JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 4, Number 1, January 1991

GROUPE DE HEISENBERG ET RÉALITÉ

P. DELIGNE

1. Soit H le groupe de Heisenberg complexe, extension de $\mathbb{C}^2$ par $\mathbb{C}^*$. Il admet des coordonnées (x, y, λ), la loi de groupe étant donnée par

$$(x, y, \lambda)(x', y', \lambda') = (x + x', y + y', \lambda\lambda' \exp(\pi i(xy' - x'y))). \tag{1.1}$$

L'involution

$$\tau\colon (x, y, \lambda) \mapsto (-x, -y, \lambda). \tag{1.2}$$

est un automorphisme de H.

Le système de coordonnées $x, y, \lambda\colon H \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$ met en évidence la section $\mathbb{C}^2 \times \{1\}$ de la projection de H sur $\mathbb{C}^2$. Sur cette section $\mathbb{C}^2 \times \{1\}$, $\tau(g) = g^{-1}$. Chaque droite $D \subset \mathbb{C}^2$ a pour relèvement par cette section un sous-groupe à un paramètre de H, qu'on notera encore D. Le commutateur $(u, v) = uvu^{-1}v^{-1}$ de deux éléments $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{C}^2$ est $\exp(2\pi i\langle u, v\rangle) \in \mathbb{C}^*$ avec

$$\langle u, v\rangle = u_1v_2 - u_2v_1. \tag{1.3}$$

Soit $H_{\mathbb{R}}$ la forme réelle: $x, y \in \mathbb{R}$, $|\lambda| = 1$. Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ agit sur H et $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit sur $H_{\mathbb{R}}$, identifié ensemblistement à $\mathbb{R}^2 \times U^1$.

On sait (théorème de Stone-von Neumann [2]) que $H_{\mathbb{R}}$ admet une unique représentation unitaire irréductible V pour laquelle $\lambda \in U^1$ agit par multiplication par λ. Dans le modèle de Schrödinger de V, on a $V = L^2(\mathbb{R})$ et l'action de $H_{\mathbb{R}}$ est:

$$\begin{aligned} (x, 0, 1)&\colon f(z) \mapsto f(z + x) \\ (0, y, 1)&\colon f(z) \mapsto e^{2\pi i yz} f(z). \end{aligned} \tag{1.4}$$

De l'unicité de V on déduit une action projective unitaire de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur V, compatible à l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur $H_{\mathbb{R}}$ (A. Weil [3], D. Shale [1]).

Pour l'action de $H_{\mathbb{R}}$ sur $V \simeq L^2(\mathbb{R})$, les vecteurs C^∞ i.e. les $v \in V$ tels que $h \mapsto hv$ soit C^∞ en $h \in H_{\mathbb{R}}$, forment l'espace de Schwartz $\mathscr{S}$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$. Les vecteurs holomorphes, i.e. les $v \in V$ tels que $h \mapsto hv$ se prolonge en une application holomorphe de H dans V,

Received by the editors August 3, 1990.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 22E45.

sont les fonctions L^2 sur $\mathbb{R}$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que, dans toute bande horizontale $|\operatorname{Im} z| < A_1$ on ait pour tout $A_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(z)| \leq 0(\exp(-A_2|z|)).$$

Le groupe complexe H agit sur l'espace V^{hol} des vecteurs holomorphes par les formules (1.4).

On ne dispose pas pour l'action holomorphe de H sur V^{hol} de la même unicité que pour l'action unitaire de $H_{\mathbb{R}}$ sur V. Sinon, l'action projective de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur V se prolongerait en une action projective de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sur V^{hol}, cette action se relèverait en une vraie action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, car $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ est simplement connexe, et l'action projective de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ se relèverait en une vraie action. Ce n'est pas le cas: seul le revêtement double de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ agit.

Notre but est d'expliciter ce qui se passe.

2. Soit $S = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'espace des droites de $\mathbb{C}^2$. Pour $D \in S$, relevé dans H comme au $n^0 1$, soit W_D l'espace des fonctions holomorphes sur H vérifiant

$$\varphi(\lambda d h) = \lambda \varphi(h)$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $d \in D$, muni de l'action de $H : g : \varphi(h) \mapsto \varphi(hg)$. Pour $E \neq D$, la restriction à E est une bijection

$$r_E : W_D \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(E), \tag{2.1}$$

$\mathscr{O}(E)$ étant l'espace des fonctions holomorphes sur E.

Si R est une représentation holomorphe de H, sur laquelle chaque $\lambda \in \mathbb{C}^*$ agit par λ, et ω une forme linéaire D-invariante sur R,

$$w \mapsto \omega(hw) \tag{2.2}$$

est un morphisme de R dans W_D.

3. **Exemple.** Soient comme aux $n^0 1, 2$ V la représentation unitaire irréductible de $H_{\mathbb{R}}$, $\mathscr{S} \subset V$ l'espace de ses vecteurs C^∞ et soit $\mathscr{S}' \supset V$ le dual de l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation duale (dans le modèle de Schrödinger: l'espace des distributions tempérées).

Soit $D_t \in S$ la droite engendrée par $(-t, 1)$. Si $\operatorname{Im} t > 0$, la forme linéaire, écrite dans le modèle de Schrödinger,

$$\omega_t : f \mapsto \frac{1}{\sqrt{t/i}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-\pi i x^2/t) dx$$

est définie sur V, et même sur $\mathscr{S}'$. La forme ω_t est un vecteur holomorphe du dual de V, fixe par D_t. En terme du générateur infinitésimal $-t\partial_x + 2\pi i x$ de D_t, l'invariance s'écrit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} &[(-t\partial_x + 2\pi i x) f(x)] \cdot \exp(-\pi i x^2/t) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot (t\partial_x + 2\pi i x) \exp(-\pi i x^2/t) dx = 0.\end{aligned}$$

Par (2.2), ω_t définit

$$\Omega_t \colon V^{\text{hol}} \to W_{D_t}$$

qui se prolonge à V et même à $\mathscr{S}'$. Soit E l'axe des x. L'application $r_E\Omega_t \colon V \to \mathscr{O}(E)$ envoie $f \in V$ sur

$$f(x\,,\,t) = r_E\Omega_t(f) \qquad (\operatorname{Im} t > 0)$$

solution de l'équation de la chaleur

$$\left(\partial_t - \frac{1}{4\pi i}\partial_x^2\right)\; f\,(x\,,\,t) = 0.$$

Pour t réel, la forme ω_t reste définie sur $\mathscr{S} \subset V$. Pour $t = 0$, c'est $f \mapsto f(0)$. Pour $t = \infty$, c'est $\int f(x)dx$. L'homomorphime Ω_t reste défini sur V^{hol}. Pour $t = 0$, $r_E\Omega_0$ est, dans le modèle de Schrödinger, l'identité.

Supposons $\operatorname{Im}(t) > 0$. Soit $\bar{D}_t$ la complexe conjuguée de D_t. Dans la droite affine $S - \{\bar{D}_t\}$, le "demi-plan" $\{D_u | \operatorname{Im} u > 0\}$ est un disque de centre D_t. L'application $r_{\bar{D}_t} \circ \Omega_t \colon V \to W_{D_t} \to \mathscr{O}(\bar{D}_t)$ fournit le modèle holomorphe de V : l'action de H est donnée par

$$\begin{aligned} d \in \bar{D}_t &\colon\ f(x) \mapsto f(x+d) \\ e \in D_t &\colon\ f(x) \mapsto \exp(-2\pi i\langle e\,,\,x\rangle)f(x)\,, \end{aligned}$$

la structure hilbertienne où $\langle f\,,\,f\rangle$ est l'intégrale de

$$f(d)f(d)^{-}\exp(2\pi i\langle d\,,\,\bar{d}\rangle)$$

est invariante par $H_{\mathbb{R}}$ et $r_{\bar{D}_t} \circ \Omega_t$ identifie V à l'espace des f de norme finie. Pour $d = (-\bar{t}z\,,\,z)$, le facteur $\exp(2\pi i\langle d\,,\,\bar{d}\rangle) =$ commutateur de d et $\bar{d}$ est

$$\exp(2\pi i\langle d\,,\,\bar{d}\rangle) = \exp(2\pi i(t-\bar{t})|z|^2)\,.$$

4. Fixons E. Les isomorphimes r_E (2.1) permettent de considérer les W_D $(D \neq E)$ comme formant une famille de représentations de H opérant dans l'espace fixe $\mathscr{O}(E)$, l'action de H dépendant holomorphiquement de D. Explicitons la dépendance en E de r_E. Prenons des coordonnées comme au $n^0 1$ où E soit l'axe des x. Soient E' engendré par $(1\,,\,u)$, D engendré par $(-t\,,\,1)$. On prend x comme coordonnée sur E et E'. On a

$$(x'\,,\,ux'\,,\,1) = (-tux'\,,\,ux'\,,\,1)(x\,,\,0\,,\,1)(0\,,\,0\,,\,\lambda)$$

pour $(1+tu)x' = x$ et $\lambda = \exp(\pi iuxx')$, de sorte que $r_{E'}r_E^{-1}$ envoie $f_E \in \mathscr{O}(E)$ sur $f_{E'} \in \mathscr{O}(E')$ avec $f_{E'}(x') = \lambda f_E(x)$:

$$f_{E'}\left(\frac{x}{1+tu}\right) = \exp\left(\frac{\pi iu}{1+tu}\,x^2\right)f_E(x)\,. \tag{4.1}$$

Cette formule est holomorphe en t : les W_D forment un fibré holomorphe $\mathscr{W}$ (de dimension infinie) sur S, sur lequel H agit.

Pour comprendre (4.1), on peut noter que le point de E de coordonnée x a même image dans $\mathbb{C}^2/D$ que le point de E' de coordonnée $x/1+tu$.

De (4.1) on déduit que la condition de croissance suivante sur $v \in W_D$ est indépendante des choix de $E \neq D$ et de la coordonnée z sur E

$$\text{(4.2)} \qquad \text{pour } f = r_E(v)\,,\ \exists A \quad |f(z)| \leq 0(\exp(A|z|^2).$$

Soit $W_D^0 \subset W_D$ défini par cette condition. Les W_D^0 forment un sous-fibré holomorphe $\mathscr{W}^0$ en représentations holomorphes de H du fibré $\mathscr{W}$.

5. **Proposition.** *Soit $T > 0$ et considérons les conditions suivantes sur une fonction entière f :*

$(\mathrm{i})_T$ *Il existe une fonction holomorphe $g(z\,,t)$ $(z \in \mathbb{C}\,, |t| < T)$ vérifiant l'équation de la chaleur $(\partial_t - \partial_z^2)g = 0$, avec la condition initiale $g(z\,,0) = f(z)$;*

$(\mathrm{ii})_T$ $|f(z)| \leq 0(\exp(|z|^2/4T))$;

$(\mathrm{iii})_T$ $\int f(z)f(\bar{z})\exp(-|z|^2/2T)|dz \wedge d\bar{z}| < \infty$.

Alors, si $T < T_1$, chacune de $(\mathrm{i})_{T_1}$, $(\mathrm{ii})_{T_1}$, $(\mathrm{iii})_{T_1}$ *implique chacune de* $(\mathrm{i})_T$, $(\mathrm{ii})_T$, $(\mathrm{iii})_T$.

Preuve. $(\mathrm{i})_{T_1} \Rightarrow (\mathrm{ii})_T$. L'équation de la chaleur reste vérifiée par les dérivées de g et on a donc

$$\partial_z^{2n} g = \partial_t^n\ g\,,$$
$$\partial_z^{2n+1}\ g = \partial_t^n(\partial_z\ g).$$

Puisque $g(0\,,t)$ est holomorphe pour $|t| < T_1$, si $T < T_2 < T_1$, on a en $(0\,,0)$

$$|\partial_t^n g/n!| \leq 0(1/T_2^n)\,, \ \text{ d'où}$$
$$|\partial_z^{2n} g| \leq 0(n!/T_2^n)$$

et une estimation analogue pour $\partial_z^{2n+1} g$. La série de Taylor de f donne alors

$$|f(z)| \leq 0\left(\sum \frac{n!}{(2n)!}\ \frac{1}{T_2^n}|z|^{2n}\right).$$

On a

$$\frac{1}{2n+1}\ 2^{2n} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}\ \leq 2^{2n}$$

d'où

$$|f(z)| \leq 0\left(\sum 2^{-2n}\frac{1}{T^n}\ \frac{|z|^{2n}}{n!}\right)$$

et cette somme est $\exp(|z|^2/4T)$.

$(\mathrm{ii})_{T_1} \Rightarrow (\mathrm{i})_T$. Il suffit de prendre g donné par le noyau de l'équation de la chaleur:

$$g(z\,,t) = \int_{\sqrt{t}\mathbb{R}} f(z+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp(-x^2/4t)\ dx.$$

Changer $\sqrt{t}$ en $-\sqrt{t}$ change l'orientation du cycle $\sqrt{t}\mathbb{R}$ et le signe de l'intégrand, de sorte que l'intégrale ne change pas. La condition (ii) assure la convergence pour $|t| < T$.

La relation entre (ii) et (iii) est claire: $(\mathrm{ii})_{T_1} \Rightarrow (\mathrm{iii})_T$ et que $(\mathrm{iii})_{T_1} \Rightarrow (\mathrm{ii})_T$ se vérifie en écrivant $f(z)$ comme moyenne de ses valeurs sur un disque de centre z et de rayon $1/|z|$, et en évaluant cette moyenne par Cauchy-Schwartz.

6. En hommage au théorème de Stone-von Neumann, le fibré $\mathscr{W}$ sur S est, projectivement, muni d'une connexion holomorphe pour laquelle l'action de H est horizontale.

Précisons: "projectivement." Sur la droite projective S, on dispose du faisceau inversible ample $\mathscr{O}(1)$. Soit $\mathscr{O}(-1)$ son dual. Une racine carrée $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$ de $\mathscr{O}(-1)$ est un faisceau inversible L muni d'un isomorphisme $L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(-1)$. Localement, une telle racine carrée existe et, localement, deux racines carrées sont isomorphes, mais l'isomorphisme n'est pas unique: ambiguïté ± 1. Cette ambiguïté obstrue l'existence globale de $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$. Ce n'est pas sur $\mathscr{W}$, mais sur $\mathscr{W}(-\frac{1}{2}) := \mathscr{W} \otimes \mathscr{O}(-\frac{1}{2})$ qu'on a une connexion:

$$\nabla : \mathscr{W}(-\tfrac{1}{2}) \to \mathscr{W}(-\tfrac{1}{2}) \otimes \Omega^1. \tag{6.1}$$

Noter que si $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})'$ et $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})''$ sont deux racines carrées de $\mathscr{O}(-1)$, et ∇ une connexion sur $\mathscr{W} \otimes \mathscr{O}(-\frac{1}{2})'$, son transporté sur $\mathscr{W} \otimes \mathscr{O}(-\frac{1}{2})''$ par $\alpha: \mathscr{O}(-\frac{1}{2})' \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(-\frac{1}{2})''$ (un isomorphisme de racines carrées de $\mathscr{O}(-1)$) ne dépend pas du choix de α, qu'on ne peut changer localement que par une constante ± 1. La notion de "connexion sur $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$" est donc bien définie, indépendamment de l'existence globale ou du choix de $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$.

Soit $D \in S$ et t un vecteur tangent en D. Pour s une section locale de $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$, il s'agit de définir $\nabla_t s$ dans la fibre de $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$ en D. On procédera comme suit: après avoir fait un choix auxiliaire u, on définira $\nabla_u s$ pour s une section locale de $\mathscr{W}$, ou de $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$. Cette dérivation ∇_u dépend de u, avec une dépendance en u de la forme

$$\nabla_{u'}(s) = \nabla_u(s) + as(D),$$

a prenant des valeurs opposées pour $\mathscr{W}$ et pour $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$: pour $s = s_1 s_2$, s_1 section locale de $\mathscr{W}$ et s_2 de $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$,

$$\nabla_t(s) := \nabla_u(s_1)s_2(D) + s_1(D)\nabla_u(s_2)$$

est indépendant du choix de u.

Soit $D \in S : D$ est une droite de $\mathbb{C}^2$. Un vecteur tangent t en $D \in S$ s'identifie à une application linéaire $t : D \to \mathbb{C}^2/D$, i.e. à un élément de $(\mathbb{C}^2/D)^{\otimes 2}$: à $u' \otimes v' \in (\mathbb{C}^2/D)^{\otimes 2}$ attacher $t(d) = \langle u, d\rangle v'$ pour u un quelconque représentant de u'. Notre donnée auxiliaire sera celle de $\tilde{t}: D \to \mathbb{C}^2$ relevant t, i.e. d'un relèvement de t à $\mathbb{C}^2/D \otimes \mathbb{C}^2$. Nous l'écrirons $\tilde{t} = u' \otimes u$, avec $u \in \mathbb{C}^2$ d'image u' dans $\mathbb{C}^2/D$.

L'espace tangent à l'origine de H est $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$. Pour z dans cet espace tangent, soit δ_z le champ de vecteurs invariant à droite correspondant. On a

$$[\delta_x, \delta_y] = -\delta_{[x,y]},$$

où figure à droite le crochet dans l'algèbre de Lie de H. Pour $x, y \in \mathbb{C}^2$, calculant $[x, y]$ comme un commutateur infinitésimal, on en déduit que

$$[\delta_x, \delta_y] = -2\pi i\langle x, y\rangle \delta_{(0,0,1)}. \tag{6.2}$$

Soit $\mathscr{U}_1$ le quotient de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite par la relation $\delta_{(0,0,1)} = 1$. Dans $\mathscr{U}_1$, on déduit de (6.2) que, pour $d \in D$,

$$\left[\frac{-\delta_u^2}{4\pi i}, \delta_d\right] = \frac{1}{4\pi i}\cdot 2\cdot 2\pi i\langle u, d\rangle\delta_u = \langle u, d\rangle\delta_u = \delta_{\tilde{t}(d)}. \tag{6.3}$$

Calculons au premier ordre autour de D. Pour $\varepsilon^2 = 0$, et $\varphi(g)$ dans W_D : $\delta_d\varphi = 0$, on a

$$\delta_{d+\varepsilon\tilde{t}(d)}\left[\varphi(g) + \varepsilon\frac{-\delta_u^2}{4\pi i}\,\varphi(g)\right] = \varepsilon\left[\delta_{\tilde{t}(d)}\varphi(g) + \delta_d\frac{-\delta_u^2}{4\pi i}\right]\varphi(g) = 0$$

car $\delta_d(-\delta_u^2/4\pi i)\varphi = -[-\delta_u^2/4\pi i, \delta_d]\varphi$: appliquer (6.3). Au premier ordre autour de D, la fonction de g et D' définie par $\varphi(g, D+\varepsilon t) = \varphi(g) + \varepsilon(-\delta_u^2/4\pi i)\varphi(g)$ est donc une section du fibré $\mathscr{W}$. Si $\varphi(g, D')$ est une section locale de $\mathscr{W}$, ceci permet de définir la dérivée $\nabla_u\varphi$ dans $\mathscr{W}_D$ par

$$\nabla_u\varphi = \delta_t\varphi(g, D') + (\delta_u^2/4\pi i)\varphi(g, D). \tag{6.5}$$

Calculons la dépendance de (6.5) en u. Si u est remplacé par $u+x$ $(x \in D)$, on a dans $\mathscr{U}_1$

$$\begin{aligned} \delta_{u+x}^2 &= (\delta_u + \delta_x)^2 = \delta_u^2 + 2\delta_u\delta_x + [\delta_x, \delta_u] \\ &= \delta_u^2 + 2\delta_u\delta_x + 2\pi i\langle u, x\rangle. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Pour $\varphi \in V_D$, on a $\delta_x\varphi = 0$ et (6.6) se simplifie en

$$\delta_{u+x}^2\varphi = \delta_u^2\varphi + 2\pi i\langle u, x\rangle\varphi, \tag{6.7}$$

d'où

$$1/4\pi i\;\delta_{u+x}^2\varphi = 1/4\pi i\;\delta_u^2\varphi + \tfrac{1}{2}\langle u, x\rangle\varphi. \tag{6.8}$$

Le choix de u permet aussi de définir la dérivée ∇_u par rapport à t d'une section locale de $\mathscr{O}(1)$. Une section de $\mathscr{O}(1)$ sur $U \subset S$ est une fonction homogène de degré 1 sur l'image inverse de U dans $\mathbb{C}^2$, et on dérive par rapport à $\langle u, d\rangle u$ pour obtenir une fonction homogène de degré 1 sur D. Quand on change u en $u + x$,

$$\begin{aligned} \nabla_{u+x}(s) &= \langle u + x, d\rangle\delta_{u+x}s \\ &= \nabla_u(s) + \langle u, x\rangle s. \end{aligned}$$

Cette dérivation en induit une sur $\mathscr{O}(-1/2)$, avec

$$\nabla_u(s^{-1/2}) = -1/2\nabla_u(s) \cdot s^{-3/2}$$

et pour dépendance en u, s étant cette fois une section locale de $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$

$$\nabla_{u+x}(s) = \nabla_u(s) - \tfrac{1}{2}\langle u, x\rangle s. \tag{6.9}$$

Les dépendances en u de (6.8) et (6.9) se neutralisent pour fournir une dérivation ∇_t pour $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$.

La connexion ∇ étant définie en terme de champs de vecteurs invariants à droite sur H, elle commute à l'action de H.

7. **Explicitons la connexion du $n^\circ 6$ en coordonnées.** Choisissons des coordonnées comme au $n^\circ 1$ et soit E l'axe des x. Sur S, $\mathscr{O}(1)$ admet une section s ayant un zéro simple en E. Elle est unique à un facteur près et trivialise $\mathscr{O}(1)$ sur $S-E$. Il existe donc une racine carrée $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$ sur $S-E$, trivialisée par une racine carrée $s^{-1/2}$ de s^{-1}. Par une telle trivialisation, la connexion cherchée se transporte en une connexion sur le fibré $\mathscr{W}$. Nous allons la calculer.

Soit D_t la droite engendrée par $(-t, 1)$. Par r_E (1.2), une section locale de $\mathscr{W}$ s'identifie à une fonction $f(z, t)$ holomorphe en z et t. Calculons sa dérivée par rapport à t. Dans le $n^\circ 6$, on peut prendre pour

$$\tilde{t}: D_t \to \mathbb{C}^2: (-tz, z) \mapsto (-1, 0)z; \text{ this is } d \mapsto -\langle(1, 0), d\rangle \cdot (1, 0).$$

La dérivation correspondante de $\mathscr{O}(1)$ annule s, de sorte qu'on a simplement

$$\nabla_t f = (\partial_t - \partial_z^2/4\pi i)f \tag{7.1}$$

et les sections locales horizontales sont les solutions de l'équation de la chaleur

$$(\partial_t - \partial_z^2/4\pi i)f = 0. \tag{7.2}$$

Du $n^\circ 5$, on déduit que par $s \in W_D^0(-\frac{1}{2})$ il passe une section locale horizontale de $\mathscr{W}(-\frac{1}{2})$. C'est automatiquement une section de $\mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})$. Elle existe dans un voisinage de D d'autant plus grand que s est à croissance plus lente. Noter qu'en dimension infinie une connexion ne définit pas nécessairement une trivialisation locale, même si par chaque point passe une section horizontale locale.

La connexion ∇ sur $\mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})$ en définit une sur le fibré en espaces projectifs correspondant $\mathbb{P}(\mathscr{W}^0) = \mathbb{P}(\mathscr{W}^0(-\frac{1}{2}))$. Les sections locales horizontales sont les images des sections horizontales non nulles de $\mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})$. Bien que la sphère S soit simplement connexe, on a:

8. **Surprise.** *Le fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathscr{W}^0)$ sur S n'a aucune section horizontale globale.*

L'argument du $n^0 1$, permettrait de le prévoir: l'appliquer à la représentation projective de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ donnée par l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ sur l'espace projectif des sections horizontales globales de $\mathbb{P}(\mathscr{W}^0)$.

$1^{\text{ère}}$ *preuve.* Divisons S en deux hémisphères S_1 et S_2 et choisissons $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})_i$ sur S_i. Sur $S_1 \cap S_2$, on dispose localement de $\alpha: \mathscr{O}(-\frac{1}{2})_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\frac{1}{2})_2$, défini au signe près, mais α ne peut être défini globalement que sur le revêtement double du cercle $S_1 \cap S_2$: monodromie -1. S'il existait des sections projectives globales horizontales de $\mathbb{P}(V^\circ)$, il existerait des sections horizontales f_1, f_2 de $\mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})$ sur S_1 et S_2 qui, sur $S_1 \cap S_2$ coïncideraient au signe près. Sur $S_1 \cap S_2$, ceci permettrait de normaliser $\alpha: \mathscr{O}(\frac{1}{2})_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(-\frac{1}{2})_2$ par $\alpha(f_1) = f_2$, contredisant l'inexistence de α sur $S_1 \cap S_2$.

$2^{\text{ème}}$ *preuve.* Choisissons des coordonnées comme au $n^\circ 1$. Soit E l'axe des x et D celui des y. Comme en $n^\circ 2$, identifions W_D à l'espace des fonctions entières $f(z)$. Soit $f \neq 0$ dans W_D. Par la proposition, pour qu'il existe sur $S - E$ une section horizontale de $P(\mathscr{W}^0)$ passant par f, il faut et il suffit que f vérife la condition de croissance

$$\forall \varepsilon > 0 \ |f(z)| \leq 0(\exp(\varepsilon |z|^2)). \tag{8.1}$$

Si E' est une autre droite, d'après (4.1), l'existence d'une section horizontale sur $S - E'$ passant par f se traduit par une condition de croissance

$$\forall \varepsilon > 0 \ |f(z) \exp(az^2)| \leq 0(\exp(\varepsilon |z|^2) \tag{8.2}$$

avec $a \neq 0$ convenable.

Posons $g(z) = f(z) \exp(az^2/2)$. Par (8.1) et (8.2), $|g(z)|$ est dominé par un multiple tant de $|\exp(\varepsilon |z|^2 + az^2/2)|$ que de $|\exp(\varepsilon |z|^2 - az^2/2)|$ de sorte que dans toutes les directions, sauf celles pour lesquelles az^2 est purement imaginaire, g est à décroissance exponentielle quadratique. Dans toutes les directions, on a uniformément une croissance au plus exponentielle quadratique. Par Phragmen-Lindelöf, g est à décroissance exponentielle quadratique dans toutes les directions, donc est nulle, et $f = 0$.

9. Dans les coordonnées du $n^\circ 1$, soit D_t la droite engendrée par $(-t, 1)$. Soit $d = (-tz, z)$. On a pour le commutateur de d et $\bar{d}$

$$(d, \bar{d}) = \exp(-2\pi i(t - \bar{t})|z|^2) \in \mathbb{C}^* \quad :$$

le commutateur est réel positif et

$$(d, \bar{d}) > 1 \iff \operatorname{Im}(t) > 0.$$

Les droites D avec pour d engendrant D $(d, \bar{d}) > 1$ forment donc un disque dans S, dit attaché à la structure réelle H_R.

Les structures réelles $L \subset \mathbb{C}^2$ pour lesquelles $\langle \ , \ \rangle$ est réel sur L forment un espace homogène sous $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, avec $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le stabilisateur de $\mathbb{R}^2$. Chacune définit une structure réelle $H_L := L \,.\, U^1$ sur H, donc une conjugaison complexe σ_L de points fixes LU^1.

Les disques dans S forment de même un espace homogène sous $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, le stabilisateur de celui associé à $H_{\mathbb{R}}$ étant $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. La correspondance

$$L \mapsto X(L) := \{D | (d, \sigma_L(d)) > 1 \text{ pour } d \text{ un générateur de } D\}$$

est donc une bijection de l'espace des structures réelles considérées avec l'espace des disques de S.

Le passage d'un disque au disque complémentaire se traduit sur les structures réelles en $L \mapsto iL$.

10. **Les calculs du $n^\circ 3$ admettent l'interprétation suivante.** Soit X un disque (ouvert) de S, correspond à une structure réelle L, d'où des formes réelles H_L de H et $\mathrm{SL}(L)$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Alors $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})$ admet une structure pré-hilbertienne H_L-invariante, le complété $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})\widehat{}$ étant la représentation unitaire irréductible de H_L. On a

$$\Gamma\left(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\tfrac{1}{2})^{\nabla=0}\right) \subset \Gamma\left(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\tfrac{1}{2})^{\nabla=0}\right)\widehat{} \subset \Gamma\left(X, \mathscr{W}^0(-\tfrac{1}{2})^{\nabla=0}\right).$$

Le revêtement double $\mathrm{SL}(L)^\sim$ de $\mathrm{SL}(L)$ agit sur $\mathscr{O}(-\frac{1}{2}) \mid X$, de façon compatible à son action sur $\mathscr{O}(-1)$, d'où une action de $\mathrm{SL}(L)^\sim$ sur $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})\widehat{}$. C'est celle qui normalise l'action de H_L, et induit l'action naturelle de $\mathrm{SL}(L)$ sur H_W.

La sous-représentation $\Gamma(\bar{X}, \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})^{\nabla=0})$ peut s'interpréter comme l'espace des vecteurs analytiques réels pour l'action de $\mathrm{SL}(L)^\sim$.

Cette description montre que la représentation projective de $\mathrm{SL}(L)$ se prolonge au monoïde des $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ tels que $gX \supset X$.

11. Tout ce qui précède se généralise de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ à $Sp(2n, \mathbb{C})$: remplacer $\mathbb{C}^2$ par $\mathbb{C}^{2n}$, muni d'une forme alternée non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ réelle sur $\mathbb{R}^{2n}$, H par $\mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^*$ avec la loi de groupe

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (x + y, \lambda\mu \exp(\pi i \langle x, y\rangle)),$$

S par l'espace des sous-espaces lagrangiens (= isotropes maximals) D de $\mathbb{C}^{2n}$. Le disque attaché à une structure réelle devient l'espace de Siegel des D avec $|(d, \bar{d})| > 1$ pour $d \neq 0$ dans D. Le faisceau inversible $\mathscr{O}(-\frac{1}{2})$ est à remplacer par $\det(D)^{1/2}$.

12. *Remarque.* A côté de représentations de H où $\mathbb{C}^*$ agit par multiplication par λ, considérons de même des représentations où l'action est par λ^{-1}. On définit un fibré holomorphe $\mathscr{W}_-^0$ de telles représentations sur S, comme au $n^\circ 2$ et sur $\mathscr{W}_-^0(-\frac{1}{2})$, on dispose à nouveau d'une connexion, donnée par une équation de la chaleur.

Sur un ouvert connexe et simplement connexe U de S, considérons $W = \mathscr{W}^0(-\frac{1}{2})$, sa connexion et l'action de H. Dans $\Gamma(U, W)^{\nabla=0}$, on dispose pour chaque $x \in U$ d'une forme linéaire fixe par la droite correspondante, définie à un facteur près : $f \mapsto f(e)$ pour $f \in \mathscr{W}_x^\circ$. Pour chaque $x \notin U$, il existe un vecteur $v(x)$ fixe par D_x (dans le modèle de Schrödinger et pour x correspondant à $E =$ axe de x, c'est la constante 1). Il est unique à un facteur près.

Fixons la structure réelle $H_{\mathbb{R}}$, d'où une structure réelle $S_{\mathbb{R}} \subset S$ (un cercle) et une décomposition de $S - S_R$ en deux disques U_1, U_2. Alors.

(a) Le complexe conjugué de $\Gamma(\bar{U}_1, W)^{\nabla=0}$ est $\Gamma(\bar{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$.

(b) La forme hermitienne sur $\Gamma(\bar{U}_1, W)^{\nabla=0}$, invariante par $H_{\mathbb{R}}$, se réinterprète comme un accouplement bilinéaire entre $\Gamma(\bar{U}_1, W)^{\nabla=0}$ et $\Gamma(\bar{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$, invariant par H.

Question. Soit C une courbe de Jordan dans S, séparent $S - C$ en deux ouverts U_1 et U_2. Existe-t-il une unique forme bilinéaire séparante H-invariante accouplant $\Gamma(\bar{U}_1, W)^{\nabla=0}$ et $\Gamma(\bar{U}_2, W_-)^{\nabla=0}$, induite par une dualité parfaite entre $\Gamma(\bar{U}_1, W)^{\nabla=0}$ et $\Gamma(U_2, W_-)^{\nabla=0}$?

Bibliographie

1. D. Shale, *Linear symmetries of free Boson fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 149–167.
2. J. von Neumann, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen operatoren*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **104** (1931), 570–578.
3. A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. **111** (1964), 143–211.

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540