égale à n. A Q correspond une collection analogue $(a'_1, \ldots, a'_j, \ldots, a'_{\ell'})$ et un w induit une "subdivision" (la subdivision ne détermine pas uniquement w) $a_{i,j}, a'_{i,j}; i \in [1, \ell], j \in [1, \ell'], \alpha'_j, j \in [1, \ell']$ vérifiant:

$$\forall j \in [1, \ell'], \textstyle\sum_{i\in[1,\ell]}(a_{i,j} + a'_{i,j}) + \alpha'_j = a'_j$$
$$\forall i \in [1, \ell]\alpha'_i := a_i - \textstyle\sum_{j\in[1,\ell']}(a_{i,j} + a'_{i,j}) \geq 0.$$

On a alors à considérer la restriction de π au parabolique de Levi $\times_{i\in[1,\ell]} \times_{j\in[1,\ell']} GL(a_{i,j}) \times GL(\alpha_i) \times GL(a'_{i,j}) \times \Big(\times_{j\in[1,\ell']} GL(\alpha'_j) \times G(n - \sum_{i\in[1,\ell]} a_i - \sum_{j\in[1,\ell']} \alpha'_j)\Big)$ en tenant compte du fait que l'ordre dans chaque produit $\times_{j\in[1,\ell']} GL(a_{i,j}) \times GL(\alpha_i) \times GL(a'_{i,j})$ dépend de w et n'est pas forcément celui écrit. On projette sur un certain support cuspidal pour tous les facteurs hors de la grande parenthèse. Puis w permute ces facteurs (en induisant aussi des passages à la contragrédiente) et on induit au parabolique de Levi $\times_{j\in[1,\ell']} GL(a'_j) \times G(n - \sum_{j\in[1,\ell']} a'_j)$ et on reprojette sur un certain support cuspidal pour tous les facteurs GL; cela veut dire que l'on pouvait dès le départ projeter sur le support cuspidal défini par x_0 pour tous les facteurs GL et que cela suffit même. C'est l'assertion annoncée.

Revenons à notre calcul. On doit encore induire de Q à G la représentation $(ind^Q_{P^Q_{w^{-1}}} w^{-1} res^P_{P_w}(res^G_P(\pi))_{<x_0})_{<x_0}$.

Ce qui n'est autre (dans le groupe de Grothendieck) que $ind^G_{P_w}(res^G_{P_w}\pi)_{<x_0}$. Ainsi pour calculer la somme on fixe un parabolique R et on somme sur les triplets (P, Q, w) vérifiant $P \supset R$, w est en fait un représentant d'une double classe modulo les groupes de Weyl associé à P et Q et vérifiant $P \cap Q_w = R$, ce que l'on somme est le signe $(-1)^{rg\,P + rg\,Q}$. Il est montré dans [3] 1.7 qu'une tel somme est 0 si R est propre.

Remarque. on pourrait évidemment prendre des supports cuspidaux plus généraux que ceux que l'on a choisis. La seule condition sur le choix des cuspidales des groupes linéaires qui interviennent est qu'elles doivent former un ensemble stable par dualité (à cause de l'action de w^{-1} qui effectue partiellement des passages à la duale). Et l'autre contrainte est que l'on ne peut controler la multiplicité avec laquelle une représentation cuspidale donnée intervient dans le support cuspidale.

4.1. **Involution sur les représentations.** Dans le paragraphe précédent, on a défini une involution dans le groupe de Grothendieck; dans certains cas cette involution envoie une représentation irréductible sur une représentation irréductible au signe près. Ceci n'est évidemment pas vrai en général.

Théorème. *Soit (ψ,ϵ) comme en 1 d'où $\pi(\psi,\epsilon)$ et soit $a \in Jord_\rho(\psi)$. Alors $inv_{<a}\pi(\psi,\epsilon)$ est irréductible au signe près.*

On va d'abord démontrer l'assertion suivante:

Soit $n' < n$ et (ψ',ϵ') un analogue de (ψ,ϵ) pour $G(n')$. On fixe aussi ρ et on pose ici $a = a_{\rho,\psi',\epsilon'}$. Soit π un sous-quotient irréductible d'une induite pour $G(n)$ de la forme $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi',\epsilon')$ avec pour tout $x \in \mathcal{A}$, $x < (a-1)/2$ et, évidemment, $|\mathcal{A}|d_\rho + n' = n$. Alors $inv_{<a}\pi$ est irréductible au signe près.

Posons $x_0 := (a-1)/2$ et ici $a = X_0$. Là aussi on s'inspire très fortement de [3] et de la preuve donnée dans l'Erratum. C'est à peu près clair (mais on sera plus explicite ci-dessous) quand on lit cette preuve qu'avec nos définitions, $inv_{<a}(\pi)$ sera irréductible (au signe près) si il existe $P_{0,<x_0} \in \mathcal{P}_{d_\rho}$ tel que pour tout $P \in \mathcal{P}_{d_\rho}$, soit $P \not\supset P_{0,<x_0}$ alors $ind_P^G(res_P^G(\pi)_{<x_0}) = 0$ et soit $P \supset P_{0,<x_0}$ alors tout sous-quotient irréductible τ de $ind_P^G(res_P^G(\pi)_{<x_0})$ on a $res^G_{P_{0,<x_0}}\tau \neq 0$. Le parabolique $GL(d_\rho,F)\times\cdots\times GL(d_\rho,F)\times G(n')$, où il y a $|\mathcal{A}|$ copies de $GL(d_\rho,F)$ a cette propriété grâce à 3. Reprenons alors la démonstration de [3]. Aubert construit un complexe formé de G-modules; pour cela, elle fixe un choix de racines simples pour G et pour tout parabolique standard P, on note Δ^P l'ensemble des racines simples hors de P; ainsi le corang de P est le cardinal de Δ^P. Si j est le corang de P, $\wedge^j\mathbb{C}[\Delta^P]$ est un espace de dimension 1 sur lequel on fait agir G trivialement. Aubert pose $\tilde{E}_0 = \pi$ et pour $j \geq 1$, $\tilde{E}_j := \bigoplus_P \big(ind_P^G\, res_P^G(\pi)\big)\otimes\wedge^j\mathbb{C}[\Delta_P]$, où P parcourt l'ensemble des paraboliques standard de corang j. Par définition, $\tilde{E}_j$ est une somme directe sur des paraboliques P d'espaces $\tilde{E}_P$ et pour Q de corang $j+1$, la flèche de transition de $\tilde{E}_P$ dans $\tilde{E}_Q$ est 0 si P ne contient pas Q et sinon est le produit tensoriel de l'application naturelle de projection de $Ind_P^G\sigma \rightarrow Ind_Q^G res_Q^P\sigma$ (ici $\sigma = res_P^G(\pi)$ mais l'application peut se définir plus généralement), avec l'application de multiplication à droite par $\wedge\alpha_P^Q$ de $\wedge^j\mathbb{C}[\Delta_P]$ dans $\wedge^{j+1}\mathbb{C}[\Delta^Q]$, où α_P^Q est l'unique élément de $\Delta^Q - \Delta^P$. Et, évidemment, on somme sur tous ces couples.

Nous ce que l'on fait ici est de remplacer res_P^G par $res^G_{P,<x_0}$; avec l'existence de $P_{0,<x_0}$, n'interviennent donc que les P qui contiennent le parabolique $P_{0,<x_0}$ le parabolique de Levi isomorphe à $|\mathcal{A}|$ copies de $GL(d_\rho,F)$ fois $G(n-|\mathcal{A}|d_\rho)$.

Il est clair que l'on a bien défini un complexe et il faut démontrer qu'il est exact sauf pour $j = |\mathcal{A}|$. Pour cela on fait exactement comme dans [3], erratum; elle utilise le fait que le foncteur de Jacquet suivi de la projection sur la partie cuspidale est exact. Et elle montre non pas que le complexe de départ est exact mais que le complexe obtenu en prenant les modules de Jacquet cuspidaux l'est. Nous, on ne prend que $res_{P_{0,<x_0},<x_0}$ et on obtient des représentations d'un produit de $GL(d_\rho,F)$ fois $G(n-|\mathcal{A}|d_\rho)$ dont chaque sous-quotient irréductible est automatiquement cuspidal pour les facteurs $GL(d_\rho)$ et est isomorphe à $\pi(\psi',\epsilon')$ pour le facteur $G(n-|\mathcal{A}|d_\rho)$. Que le complexe obtenu avec cette restriction soit exact (sauf sa dernière flèche non nulle) se démontre alors avec la filtration de Bernstein Zelevinski en copiant mot pour mot la démonstration d'Aubert. Mais cela nous suffit pour savoir que

le complexe de départ (sauf sa dernière flèche non nulle) est exact car tout sous-quotient τ irréductible d'un $\tilde{E}_j$ est isomorphe à un sous-quotient irréductible de $\times_{x\in\mathcal{A}}\rho|\,|^x \times \pi(\psi',\epsilon')$ et vérifie donc $res_{P_{0,<x_0},<x_0}(\tau)\neq 0$ d'après 3.

On sait donc que $inv_{<X_0}\pi$ est à un signe près une représentation de G et non pas seulement un élément du groupe de Grothendieck. Mais, en plus, les sous-quotients irréductibles de cette représentation vérifient la même hypothèse que π puisqu'ils sont sous-quotients de $ind^G_{P_{0,<x_0}} res^G_{P_{0,<x_0},<x_0}\pi$. En outre le signe qui intervient n'est autre que $(-1)^{|\mathcal{A}|}$ et est donc indépendant des sous-quotients. Comme $inv_{<X_0}(inv_{<X_0}(\pi))\simeq \pi$ est une représentation irréductible, cela entraîne que $inv_{X_0}(\pi)$ est elle-même irréductible au signe près.

On a donc démontré l'assertion cherchée et on va l'appliquer pour obtenir le théorème. Pour cela on montre que $\pi(\psi,\epsilon)$ vérifie l'hypothèse de l'assertion. Il faut définir (ψ',ϵ'); si $a_{\rho,\psi,\epsilon}\geq a$, on pose tout simplement $(\psi',\epsilon')=(\psi,\epsilon)$ qui convient. Sinon, on définit d'abord un objet auxiliaire, (ψ_1,ϵ_1):

- si $b_{\rho,\psi,\epsilon}\neq -1$ et $\epsilon(a_{\rho,\psi,\epsilon})=\epsilon(b_{\rho,\psi,\epsilon})$, on obtient (ψ_1,ϵ_1) en enlevant simplement de $Jord_\rho(\psi)$ les 2 éléments $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ et $b_{\rho,\psi,\epsilon}$.
- sinon on définit (ψ_1,ϵ_1) en changeant simplement dans $Jord_\rho(\psi)$, $a_{\rho,\psi,\epsilon}$ en $b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$ (donc en 1 si $b_{\rho,\psi,\epsilon}=-1$).

On remarque que dans les 2 cas $a_{\rho,\psi_1,\epsilon_1} > a_{\rho,\psi,\epsilon}$ et est même précisément le plus petit bloc de $Jord_\rho(\psi)$ strictement supérieur à $a_{\rho,\psi,\epsilon}$. On recommence avec (ψ_1,ϵ_1) la même construction et on finit par arriver à un couple (ψ',ϵ') pour lequel $a\leq a_{\rho,\psi',\epsilon'}$. C'est celui que nous voulons. Il est clair par construction que π vérifie l'hypothèse de l'assertion pour ce choix.

4.2. **Signe de l'involution.** Pour (ψ,ϵ) et pour $a\in Jord_\rho(\psi)$, on a défini $inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))$. On note ici $|inv_a(\pi(\psi,\epsilon))|$ la représentation irréductible $\pm inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))$.

Proposition. *On fixe (ψ,ϵ) et $a\in Jord_\rho(\psi)$. Supposons que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers impairs. Alors, on note $N_{<a}:=|\{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a\}|$ et l'on a:*

$$inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))=(-1)^{N_{<a}(N_{<a}-1)/2}\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}|inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))|.$$

Supposons que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers pairs, alors

$$inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))=\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a}\epsilon(\alpha)(-1)^{\alpha/2}|inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))|.$$

Le signe introduit par l'involution dépend de la parité du corang du parabolique notée $P_{0,<x_0}$ (où $x_0=(a-1)/2$) dans la preuve précédente. Dans cette preuve on a construit (ψ',ϵ') et le signe n'est autre que $(-1)^N$ où N est la différence entre le rang de ψ et celui de ψ' au sens nombre de représentations irréductibles de W_F intervenant dans ψ resp. ψ' ou encore $1/2(\sum_{a\in Jord_\rho(\psi)}a-\sum_{a'\in Jord_\rho(\psi')}a')$. En fait on n'a pas construit (ψ',ϵ') directement, on est passé par la construction de (ψ_1,ϵ_1). On note donc ζ le signe qui s'introduit pour l'involution de $\pi(\psi,\epsilon)$ et ζ_1 son analogue pour $\pi(\psi_1,\epsilon_1)$. Calculons la différence entre le rang de ψ et celui de ψ_1. On a construit (ψ_1,ϵ_1) en distinguant 2 cas.

1. Le premier cas est celui où $\epsilon(\rho,a_{\rho,\psi,\epsilon})=\epsilon(\rho,b_{\rho,\psi,\epsilon})$. Dans ce cas la différence entre le nombre de représentations irréductibles de $\psi_{|W_F}$ moins l'analogue pour ψ_1 est exactement $(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2$.

2. Dans le cas où l'hypothèse ci-dessus n'est pas satisfaite ce qui inclut le cas où $b_{\rho,\psi,\epsilon}=-1$, on trouve au contraire $(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2-1$.

Ainsi $\zeta=\zeta_1(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2}$ dans le premier cas et $\zeta=\zeta_1(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1}$ dans le deuxième cas. Le plus simple est maintenant d'admettre par récurrence la formule donnée par l'énoncé pour ζ_1 et de montrer que l'on obtient bien celle pour ζ; il faudra toutefois vérifier que la formule est vraie si $a\leq a_{\rho,\psi,\epsilon}$. On fait d'abord toute la démonstration dans le cas où $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entier impair puis le cas opposé.

Supposons d'abord que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers impairs.

Si $a\leq a_{\rho,\psi,\epsilon}$, l'ensemble $\{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a\}$ n'est autre que l'ensemble des entiers $2j-1$ pour $j\in[1,N_{<a}]$. Ainsi

$$\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}=\prod_{j\in[1,N_{<a}]}(-1)^{j-1}=(-1)^{N_{<a}(N_{<a}-1)/2};$$

la formule de l'énoncé donne donc 1 ce qui correspond à l'égalité $\pi=inv_{<a}\pi$ dans ce cas.

Traitons donc le cas où (ψ_1,ϵ_1) est défini comme ci-dessus. On note $N^1_{<a}$ l'analogue de $N_{<a}$ pour ψ_1. Traitons le cas 1: ici $N^1_{<a}=N_{<a}-2$ d'où

$$\begin{aligned}(-1)^{N^1_{<a}(N^1_{<a}-1)/2}&\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi_1),\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}\\ &=(-1)^{(N_{<a}(N_{<a}-1)/2+1)}\left(\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}\right)(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2+(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$(-1)^{1+(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2+(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}=(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2}.$$

Traitons le cas 2 en gardant l'hypothèse de parité. Ici $N^1_{<a}=N_{<a}$ et il faut donc calculer

$$\begin{aligned}&\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi_1);\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}\\ &\quad=\left(\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}\right)(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2+(b_{\rho,\psi,\epsilon}+1)/2}\\ &\quad=\left(\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi);\alpha<a}(-1)^{(\alpha-1)/2}\right)(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2}.\end{aligned}$$

Et pour conclure on utilise le fait que $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ étant impair $(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2}=(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1}$.

Supposons que $Jord_\rho(\psi)$ est formé d'entiers pairs; on remarque que pour $\alpha\in Jord_\rho(\psi)$ avec $\alpha\leq b_{\rho,\psi,\epsilon}$, $\epsilon(\alpha)=(-1)^{\alpha/2}$ par définition de $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ et sous cette hypothèse de parité, on cherche donc à montrer que

$$\zeta=\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi),\alpha\in]b_{\rho,\psi,\epsilon},a[}\epsilon(\alpha)(-1)^{\alpha/2}.$$

On a bien $\zeta=1$ si $a\leq a_{\rho,\psi,\epsilon}$. On reprend donc les notations (ψ_1,ϵ_1) et ζ_1 déjà introduites.

Dans le premier cas de la définition de (ψ_1, ϵ_1),

$$\zeta = \zeta_1(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2}; \qquad \zeta_1 = \prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi_1)\cap]b_{\rho,\psi_1,\epsilon_1},a[} \epsilon(\alpha)(-1)^{\alpha/2}.$$

Or $Jord_\rho(\psi_1)\cap]b_{\rho,\psi_1,\epsilon_1}, a[= (Jord_\rho(\psi)\cap]b_{\rho,\psi,\epsilon}, a[) - \{a_{\rho,\psi,\epsilon}\}$. Mais par hypothèse $\epsilon(\rho, b_{\rho,\psi,\epsilon}) = \epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = (-1)^{b_{\rho,\psi,\epsilon}/2}$. D'où

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi_1)\cap]b_{\rho,\psi_1,\epsilon_1},a[} &\epsilon(\alpha)(-1)^{\alpha/2}\\ &= \left(\prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi)\cap]b_{\rho,\psi,\epsilon},a[} \epsilon(\alpha)(-1)^{\alpha/2}\right)(-1)^{b_{\rho,\psi,\epsilon}/2+a_{\rho,\psi,\epsilon}/2}.\end{aligned}$$

Ce qui donne bien la formule cherchée pour ζ.

Dans le deuxième cas de la définition de (ψ_1, ϵ_1), on a

$$Jord_\rho(\psi_1)\cap]b_{\rho,\psi_1,\epsilon_1}, a[= Jord_\rho(\psi)\cap]b_{\rho,\psi,\epsilon}, a[-\{a_{\rho,\psi,\epsilon}\}$$

Par hypothèse $\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon}) = -\epsilon(b_{\rho,\psi,\epsilon}) = -(-1)^{b_{\rho,\psi,\epsilon}/2}$. D'où

$$\begin{aligned}\epsilon(\rho, a_{\rho,\psi,\epsilon})(-1)^{a_{\rho,\psi,\epsilon}/2} &= -(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2}\\ &= (-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}+b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1} = (-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1},\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $b_{\rho,\psi,\epsilon}$ est pair. On obtient alors

$$\zeta = \zeta_1(-1)^{(a_{\rho,\psi,\epsilon}-b_{\rho,\psi,\epsilon})/2+1} = \prod_{\alpha\in Jord_\rho(\psi)\cap]b_{\rho,\psi,\epsilon},a[} \epsilon(\alpha)(-1)^{\alpha/2},$$

comme annoncé dans l'énoncé.

4.3. **Propriétés de l'involution.** On fixe x_0 comme en 4. Soit P un sous-groupe parabolique de G et on note w_P un élément du groupe de Weyl qui envoit toutes les racines positives hors de P sur des racines négatives. On fixe un Levi de P et on considère le groupe de Grothendieck associé aux représentations irréductibles, σ, de ce Levi qui vérifient que $\sigma \simeq res_{P,<x_0}\sigma$. Dans ce groupe de Grothendieck, on définit $inv^P_{<X_0}$ exactement par les formules déjà données pour G. Mais avec les hypothèses, ce n'est pas autre chose, sur les facteurs GL, que l'involution d'Aubert-Schneider-Stuhler. En recopiant [3] 1.7 (2), on obtient pour toute représentation π de G.

Remarque. dans le groupe de Grothendieck défini ci-dessus, on a l'égalité

$$res_{P,<x_0} inv_{<X_0}(\pi) = Ad(w_P) inv^P_{<X_0} res_{P,<x_0}(\pi).$$

Corollaire. *Soit (ψ, ϵ) et $a \in Jord_\rho(\psi)$. Supposons que $a_{\rho,\psi,\epsilon} < a$.*

(i) *Si $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$, alors $|inv_{<a}(\pi(\psi, \epsilon))| \hookrightarrow \rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times |inv_{<a}(\pi(\psi', \epsilon'))|$.*

(ii) *Si $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon} + 2$ alors*

$$|inv_{<a}(\pi(\psi, \epsilon))| \hookrightarrow \langle\rho| |^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}, \dots, \rho| |^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}\rangle \times |inv_{<a}(\pi(\psi', \epsilon'))|.$$

Ce serait un corollaire immédiat du résultat précédent si $inv_{<a}$ était défini directement dans la catégorie des modules et non dans le groupe de Grothendieck; mais ce n'est pas le cas. Sous les 2 hypothèses, on remarque que $a \in Jord_\rho(\psi')$ ce qui permet de savoir sans problème que $inv_{<a}(\pi(\psi', \epsilon')$ est aussi irréductible au

signe près. On va démontrer (ii) qui est plus difficile que (i). Sous les hypothèses de (ii), on sait que

$$Jac_{\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} \cdots Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(\pi(\psi,\epsilon)) \simeq \pi(\psi',\epsilon').$$

On en déduit donc grâce au résultat dans le groupe de Grothendieck que

$$Jac_{\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}} \cdots Jac_{\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}}(|inv_{<a}\pi(\psi,\epsilon)|) \simeq |inv_{<a}\pi(\psi',\epsilon')|).$$

Cela prouve qu'il existe une inclusion de

$$|inv_{<a}\pi(\psi,\epsilon)| \hookrightarrow \rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times |inv_{<a}\pi(\psi',\epsilon')|.$$

Ainsi il existe σ un sous-quotient irréductible de $\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \cdots \times \rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(b_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2}$ tel que

$$|inv_{<a}\pi(\psi,\epsilon)| \hookrightarrow \sigma \times |inv_{<a}\pi(\psi',\epsilon')|.$$

Soit x tel que $Jac_{\rho|\,|^x}\sigma \neq 0$. On a alors aussi $Jac_{\rho|\,|^x}|inv_{<a}\pi(\psi,\epsilon)| \neq 0$ et avec le résultat dans le groupe de Grothendieck, $Jac_{\rho|\,|^{-x}}\pi(\psi,\epsilon) \neq 0$. Cela entraîne que $-x = \delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2$ ce qui ne laisse qu'une possibilité à σ celle de l'énoncé.

5. Calcul de l'involution

On fixe (ψ,ϵ) et $a \in Jord_\rho(\psi)$. On pose $\check{\psi}_{<a}$ l'analogue de ψ où on change simplement $\delta_{\rho,\alpha}$ en son opposé pour tous les $\alpha \in Jord_\rho(\psi)$ avec $\alpha < a$.

Théorème. *Soit (ψ,ϵ) et $a \in Jord_\rho(\psi)$. Alors $|inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))| = \pi(\check{\psi}_{<a},\epsilon)$.*

On montre ce théorème par récurrence sur n (rang de ψ). On remarque aussi que si $a_{\rho,\psi,\epsilon} \geq a$, on sait que $inv_{<a}\pi(\psi,\epsilon) = \pi(\psi,\epsilon)$ et l'assertion est trivialement vraie dans ce cas. On supposera donc que $a > a_{\rho,\psi,\epsilon}$.

Supposons d'abord que $a_{\rho,\psi,\epsilon} > b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$. Dans ce cas, $\pi(\psi,\epsilon)$ est l'unique sous-module de l'induite $\rho|\,|^{\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\psi',\epsilon')$ avec les notations de 2.4. D'après le corollaire de 4.3 et la propriété par induction, $|inv_{<a}(\pi(\psi,\epsilon))|$ est sous-module de l'induite $\rho|\,|^{-\delta_{\rho,\psi,\epsilon}(a_{\rho,\psi,\epsilon}-1)/2} \times \pi(\check{\psi}'_{<a},\epsilon')$. Cette induite n'a qu'un seul sous-module irréductible qui est $\pi(\check{\psi}_{<a},\epsilon)$. D'où le résultat dans ce cas.

Supposons maintenant que $a_{\rho,\psi,\epsilon} = b_{\rho,\psi,\epsilon}+2$. Dans tous les cas où l'on a pu caractériser $\pi(\psi,\epsilon)$ par des propriétés de son module de Jacquet ne faisant intervenir que des $\rho|\,|^x$ avec $|x|<a$, on conclut comme dans le cas précédent. Mais il reste le cas où $a_{\rho,\psi,\epsilon}=3$, $b_{\rho,\psi,\epsilon}=1$ et $a_{\rho,\psi',\epsilon'} \geq a$. Je trouve plus amusant de faire ce cas à la main.

On décompose l'induite $\rho|\,| \times \rho \times \pi(\psi',\epsilon)$. Pour cela on a besoin des notations suivantes. On distingue par un signe ζ les 2 sous-modules irréductibles de l'induite $\rho \times \pi(\psi',\epsilon')$ et on les note π'_ζ. Pour $\delta = \pm$ on note $\pi_{\delta,\zeta}$ l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|\,|^\delta \times \pi'_\zeta$ et on note L l'unique sous-module irréductible de l'induite $\langle\rho,\rho|\,|\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$ qui est aussi l'unique sous-module irréductible de l'induite $\langle\rho,\rho|\,|^{-1}\rangle \times \pi(\psi',\epsilon')$. On sait que tout sous-quotient irréductible de $\rho|\,| \times \rho \times \pi(\psi',\epsilon')$ est l'une de ces représentations (cf. 3) et la seule chose est de vérifier que chacune de ces représentations intervient avec multiplicité 1 sauf L qui intervient avec multiplicité 2; pour cela, on considère la multiplicité de certains termes dans le module de Jacquet, les termes les plus évidents. Ensuite, on revient à la définition, pour $\delta = \pm, \zeta = \pm$:

$$\begin{aligned} inv_{<a}\pi_{\delta,\zeta} &= \pi_{\delta,\zeta} - \rho|\,|^{\delta} \times \pi'_{\zeta} - \langle \rho|\,|^{\delta}, \rho\rangle \times \pi(\psi', \epsilon') + \rho|\,|^{\delta} \times \rho \times \pi(\psi', \epsilon') \\ &= \pi_{\delta,\zeta} - \pi_{\delta,\zeta} - \pi_{-\delta,\zeta} - L - \pi_{\delta,\zeta} - \pi_{\delta,-\zeta} - L + \pi_{\delta,\zeta} + \pi_{-\delta,\zeta} \\ &\quad + \pi_{\delta,-\zeta} + \pi_{-\delta,-\zeta} + 2L = \pi_{-\delta,-\zeta}. \end{aligned}$$

Maintenant le résultat annoncé découle dans ce cas des choix faits en 2.6. Ils ont d'ailleurs été faits pour avoir ce résultat.

6. Réduction au cas discret

Soit (ψ, ϵ); on note (ψ_{dis}, ϵ) le couple qui se déduit de (ψ, ϵ) uniquement en changeant tous les signes $\delta_{\rho,a}$ en $+$ pour tout $(\rho, a) \in Jord(\psi)$; c'est-à-dire que $\psi_{disc} = \psi \circ \Delta$ avec les notations du début de ce travail. Avec les conjectures faites, on sait associer grâce à [13] une série discrète $\pi(\psi_{dis}, \epsilon)$ à ce couple qui est une représentation de $G_\sharp$ où $\sharp = \epsilon_Z := \prod_{(\rho,\alpha)\in Jord(\psi)} \epsilon(\alpha)$. Il est commode ici de définir pour $a \in Jord_\rho(\psi)$, $inv_{\rho,<a}$ au lieu de $inv_{<a}$, c'est-à-dire de mettre ρ dans la notation et de poser $inv_{\rho,\leq a}$ l'involution $inv_{\rho,<b}$ où b est le plus petit élément de $Jord_\rho(\psi)$ strictement supérieur à a s'il existe ou $b = \infty$ sinon.

Proposition. $\pi(\psi, \epsilon) = \circ_{(\rho,a,\delta_{\rho,a})\in Jord(\psi);\delta_{\rho,a}=-}\left(|inv_{\rho,<a}| \circ |inv_{\rho,\leq a}|\right)\pi(\psi_{disc}, \epsilon)$, *où l'ordre des opérations n'a pas d'importance.*

Cette proposition est un corollaire à peu près immédiat de 5: en appliquant ce résultat 2 fois, on vérifie que, pour $\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}$ un couple donnant lieu à la représentation $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$, la représentation $inv_{\rho,<a} \circ inv_{\rho,\leq a}\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ pour $a \in Jord_\rho(\tilde{\psi})$, est la représentation $\pi(\tilde{\psi}_{\rho,a}, \tilde{\epsilon})$ où le seul changement est que $\delta_{\rho,a}$ a été changé en son opposé.

7. Stabilité

Ici on reprend la notation $\sharp$ de l'introduction; elle n'a d'intérêt que si $G = SO(2n+1, F)$ ou $O(2n, F)$. Et on pose $G^* = Sp(2n, \mathbb{C})$ si $G = SO(2n+1, F)$, $G^* = O(2n, \mathbb{C})$ si $G = O(2n, F)$ et $G^* = SO(2n+1, \mathbb{C})$ si $G = Sp(2n, F)$. On note z l'élément non trivial du centre de G^* quand celui-ci existe et $z = 1$ sinon. Pour ϵ, on note $\epsilon_Z = \epsilon(z)$ où z est comme ci-dessus ou encore $\epsilon_Z := \prod_{\alpha \in Jord_\rho(\psi)} \epsilon(\alpha)$; dans le cas où $G = Sp(2n)$ nécessairement $\epsilon_Z = 1$ par hypothèse (cf. 2.1). Ici on fait varier ϵ et on a donc besoin de l'hypothèse de 2.1 pour tout les couples $\psi_{cusp}, \epsilon_{cusp}$ pour ψ tel que $\psi \circ \Delta$ est fixé et ϵ varie parmi les caractères du centralisateur de $\psi \circ \Delta$ dans G^*.

Et on a la conjecture qui est due à Langlands (on renvoit aux articles de Langlands-Shelstad pour la définition de classe de conjugaison stable et donc la notion de stabilité):

Conjecture dans le cas discret. *La distribution de $G_\sharp$, $\sharp \sum_{\epsilon;\epsilon_Z=\sharp} \pi(\psi, \epsilon)$ est stable. Quand on fait varier $\sharp$ ces 2 distributions se correspondent dans le transfert de G_{iso} à G_{an}.*

Cette conjecture est maintenant démontrée pour les représentations de réduction unipotente des groupes orthogonaux impairs ou unitaires en [15], [10]. En niveau zéro pour les groupes orthogonaux, elle est ramenée à un calcul de signe en [11]. On voit donc bien comment aborder cette conjecture en niveau zéro, mais c'est le seul cas qui soit clair (au moins pour moi).

Arthur a fait une conjecture avec des signes pour des paquets plus généraux qui inclut les nôtres et c'est la conjecture d'Arthur pour nos $\pi(\psi,\epsilon)$ que l'on va ramener à la conjecture du cas discret.

On fixe ψ comme dans tout ce papier. On note z_2 l'élément non trivial du centre de la deuxième copie de $SL(2)$ et on peut calculer

$$\epsilon(\psi(z_2)) = \times_{\alpha\in Jord_\rho(\psi),\alpha\equiv 0[2],\delta_{\rho,\alpha}=-}\epsilon(\alpha).$$

Théorème (sous la conjecture dans le cas discret)**.** *La combinaison linéaire de représentations de $G_\sharp$,*

$$\sharp\sum_{\epsilon;\epsilon_Z=\sharp}\epsilon(\psi(z_2))\pi(\psi,\epsilon)$$

est stable. Quand on fait varier $\sharp$ ces 2 distributions se correspondent dans le transfert de G_{iso} à G_{an}.

Il suffit de remarquer que pour $(\rho,a)\in Jord(\psi)$ l'opération $inv_{\rho,<a}\circ inv_{\rho,\leq a}$ envoie une combinaison linéaire stable de représentations sur une combinaison linéaire stable. Restreindre et induire sont 2 opérations qui préservent la stabilité; pour l'induction, cela a certainement été remarqué d'abord par Shelstad mais résulte de la formule explicite pour le caractère d'une induite. Pour la restriction, cela résulte aussi de la possibilité de calculer le caractère de la restriction à l'aide du caractère de la représentation par une formule de Casselman; toutefois, ici on ne fait pas que restreindre on projette aussi sur un support cuspidal. Cela ne change pas grand chose mais faute de référence précise, [16] (paragraphe: propriétés générales du transfert stable) récrit une démontration d'un résultat plus précis qui inclut les propriétés du transfert.

Pour terminer la preuve, il faut calculer le signe qui s'introduit avec l'utilisation des involutions. Fixons (ψ,ϵ) ainsi que ρ et $\alpha\in Jord_\rho(\psi)$. On veut calculer le signe de $inv_{\rho,<a}\circ inv_{\rho,\leq a}\pi(\psi,\epsilon)$ quand $\delta_{\rho,a}=-$. Et la seule chose qui compte est sa dépendence en ϵ. D'après 4.2 la seule dépendance en ϵ vient des $\alpha\in Jord_\rho(\psi)$ tel que α est pair et il est clair que quand on applique $inv_{\rho,<\alpha}\circ inv_{\rho,\leq\alpha}$ cette dépendance est tout simplement $\epsilon(\alpha)$. C'est ce qui donne $\epsilon(\psi(z_2))$. Ainsi pour un signe convenable qui ne nous importe pas,

$$\circ_{(\rho,a,\delta_{\rho,a})\in Jord(\psi);\delta_{\rho,a}=-}(inv_{\rho,<a}\circ inv_{\rho,\leq a})\sum_{\epsilon;\epsilon_Z=\sharp}\pi(\psi_{disc},\epsilon)=\pm\sum_{\epsilon;\epsilon_Z=\sharp}\epsilon(z_2)\pi(\psi,\epsilon).$$

Ce qui ramène bien la stabilité pour ψ à celle pour ψ_{disc}.

Références

1. Arthur J.: *Unipotent automorphic representations: conjectures* in Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque 171-172, 1989, pp. 13-72. MR1021499 (91f:22030)
2. Arthur J.: *An introduction to the trace formula*, prépublication.
3. Aubert A.-M.: *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Trans. Amer. Math. Soc., 347, 1995, pp. 2179-2189; avec l'erratum publié dans Trans. Amer. Math. Soc., 348, 1996, pp. 4687-4690. MR1285969 (95i:22025)
4. Aubert A.-M., Kutzko P., Morris L.: *Algèbres de Hecke des représentations de niveau zéro des groupes réductifs p-adiques. Applications*, version très préliminaire communiquée à l'auteur.
5. Bernstein I. N., Zelevinsky A. V.: *Induced Representations of Reductive p-adic groups.* I, Ann. Sci. École Norm. Sup , 10, 1977, pp. 147-185. MR0579172 (58 #28310)

6. Harris, M.; Taylor, R.: *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies, 151, Princeton Univ. Press, 2001. MR1876802 (2002m:11050)
7. Henniart, G.: *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL(n) *sur un corps p-adique*, Invent. Math., 139, 2000, pp. 439-455. MR1738446 (2001e:11052)
8. Lusztig G.: *Classification of Unipotent Representations of Simple p-adic Groups*, II, Represent. Theory, 6 (2002), 243–289 (electronic). MR1927955 (2004b:22018)
9. Moeglin C.: *Points de réductibilité pour les induites de cuspidales*, à paraître au Journal of Algebra 268, Number 1 (October 1, 2003 issue). MR2004481 (2005a:22012)
10. Moeglin C.: *Stabilité pour les représentations elliptiques de réduction unipotente: le cas des groupes unitaires*, prépublication Février 2003.
11. Moeglin C.: *Stabilité en niveau 0, pour les groupes orthogonaux impairs p-adiques*, Doc. Math. 9 (2004), 527–564. MR2117426 (2005k:22026)
12. Moeglin C.: *Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p-adiques: paramètres de Langlands et exhaustivité*, J. Eur. Math. Soc. 4 (2003), 143–200. MR1913095 (2003g:22021)
13. Moeglin C., Tadic M.: *Construction of discrete series for classical p-adic groups*, J. Amer. Math. Soc., 15, 2002, pp. 715-786. MR1896238 (2003g:22020)
14. Moeglin C., Vignéras M.-F., Waldspurger J.-L.: *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture Notes in Math., 1291, Springer-Verlag, 1987. MR1041060 (91f:11040)
15. Moeglin C., Waldspurger J.-L.: *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour* $SO(2n+1)$, Invent. Math., 152, 461-623, 2003. MR1988295 (2005i:22019)
16. Moeglin C., Waldspurger J.-L.: *Sur le transfert des traces tordues d'un groupe linéaire à un groupe classique p-adique*, prépublication, http://www.math.jussieu.fr/˜moeglin
17. Schneider M., Stuhler U.: *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, Publ. Math. IHES 85, 1997, pp. 97-191. MR1471867 (98m:22023)
18. Shahidi F.: *Local coefficients and normalization of intertwining operators for* $GL(n)$, Compositio Math, 48, 1983, pp. 271-295. MR0700741 (85a:22027)
19. Waldspurger J.-L.: *La formule de Plancherel pur les groupes p-adiques* (d'après Harish-Chandra), J. Inst. Math. Jussieu 2, (2003), 235–333. MR1989693 (2004d:22009)
20. Zelevinsky A. V.: *Induced Representations of Reductive p-adic groups,* II, Ann. Sci. École Norm. Sup., 13, 1980, pp. 165-210. MR0584084 (83g:22012)

Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS, 4 place Jussieu, F-75005 Paris
E-mail address: moeglin@math.jussieu.fr