PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 129, Number 4, Pages 1213–1217
S 0002-9939(00)05834-2
Article electronically published on October 4, 2000

UNE PREUVE COURTE DU PRINCIPE DE SELBERG POUR UN GROUPE p-ADIQUE

J.-F. DAT

(Communicated by Dan Barbasch)

ABSTRACT. In 1992, Blanc and Brylinski showed the following property for a p-adic group G, called the "abstract Selberg principle": the orbital integrals on conjugacy classes of non-compact elements of the Hattori rank of a finitely generated projective smooth representation of G vanish. The proof is by explicit computations of "low" level (0 and 1) cyclic and Hochschild cohomologies. Here we intend to show that this property is actually a direct consequence of two facts: Clozel's integration formula (which leads us to assume the defining characteristic to be zero) and the triviality of the action of unramified characters on the K_0 of G (which is also proven here, using a standard K-theoretic argument due to Grothendieck).

1. NOTATIONS

1.1. **Généralités.** Soit F un corps p-adique de caractéristique nulle, on note G le groupe des F-points d'un groupe algébrique réductif défini sur F.

- On note $\mathcal{H}(G)$ ou $\mathcal{H}$ l'algèbre de Hecke des mesures localement constantes à support compact sur G et $\overline{\mathcal{H}}(G) = \mathcal{H}(G)/[\mathcal{H}(G), \mathcal{H}(G)]$. On fixe une mesure de Haar dx sur G, identifiant ainsi $\mathcal{H}(G)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(G)$. La catégorie des G-modules lisses sera notée indifféremment $Mod(G)$ ou $Mod(\mathcal{H})$.
- On fixe (le groupe des F-points d') un sous-groupe parabolique minimal P_0 et une décomposition de Levi $P_0 = M_0.N_0$: un sous-groupe parabolique P qui contient P_0 est appelé standard et contient un unique sous-groupe de Levi contenant M_0, lui aussi appelé standard. On notera $M < G$ pour "M est un sous-groupe de Levi standard de G".
- On note G^0 le groupe engendré par les éléments compacts (i.e. engendrant un sous-groupe relativement compact); on sait que G/G^0 est un groupe abélien libre de type fini et on note $\Psi(G) = \hom G/G^0\mathbb{C}^*\mathbb{Z}$ le tore des "caractères non-ramifiés".
- Soit G_c l'ensemble des éléments semi-simples "compacts modulo le centre" c'est à dire dont l'image dans $G/Z(G)$ est un élément compact. C'est aussi l'ensemble des éléments semi-simples dont le parabolique "contracté" au sens de Deligne [6] est G: c'est un ensemble ouvert fermé et invariant par conjugaison.

Received by the editors June 14, 1999.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 22E50, 22E35; Secondary 19A49.

1.2. **Intégrales orbitales.** Pour $x \in G$ on note $\omega(x)$ la classe de conjugaison de x dans G. Pour $\pi \in Irr(G)$ irréductible, on note Θ_π le caractère-distribution de π: on peut lui associer une fonction θ_π localement L^1 sur G telle que:

$$\forall f \in \mathcal{H}(G), \ \ \langle \pi, f\rangle := \Theta_\pi(f) = \int_G \theta_\pi(x) f(x) dx.$$

On notera aussi pour tout ensemble ouvert fermé invariant par conjugaison Ω: $\langle \pi, f\rangle_\Omega := \int_\Omega \theta_\pi(x) f(x) dx$. Remarquons que ceci ne dépend que de la classe $f + [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ de sorte qu'on obtient un accouplement $\langle , \rangle_\Omega : \ \mathcal{R}(G) \times \overline{\mathcal{H}}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ où $\mathcal{R}(G)$ est le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie.

Lemme 1.1. *Soit $f \in \mathcal{H}(G)$ et Ω un ensemble ouvert fermé stable par conjugaison; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *Pour tout élément semi-simple $x \in G \setminus \Omega$ et toute mesure invariante $d\omega$ sur $\omega(x)$, on a $\int_G f d\omega = 0$.*
ii) *Pour toute irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}(G)$, on a $\langle \pi, f\rangle = \langle \pi, f\rangle_\Omega$.*

Proof. Soit $f_\Omega := f \times 1_\Omega \in \mathcal{H}(G)$, les deux assertions sont équivalentes à la suivante: $(f - f_\Omega) \in [\mathcal{H}, \mathcal{H}]$. Pour i), cela vient de [7, Thm. 10], pour ii) voir [9, Appendix]. □

1.3. **Rang de Hattori.** Soit A un anneau unitaire et P un module projectif de type fini sur A. Choisissons un isomorphisme $P \simeq e.A^n$ avec e un idempotent de $\mathcal{M}_n(A)$, alors la trace de e dans $A/[A, A]$ ne dépend que de P et est appelée rang de Hattori de P et notée $Rk\,P$. Ce formalisme s'étend au cas de l'algèbre non-unitaire $\mathcal{H}$ en remarquant qu'elle est limite inductive de “bonnes” sous-algèbres unitaires (voir [10]), on a alors l'égalité

$$\forall \pi \in Irr(G), \ \ \langle \pi, Rk\,P\rangle_G = \dim(\hom P \pi G). \tag{1}$$

Soit M un sous-groupe de Levi standard de G, on note r_G^M le foncteur de restriction parabolique normalisé le long du sous-groupe parabolique standard $P = MN$ contenant M. La réciprocité de Frobenius et l'exactitude de l'induction parabolique i_M^G montrent que r_G^M respecte la propriété d'être projectif. La décomposition de Cartan $G = KP$ (où K est un “bon” sous-groupe ouvert compact maximal) montre que r_G^M respecte la propriété d'être de type fini. Pour $f \in \mathcal{H}(G)$ et M un sous-groupe de Levi standard, on note

$$\forall m \in M, \ \ f^{(P)}(m) := \delta_P{}^{\frac{1}{2}}(m) \int_N \int_K f(kmnk^{-1}) dk.dn$$

où δ_P est le module de M par rapport à P. On vérifie que cette formule induit un morphisme bien défini $\overline{\mathcal{H}}(G) \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}(M)$.

Lemme 1.2. *Soit X un G-module projectif de type fini, alors $\mathrm{Rk}(r_G^M X) = (Rk\,X)^{(P)}$.*

Proof. Soit $\pi \in Irr(M)$, alors d'après (1) et la réciprocité de Frobenius, on a:

$$\langle Rk(r_G^M X), \pi\rangle_M = \langle Rk\,X, i_M^G \pi\rangle_G.$$

Le terme de droite est aussi $\langle (Rk\,X)^{(P)}, \pi\rangle_M$ par la formule de Van Dijk (voir [12, Thm. 2]). On conclut par [9, Appendix] comme plus haut. □

2. Énoncé et preuve

Théorème 2.1 (Principe de Selberg "abstrait"). *Soit X un G-module projectif de type fini, alors pour tout $x \in G$ non-compact et toute mesure invariante $d\omega$ sur $\omega(x)$, on a $\int_{\omega(x)} Rk(X) d\omega = 0$.*

Proof. Remarquons d'abord que l'argument de [3, Thm. 4.10 (2)] permet de supposer x semi-simple.

Avant d'entreprendre la preuve, nous aurons besoin d'un lemme. Soit $\mathcal{K}(G)$ le groupe de Grothendieck des représentations projectives de type fini de G. Le tore $\Psi(G)$ agit sur la catégorie $Mod(G)$ par torsion $\psi V := V \otimes_{\mathbb{C}} \psi$, induisant ainsi une action sur $\mathcal{K}(G)$. Nous montrerons dans la partie suivante:

Lemme 2.1. *L'action de $\Psi(G)$ sur $\mathcal{K}(G)$ est triviale.*

Remarque. Soit $f \in \overline{\mathcal{H}}(G)$ et $\psi \in \Psi(G)$, on a pour tout $x \in G$ et toute mesure invariante $d\omega$ sur $\omega(x)$:

$$\int_{\omega(x)} \psi . f d\omega = \psi(x) \int_{\omega(x)} f . d\omega .$$

On en déduit que si $f \in \overline{\mathcal{H}}(G)^{\Psi(G)}$ (invariante sous $\Psi(G)$) et $x \in G \setminus G^0$, alors $\int_{\omega(x)} f d\omega = 0$ pour toute mesure invariante $d\omega$ sur $\omega(x)$.

Remarquons que quand le rang semi-simple $s(G)$ de G est nul, G^0 est exactement l'ensemble des éléments compacts, de sorte que le théorème est une conséquence de la remarque ci-dessus et du lemme 2.1. Pour le cas $s(G) > 0$, on utilise la formule de Clozel (voir [4, p. 240] pour la définition précise de χ_M) : $\forall (\pi, f) \in Irr(G) \times \mathcal{H}(G)$,

$$\langle \pi, f \rangle = \sum_{M < G} \langle r_G^M \pi, \chi_M f^{(P)} \rangle_{M_c}$$

(les mesures de Haar sur les sous-groupes de Levi standards sont déterminées dans [4], page 245). Dans notre cas, $f = Rk\, X$, si bien que par le lemme 1.2, pour tout $M < G$, on a:

$$\langle r_G^M \pi, \chi_M f^{(P)} \rangle_{M_c} = \langle r_G^M \pi, \chi_M \, Rk(r_G^M X) \rangle_{M_c} .$$

Rappelons que la fonction χ_M, étant invariante par M^0, est aussi invariante par conjugaison; la fonction $\chi_M f^{(P)}$ définit donc un élément $\chi_M \, Rk(r_G^M X)$ dans $\overline{\mathcal{H}}(M)$, qui est invariant par $\Psi(M)$ d'après le lemme 2.1. On a donc, par la remarque ci-dessus et le lemme 1.1,

$$\langle r_G^M \pi, \chi_M \, Rk(r_G^M X) \rangle_{M_c} = \langle r_G^M \pi, \chi_M \, Rk(r_G^M X) \rangle_{M_c \cap M^0} .$$

Or, par définition, on a $\chi_G = 1_{G_c}$ et pour tout $M \neq G$, χ_M est nulle sur M^0 de sorte que les termes de la formule de Clozel associés aux sous-groupes de Levi propres sont en fait nuls dans notre cas. On obtient donc $\langle \pi, Rk\, X \rangle = \langle \pi, Rk\, X \rangle_{G_c}$ et, par les lemmes 2.1 et 1.1: $\langle \pi, Rk\, X \rangle = \langle \pi, Rk\, X \rangle_{G_c \cap G^0}$ ce qui permet de conclure en utilisant à nouveau le lemme 1.1.

3. Preuve du lemme 2.1

Ce lemme est peut-être bien connu des experts et peut se déduire de la formule explicite de $\mathcal{K}(G)$ donnée dans [5]; nous essayons ici d'en donner une démonstration directe.

3.1. **Remarque préliminaire.** Soient K un corps, R une K-algèbre commutative et γ un automorphisme de la K-algèbre R. Si A est une K-algèbre unitaire, $1 \otimes \gamma$ définit un K-automorphisme de l'anneau $A_R := A \otimes_K R$, donc un automorphisme de la catégorie $Mod(A_R)$ des A_R-modules à gauche (M^γ est obtenu en tordant l'action de A_R sur M par γ^{-1}) et donc un automorphisme, toujours noté γ du groupe de Grothendieck des A_R-modules projectifs de type fini $\mathcal{K}(A_R)$. Remarquons que le foncteur

$$\begin{array}{rccc} T: & Mod(A) & \rightarrow & Mod(A_R) \\ & M & \mapsto & M \otimes_K R \end{array}$$

induit un morphisme $\mathcal{K}(T) : \mathcal{K}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A_R)$ dont l'image est invariante par γ. En effet, si $M \in Mod(A)$, le morphisme

$$\begin{array}{rcl} M \otimes R & \rightarrow & M \otimes R \\ m \otimes r & \mapsto & m \otimes \gamma^{-1}(r) \end{array}$$

est un A_R-isomorphisme $(M \otimes_K R) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_K R)^\gamma$.

3.2. **Un cas particulier.** Supposons que $K = \mathbb{C}$, $R = \mathbb{C}[X]$ pour un certain groupe abélien libre de type fini X et que A est une K-algèbre noetherienne de dimension cohomologique finie. Alors d'après [1, XII.(3.1)], le morphisme $\mathcal{K}(T)$ ci-dessus est un isomorphisme. On en déduit que tout automorphisme de R agit trivialement sur $\mathcal{K}(A_R)$, en particulier, l'action du tore $\Psi(X)$ par translation sur $\mathbb{C}[X]$ induit une action triviale.

3.3. **Au fait.** On appliquera ce qui précède à $A = \mathcal{H}$ et $X = G/G^0$: en effet, les remarques ci-dessus s'adaptent à l'algèbre non-unitaire $\mathcal{H}$ en la voyant comme limite inductive d'algèbres unitaires noetheriennes de dimensions cohomologiques finies (pour la limite inductive et la noetheriannité on utilise [2, 3.9(ii)] et pour la finitude cohomologique, voir [13, Prop. 37]). On note Ψ_{un} le caractère "universel" de G à valeurs dans $\mathbb{C}[G/G^0]$

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{un}: & G & \rightarrow & \mathbb{C}[G/G^0] \\ & g & \mapsto & gG^0. \end{array}$$

On définit alors par torsion par Ψ_{un} un automorphisme de $Mod(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G/G^0])$:

$$\begin{array}{rccc} U: & Mod(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G/G^0]) & \rightarrow & Mod(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G/G^0]) \\ & V & \mapsto & V \otimes_{\mathbb{C}[G/G^0]} \Psi_{un} \end{array}$$

(G agit diagonalement sur le produit tensoriel et l'automorphisme réciproque est la tensorisation par ${\Psi_{un}}^{-1}$) qui induit un automorphisme $\mathcal{K}(U)$ de $\mathcal{K}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G/G^0])$. Soit maintenant $V \in Mod(\mathcal{H})$ et $\psi \in \Psi(G)$, le $\mathbb{C}$-morphisme

$$\begin{array}{rccc} W_\psi: & V \otimes \mathbb{C}[G/G^0] & \rightarrow & V \otimes \mathbb{C}[G/G^0] \\ & v \otimes \lambda & \mapsto & v \otimes \psi^{-1}.\lambda \end{array}$$

est bijectif et vérifie: $W_\psi \circ (g \otimes 1) = (g \otimes 1) \circ W_\psi$ et $W_\psi \circ (1 \otimes g) = \psi^{-1}(g)(1 \otimes g) \circ W_\psi$. En d'autres termes, si $F = U \circ T$, W_ψ est un $(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G/G^0])$-isomorphisme:

$$W_\psi: \;\; F(\psi.V) \xrightarrow{\sim} F(V)^\psi,$$

donc en particulier $\mathcal{K}(F) : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G/G^0])$ est un isomorphisme $\Psi(G)$-équivariant pour l'action de "torsion par les caractères non ramifiés" à gauche et l'action du premier paragraphe à droite. L'action étant triviale à droite doit l'être également à gauche.

Remarque. Cette preuve s'applique à tout groupe localement compact totalement discontinu de dimension cohomologique finie, tel que G/G^0 soit libre abélien et admettant un système de sous-groupes ouverts compacts comme dans [2, 3.9(ii)].

References

[1] H. Bass. *Algebraic K-Theory.* Progress in Math., Benjamin, 1968. MR **40:**2736

[2] J.-N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* Travaux en Cours. Hermann, Paris, 1984. MR **85h:**22001

[3] P. Blanc and J.-L. Brylinski. Cyclic homology and the Selberg principle. *J. Funct. Anal*, 109:289–330, 1992. MR **94a:**22023

[4] L. Clozel. Orbital integrals on p-adic groups: a proof of the Howe conjecture. *Annals of Mathematics*, 129:237–251, 1989. MR **90h:**22020

[5] J.-F. Dat. On the K_0 of a p-adic group. *Inv. Math.*, 140:171–226, 2000.

[6] P. Deligne. Sur le support du caractère d'une représentation supercuspidale. *C.R.A.S*, A-B 283:155–157, 1976. MR **54:**12991

[7] Harish-Chandra. Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups. *Queen's Papers in Pure and Applied Math.*, 48:281–346, 1978. MR **58:**28313

[8] N. Higson and V. Nistor. Cyclic homology of totally disconnected groups acting on buildings. *J. Funct. Anal*, 141:466–495, 1996. MR **98b:**19004

[9] D. Kazhdan. Cuspidal geometry of p-adic groups. *J. of Analyse Math.*, 47:1–36, 1986. MR **88g:**22017

[10] D. Kazhdan. Representations of groups over close local fields. *J. of Analyse Math.*, 47:175–179, 1986. MR **88g:**22018

[11] P. Schneider. The cyclic homology of p-adic reductive groups. *J. Reine Angew. Math.*, 475:39–54, 1996. MR **98f:**19003

[12] G. van Dijk. Computation of certain induced characters of p-adic groups. *Math. Ann.*, 199:229–240, 1972. MR **49:**3043

[13] M.-F. Vignéras. On formal dimensions for reductive p-adic groups. *Israel Math. Conf. Proc.*, 2:225–265, 1990. MR **93c:**22034

Institut de Mathématiques de Jussieu, Théorie des groupes – Case 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

E-mail address: dat@math.jussieu.fr