PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 127, Number 7, Pages 2117–2122
S 0002-9939(99)04725-5
Article electronically published on March 3, 1999

LOCALISATION SPECTRALE ET SOUS-ESPACES HYPERINVARIANTS

A. DAOUI ET O. EL-FALLAH

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

Abstract. To get hyperinvariant subspaces, we establish a relation between the growth of the resolvent and the geometry of the spectrum. Our approach is based on a resolution of the generalized Dirichlet problem.

1. Introduction

Dans ce papier, E désignera un espace de Banach complexe et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur E. Pour tout opérateur T de $\mathcal{L}(E)$, on notera T^* son adjoint agissant sur E^*, l'espace dual de E. Un sous-espace fermé non trivial M de E est invariant pour T si $Tx \in M$ pour tout $x \in M$. Le sous-espace M est dit hyperinvariant (s.e.h.i.n.t) pour T s'il est invariant pour tout opérateur qui commute avec T. On notera le spectre de T par $\sigma(T)$.

Soit φ une fonction de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On dira que φ vérifie la propriété (R) si φ est de classe C^2, strictement croissante , $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ et $\frac{1}{\varphi}$ est convexe. Posons $m_\varphi(y) = \int_y^a \frac{dt}{t\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$, où a est un réel strictement positif. On notera:

$$D(\varphi) = \{x + iy/x \in \mathbb{R}, \quad |y| < \varphi(|x|)\},$$

$$D^+(\varphi) = D(\varphi) \cap \mathbb{C}^+,$$

$$D^-(\varphi) = D(\varphi) \cap \mathbb{C}^-$$

(où $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) > 0\}$ et $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) < 0\}$).

Dans ce travail nous démontrons le résultat suivant:

Théorème. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et soit φ une fonction vérifiant la propriété (R). Supposons que $\sigma(T) \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$, $\sigma(T) \cap \mathbb{C}^- \neq \emptyset$ et $\sigma(T) \subset D(\varphi)$. Si*

$$log\|(z - T)^{-1}\| = O(exp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z, \sigma(T)))))$$

$(dist(z, \sigma(T)) \longrightarrow 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus D(\varphi))$ pour tout $c_1, c_2 > 0$, alors T admet des s.e.h.i.n.t.

Dans le cas particulier où $\varphi(x) = x^{q+1}$ $(q > 0)$, on retrouve un résultat dû à J.G. Stampfli [11].

Nous donnons en fait, une version locale du résultat cité (voir théorème 3.3).

Received by the editors November 26, 1996 and, in revised form, October 17, 1997.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A10.

2. PRÉLIMINAIRES

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et soit $u \in E$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans le résolvant local de T en u (on notera $\lambda \in \rho(u,T)$) s'il existe un voisinage V de λ et une application F de V dans E, analytique, tels que $(\mu - T)F(\mu) = u$ pour tout $\mu \in V$. Le spectre local de T en u (noté $\sigma(u,T)$) est le complémentaire de $\rho(u,T)$ dans $\mathbb{C}$. On dit que T admet la propriété de l'extension unique (en abrégé S.V.E.P.) si l 'equation $(\mu - T)F(\mu) = 0$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ admet une et une seule solution analytique. Dans ce cas l'application $\lambda \longrightarrow (\lambda - T)^{-1}u$ admet une extention analytique maximale unique notée $R_u(\lambda, T)$ définie sur $\rho(u,T)$. Pour plus de précisions voir [4].

Soit D un ouvert borné de $\mathbb{C}$, la frontière de D sera notée ∂D. Nous désignerons par $A(D)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\bar{D}$ et holomorphes sur D. Le lemme suivant est une version locale d'un résultat bien connu, voir par exemple [11] ou [10].

Lemme 2.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la S.V.E.P. et soit $u \in E$, $u \neq 0$. S'il existe un ouvert borné D de $\mathbb{C}$ et une fonction $f \in A(D)$, non nulle, tels que*

$$(i)\ \sigma(u,T) \cap D \neq \emptyset,$$

$$(ii)\ \int_{\partial D} \|f(z)R_u(z,T)\||dz| \ < +\infty$$

alors il existe $v \in E$, $v \neq 0$ tel que: $\sigma(v,T) \subset \bar{D}$.

Preuve. D'après (i), soit $\lambda_0 \in \sigma(u,T) \cap D$. Quitte à considérer la fonction $\frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^n}$ si f est nulle au point λ_0 avec l'ordre de multiplicité n, on peut supposer que $f(\lambda_0) \neq 0$.

Considérons $v = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z) R_u(z,T) dz$. (L'intégrale étant prise au sens de Bochner [6].) Nous avons alors:

$$\begin{aligned}
&(\lambda - T)\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\lambda} R_u(z,T)dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\lambda}(\lambda - T) R_u(z,T)dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\lambda}((\lambda - z) + (z-T)) R_u(z,T)dz \\
&= (\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\lambda} dz)u - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} f(z) R_u(z,T)dz
\end{aligned}$$

$$= (\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\lambda} dz)u - v \qquad \text{pour tout } \lambda \in \partial D. \tag{1}$$

Donc si $\lambda \in D$ alors:

$$(\lambda - T)\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\lambda} R_u(z,T)dz = f(\lambda)u - v.$$

Donc $v \neq 0$ car sinon nous aurons: $(\lambda - T)F(\lambda) = f(\lambda)u$ où

$$F(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-\lambda)} R_u(z,T)dz$$

qui est analytique au voisinage de λ_0, ce qui est en contradiction avec le fait que $\lambda_0 \in \sigma(u,T)$. D'aprés (1), pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$, nous avons: $(\lambda - T)F(\lambda) = -v$; donc $\sigma(v,T) \subset \bar{D}$.

Remarque 2.2. Lorsque ∂D est assez régulière, on peut remplacer dans le lemme 2.1 $A(D)$ par $H^\infty(D)$ et on peut démontrer aussi que $\sigma(v,T) \subset \bar{D} \cap \sigma(u,T)$.

Nous aurons besoin dans la suite du résultat, bien connu, suivant:

Proposition 2.3. *Soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière. Si $|F(z)| \leq \frac{c|z|}{|Re(z)|}$, $Re(z) \neq 0$, alors F est constante.*

Preuve. Soit $a > 0$ et soit $R_a = \{x + iy/|x| < a \quad \text{et} \quad |y| < a\}$. Considérons $F_a(z) = (z - ia)(z + ia)F(z)$. Pour $z \in \partial R_a$, $|F_a(z)| \leq 5\sqrt{2}ca^2$. D'après le principe du maximum, pour $z \in \mathbb{C}$ et pour a assez grand, $|F_a(z)| \leq 5\sqrt{2}ca^2$; donc $|F(z)| \leq \frac{5\sqrt{2}ca^2}{|z-ia||z+ia|}$. Quand a tend vers ∞ , on obtient $|F(z)| \leq 5\sqrt{2}c$; donc F est constante.

3. Existence de s.e.h.i.n.t.

Le lemme suivant est une variante d'un lemme dû à Beurling ([3], Lemme 2).

Lemme 3.1. *Soit φ une fonction vérifiant la propriété (R). Alors il existe une fonction h harmonique sur $D_b^+(\varphi)$, continue sur $\overline{D_b^+(\varphi)} \setminus \{0\}$, strictement positive telle que: $h(x + i\varphi(x)) = exp(\frac{1}{l}m_\varphi(\varphi(x)))$, $0 < x < b$ où $l = Sup_{0<x<b}\varphi'(x) + 1$ et $D_b^+(\varphi) = D(\varphi) \cap \{x + iy \in \mathbb{C}^+ \;\; / \;\; x < b\}$.*

Preuve. Il suffit de trouver une fonction h_0 surharmonique satisfaisant les conditions du lemme. Soit $f(x) = exp(\frac{1}{l}\int_x^b \frac{dt}{\varphi(t)})$ et soit:

$$h_0(x + iy) = f(x)(l - q\frac{y^2}{\varphi^2(x)}) \text{ avec} \frac{1}{2}(1 + \frac{(l-1)^2}{l}) < q < l.$$

On a alors $\Delta h_0 = lf'' - 2q\frac{f}{\varphi^2} - qy^2(\frac{f}{\varphi^2})''$.

Comme $\frac{1}{\varphi}$ est convexe, il est clair que $(\frac{f}{\varphi^2})'' \geq 0$. Donc $\Delta h_0 \leq lf'' - 2q\frac{f}{\varphi^2}$; d'où $\Delta h_0 \leq \frac{f}{\varphi^2}(\varphi' - (2q - \frac{1}{l})) \leq \frac{f}{\varphi^2}(l - 1 - 2q + \frac{1}{l})$, pour $x \in]0, b]$. Donc h_0 est surharmonique sur $D_b^+(\varphi)$.

Or $h_0(x+i\varphi(x)) = (l-q)f(x)$ et $\int_x^b \frac{dt}{\varphi(t)} = m_\varphi(\varphi(x))+c$, où c est une constante, par conséquent $h_0(x + i\varphi(x)) = Cexp(\frac{1}{l}m_\varphi(\varphi(x)))$.

Théorème 3.2. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ possédant la S.V.E.P. et soit φ une fonction vérifiant la propriété (R). Supposons qu'il existe $u \in E$ tel que:*

$$\sigma(u,T) \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset, \sigma(u,T) \cap \mathbb{C}^+ \subset D^+(\varphi), et$$

$$log\|R_u(z,T)\| = O(exp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z, \sigma(T)))))$$

$(dist(z, \sigma(u,T)) \longrightarrow 0,\; z \in \mathbb{C} \setminus D^+(\varphi))$ pour tout $c_1, c_2 > 0$. Alors il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $\sigma(v,T) \subset \sigma(u,T) \cap \overline{\mathbb{C}^+}$.

Preuve. Soit $\psi(x) = 2\varphi(x)$, il est clair que ψ vérifie la propriété (R). Soit $b > 0$ tel que $\sigma(u,T) \cap \mathbb{C}^+ \subset D_b^+(\psi)$. D'aprés le lemme 3.1, il existe h harmonique sur $D_b^+(\psi)$ telle que:

$$h(x + i\psi(x)) = exp(\frac{1}{l}m_\psi(\psi(x))), 0 < x < b, \text{ où } l = Sup_{0<x<b}\psi'(x) + 1.$$

Soit k un conjugué harmonique de h et soit $f(z) = exp(-h(z) - ik(z))$ pour $z \in D_b^+(\varphi)$. Nous avons alors:

$$\begin{aligned} log\|f(z)R_u(z,T)\| &\leq -h(z) + Cexp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z,\sigma(T)))) \\ &\leq -exp(\frac{1}{l}m_\psi(\psi(x)) + Cexp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z,\sigma(T))), \end{aligned}$$

pour $z \in \partial D_b^+(\psi)\setminus\{0\}$. Or d'une part $m_\psi(\psi(x)) = \frac{1}{2}m_\varphi(\varphi(x)) + c$ et d'autre part il est facile de voir que $dist(z,\sigma(u,T)) \geq \alpha\varphi(x)$ $(z = x + i\psi(x))$ où $\alpha = Min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2l}\}$.

Donc pour $c_2 = \frac{1}{\alpha}$ l'inégalité précédente devient:

$$log\|f(z)R_u(z,T)\| \leq -c''exp(\frac{1}{2l}m_\varphi(\varphi(x))) + c'''exp(c_1 m_\varphi(\varphi(x)).$$

Pour $c_1 < \frac{1}{2l}$, le deuxième terme de l'inégalité tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0. Donc $\|f(z)R_u(z,T)\|$ est bornée sur $\partial D_b^+(\psi) \setminus \{0\}$. D'après le lemme 2.1, $v = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_b^+(\psi)} f(z)R_u(z,T)dz$ vérifie $\sigma(v,T) \subset \sigma(u,T) \cap \overline{\mathbb{C}^+}$.

Théorème 3.3. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que T et T^* ont la S.V.E.P. et soit φ une fonction vérifiant la propriété (R). Supposons qu'il existe $u \in E$ et $u' \in E^*$ tels que:*

$$\emptyset \neq \sigma(u,T) \cap \mathbb{C}^+ \subset D^+(\varphi), \quad \emptyset \neq \sigma(u',T^*) \cap \mathbb{C}^+ \subset D^-(\varphi).$$

Si pour tout $c_1, c_2 > 0$:

$$log\|R_u(z,T)\| = O(exp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z,\sigma(T)))))$$

$(dist(z,\sigma(u,T)) \longrightarrow 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus D^+(\varphi))$.

$$log\|R_{u'}(z,T^*)\| = O(exp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z,\sigma(T^*)))))$$

$(dist(z,\sigma(u',T^*)) \longrightarrow 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus D^-(\varphi))$.

Alors T admet des s.e.h.i.n.t.

Preuve. D'après le théorème précédent, nous avons: $\sigma(v,T) \subset \sigma(u,T) \cap \overline{\mathbb{C}^+}$ où $v = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_b^+(\psi)} f(z)R_u(z,T)dz$. De manière analogue nous associons à u' un élément $v' \in E^*$ tel que $\sigma(v',T^*) \subset \sigma(u',T^*) \cap \overline{\mathbb{C}^-}$. Soit $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $ST = TS$. Considérons la fonction $F(\lambda) = \langle(\lambda - T)^{-1}Sv, v'\rangle$, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Comme $F(\lambda) = \langle Sv, (\lambda - T)^{*-1}v'\rangle$, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ et T, T^* vérifient la S.V.E.P. alors F se prolonge analytiquement sur $\rho(v,T) \cup \rho(v',T^*) \supset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $G(z) = \frac{1}{z}F(\frac{1}{z})$ pour $z \neq 0$ et $G(0) = \langle Sv, v'\rangle$. Il est clair que G est une fonction entière vérifiant les conditions de la proposition 2.3 donc $G \equiv \langle Sv, v'\rangle$ et alors $F(z) = \frac{\langle Sv,v'\rangle}{z}$ pour tout $z \neq 0$. D'où $\langle T^n Sv, v'\rangle = 0$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent $span\{STv, ST = TS\}$ est un s.e.h.i.n.t.

Théorème 3.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et soit φ une fonction vérifiant la propriété (R). Supposons que $\sigma(T) \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$, $\sigma(T) \cap \mathbb{C}^- \neq \emptyset$ et $\sigma(T) \subset D(\varphi)$. Si*

$$log\|(z - T)^{-1}\| = O(exp(c_1 m_\varphi(c_2 dist(z,\sigma(T)))))$$

$(dist(z,\sigma(T)) \longrightarrow 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus D(\varphi))$, *pour tout $c_1, c_2 > 0$, alors T admet des s.e.h.i.n.t.*

Preuve. Il est bien évident que si T ne possède pas la S.V.E.P. alors T admet plusieurs valeurs propres, donc T admet des s.e.h.i.n.t. On peut supposer alors que T et T^* ont la S.V.E.P. Comme $\sigma(T) = \bigcup_{u\in E}\sigma(u,T)$ (voir par exemple [5]), alors il existe $u \in E$ tel que $\sigma(u,T) \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$. De même il existe $u' \in E^*$ tel que $\sigma(u', T^*) \cap \mathbb{C}^- \neq \emptyset$. Les autres conditions du théorème 3.3 sont trivialement satisfaites. Donc T admet des s.e.h.i.n.t.

Remarque 3.5. 1) Si $\varphi(x) = x^{q+1}$, $q > 0$; il est clair que φ vérifie la propriètè (R). Dans ce cas $m_\varphi(y) = \frac{1}{q} y^{-\frac{q}{q+1}} + cst$. On retrouve alors un résultat dû à J.G.Stampfli [11];

2) Si $\varphi(x) = e^{-x^{-q}}$, $q > 0$, φ vérifie bien la propriètè (R) et dans ce cas $m_\varphi(y)$ est de l'ordre de $\frac{1}{y}(\log(\frac{1}{y}))^{-\frac{q+1}{q}}$.

3) Nous remarquons que plus la courbe de φ est tangente à l'axe des abscisses plus la croissance de la résolvante permise est large; cependant m_φ reste toujours intégrable en 0 ce qui est tout à fait cohérent avec le théorème de Ljubic-Matsaev [9] (voir aussi [12]).

4) En utilisant les mêmes techniques, on peut donner une version locale du théorème de Ljubic-Matsaev (voir [2], [1], [8] pour des versions locales du théorème de Wermer).

4. Un cas particulier

Théorème 4.1. *Soient D_1 et D_2 deux disques ouverts bornés de $\mathbb{C}$ tels que $D_1 \subset \mathbb{C}^+$, $D_2 \subset \mathbb{C}^-$ et $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} \subset \{0\}$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que T et T^* ont la S.V.E.P. Supposons qu'il existe $u \in E$, $u' \in E^*$ tels que: $\sigma(u,T) \cap D_1 \neq \emptyset$, $\sigma(u', T^*) \cap D_2 \neq \emptyset$. Si*

$$\int_{\partial D_1} \log \|R_u(z,T)\| |dz| < +\infty,$$

$$\int_{\partial D_2} \log \|R_{u'}(z,T^*)\| |dz| < +\infty$$

alors T admet des s.e.h.i.n.t.

Preuve. Nous utilisons la même méthode que celle développée dans la preuve du théorème 3.3. Sans perdre de généralité, nous pouvons supposer que D_1 est le disque de centre 1 est de rayon 1. Soit $h(e^{it}) = \frac{1}{\|R_u(1+e^{it},T)\|}$. Alors $\int_0^{2\pi} \log h(e^{it}) dt < +\infty$; donc il existe une fonction $f \in H^\infty$, non nulle, telle que $|f(e^{it})| = h(e^{it})$ p.p. [7]. En particulier (ii) du lemme 2.1 est vérifiée, donc $v = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D_1} f(z-1) R_u(z,T) dz$ vérifie $\sigma(v,T) \subset \overline{D_1}$. De même il existe $v' \in E^*$ tel que $\sigma(v', T^*) \subset \overline{D_2}$. On termine la démonstration de la même manière que dans le théorème 3.3. □

Corollaire 4.2. *Soient D_1 et D_2 comme dans le théorème 4.1. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que: $\sigma(T) \cap D_1 \neq \emptyset$, $\sigma(T^*) \cap D_2 \neq \emptyset$. Si*

$$\int_{\partial Di} \log \|(z-T)^{-1}\| |dz| < +\infty$$

pour $i = 1, 2$, alors T admet des s.e.h.i.n.t.

Remarque 4.3. La technique utilisée tout au long de ce travail est basée sur une résolution du problème de Dirichlet généralisé. Comme ce problème est invariant par transformation conforme, le résultat de ce paragraphe peut être exploité dans le cas des domaines pour lesquels nous avons une transformation conforme (vers le disque unité) "explicite".

References

[1] A. Atzmon: On the existence of hyperinvariant subspaces. J.Operator Theory 11 (1984), 3-40. MR **85k:**47005

[2] B. Beauzamy: Sous espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach. Ac ta.Math,144 (1980), 65-82. MR **82d:**47009b

[3] A. Beurling: Analytic continuation across a linear boundary, Acta Mathematica 128 (1972),154-182. MR **52:**14368

[4] I. Colojoara and C.Foias "Theory of Generalized Spectral Operators", Gordon and breach, New York, 1968. MR **52:**15085

[5] N. Dunford and Schwartz: Linear Operators, Part 3, Wiley-Interscience. New-York 1963. MR **54:**1009

[6] E. Hille and R.S.Phillips: Functional analysis and semigroups, Amer.Math.Soc.Colloquium Publications 31, Providence, 1975. MR **54:**11077

[7] K. Hoffman: Banach Spaces of Analytic Functions. (Prentice-Hall, Englwood Cliffs, N.J,1962. MR **24:**A2844

[8] K. Kellay: Version locale et existence de sous espaces invariants. Glasgow. Math. J. (àparaitre)

[9] Ju.I. Ljubic and V.I.Matsaev: On Operator with a separable spectrum. Amer.Math.Soc.Transl. 47(1965), 89-129.

[10] H. Radjavi and P. Rosenthal: Invariant Subspaces. Springer Verlag-Berlin Heidelberg, New-York (1973). MR **51:**3924

[11] J.G. Stampfli: A Local Spectral Theory for Operators 4, Invariant Subspaces. Indiana University. Mathematiques.J. Vol 22, No 2 (1972) 159-167. MR **45:**5793

[12] J. Wermer: The Existence of Invariant Subspaces. Duke. Math. J.19 (1952),615-622. MR **14:**384b

Université Mohammed V, Faculté des Sciences, Departement de Mathématiques et Informatique, B.P.1014, Rabat, Morocco

E-mail address: daoui@fsr.ac.ma

E-mail address: elfallah@fsr.ac.ma