

## LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA STELLAIRES

IVAN PAN

(Communicated by Michael Stillman)

RÉSUMÉ. On construit explicitement toutes les transformations de Cremona de  $\mathbf{P}^n$  qui satisfont à la propriété suivante: il existe  $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$  tels que les droites par  $P_1$  sont envoyées sur les droites par  $P_2$ . On caractérise de plusieurs manières ces transformations et pour chaque entier non-négatif  $d$  on donne des formules pour la dimension de l'ensemble constitué de celles qui ont degré  $d$ .

ABSTRACT. We construct the Cremona transformations of  $\mathbf{P}^n$  satisfying the following property: there exist  $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$  such that the image of all straight lines through  $P_1$  are straight lines through  $P_2$ . We characterise these transformations, and for all non-negative integer  $d$  we give a formula for the dimension of the set of those whose degree is  $d$ .

### 1. INTRODUCTION

Tout au long de ce travail,  $k$  désignera un corps algébriquement clos de caractéristique zéro,  $A := k[x_0, \dots, x_n]$  l'anneau des polynômes à  $(n+1)$  variables sur  $k$  et pour  $d$  entier non-négatif,  $A_d$  le sous-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré  $d$  (bien sûr  $A_0 = k$  et  $A_l = 0$  si  $l < 0$ ).

Soit  $t = (t_1, \dots, t_n) \in (k[x_1, \dots, x_n]_r)^n$  avec  $r \geq 1$  et  $\text{pgcd}(t_1, \dots, t_n) = 1$ . Pour  $d \geq r$  on se donne  $q \in A_{d-r}$ ,  $g \in A_d$  avec  $\text{pgcd}(q, g) = 1$  et on définit

$$T_{g,q,t} : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$$

par

$$T_{g,q,t} = [g, qt_1, \dots, qt_n].$$

Dans ce travail on montre que  $T_{g,q,t}$  est de Cremona si et seulement si

(i)  $\bar{T} := [t_1, \dots, t_n] : \mathbf{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$  est de Cremona, et

(ii)  $m_O(g) \geq d-1$  et  $m_O(g) + m_O(q) \in \{2d-r-2, 2d-r-1\}$ ,

où  $m_O(f)$  indique l'ordre d'annulation de  $f$  en  $O$ ; pour  $n=2$  le cas où  $t = id$  correspond aux transformations de de Jonquières (voir [7] et [4]). On caractérise de plusieurs manières ces transformations et en particulier on montre que l'ensemble des transformations  $T_{g,q,t}$  est, à changements de variables à la source et au but près, l'ensemble des transformations de Cremona pour lesquelles il existe  $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$  tels que l'espace des droites par  $P_1$  s'envoient birationnellement sur l'espace des droites

---

Received by the editors July 20, 1999.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14E07, 14N99.

*Key words and phrases.* Transformation de Cremona, stellaire.

Au moment de la rédaction de ce travail, l'auteur était attaché à l'Instituto de Matemática-UFRGS en qualité de boursier du CNPq-Brésil.

par  $P_2$ ; on appelle *stellaires* ces dernières. Finalement, on donne des formules pour la dimension de l'ensemble des transformations stellaires de degré  $d$ .

J'aimerais remercier Thierry Vust pour son aide dans la redaction de ce travail, sans laquelle elle ne se serait jamais achevée.

2. LES TRANSFORMATIONS STELLAIRES

**Définition 2.1.** Soit  $F : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$  une transformation de Cremona. On dit que  $F$  est stellaire s'il existe  $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$  et  $\bar{F} : \mathbf{P}(k^{n+1}/P_1) \dashrightarrow \mathbf{P}(k^{n+1}/P_2)$  birationnelle tels que

$$\bar{F} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ F$$

où  $\pi_i : \mathbf{P}(k^{n+1}) = \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}(k^{n+1}/P_i)$  est la projection de centre  $P_i$ .

Introduisant l'étoile de  $P_i$ , à savoir la sous-variété  $Et(P_i)$  de la grassmannienne des droites de  $\mathbf{P}^n$  constituée des droites passant par  $P_i$ , on voit que  $F$  est stellaire si et seulement si  $F$  induit une application birationnelle  $Et(F) : Et(P_1) \dashrightarrow Et(P_2)$ .

On considère l'éclatement  $\sigma_i : Bl_{P_i}(\mathbf{P}^n) \dashrightarrow \mathbf{P}^n$  de  $P_i$  dans  $\mathbf{P}^n$ ; alors  $\rho_i := \pi_i \circ \sigma_i$  est un morphisme qui présente  $Bl_{P_i}(\mathbf{P}^n)$  comme fibré en droites projectives sur  $\mathbf{P}^{n-1}$ : c'est  $\mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}})$ . On note  $\hat{F} : Bl_{P_1}(\mathbf{P}^n) \dashrightarrow Bl_{P_2}(\mathbf{P}^n)$  l'application birationnelle telle que  $\sigma_2 \circ \hat{F} = F \circ \sigma_1$ . Alors  $F$  est stellaire si et seulement s'il existe une application birationnelle  $\bar{F} : \mathbf{P}(k^{n+1}/P_1) \dashrightarrow \mathbf{P}(k^{n+1}/P_2)$  telle que

$$\rho_2 \circ \hat{F} = \bar{F} \circ \rho_1.$$

Un couple  $(P_1, P_2)$  comme dans la définition ci-dessus s'appelle un centre pour la transformation stellaire  $F$ ;  $(P_2, P_1)$  est un centre pour  $F^{-1}$ . On dira aussi que  $P_1$  est un sommet pour  $F$  et  $P_2$  un sommet pour  $F^{-1}$ .

**Exemple 2.1.** Un automorphisme  $F$  de  $\mathbf{P}^n$  est une transformation stellaire de centre  $(P, F(P))$  pour tout  $P \in \mathbf{P}^n$ .

**Exemple 2.2.** La transformation de Cremona de  $\mathbf{P}^n$

$$F_n = [x_1 \cdots x_n, x_0 x_2 \cdots x_n, \dots, x_0 \cdots x_{n-1}] = \left[ \frac{1}{x_0}, \dots, \frac{1}{x_n} \right]$$

est stellaire de centre  $(O_i, O_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , où  $O_i := [0, \dots, 1, \dots, 0]$ .

On note  $\mathbf{St}(\mathbf{P}^n)$  (resp.  $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$ ) l'ensemble des transformations stellaires de  $\mathbf{P}^n$  (resp. de centre  $(O, O)$  où  $O = [1, 0, \dots, 0]$ ). Le groupe  $PGL(n+1) \times PGL(n+1)$  opère dans  $\mathbf{St}(\mathbf{P}^n)$  par composition à la source et au but; de plus

$$\mathbf{St}(\mathbf{P}^n) = (PGL(n+1) \times PGL(n+1)) \cdot \mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$$

et  $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$  est un sous-groupe du groupe de Cremona  $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$  de  $\mathbf{P}^n$ .

**Proposition 2.1.** L'application  $F \longrightarrow \bar{F}$  induit une suite exacte scindée

$$1 \rightarrow PGL(2, k(y_1, \dots, y_{n-1})) \hookrightarrow \mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n) \longrightarrow \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^{n-1}) \rightarrow 1.$$

*Preuve.* On a la version "locale" suivante: l'application  $F : k^n \dashrightarrow k^n$  est stellaire de centre  $(O, O)$  si et seulement s'il existe  $\bar{F} : k^{n-1} \dashrightarrow k^{n-1}$  birationnelle tel que le diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} k^{n-1} \times k & \xrightarrow{F} & k^{n-1} \times k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ k^{n-1} & \xrightarrow{\bar{F}} & k^{n-1} \end{array}$$

commute. Il s'ensuit aussitôt que la suite de l'énoncé est exacte; elle est scindée par

$$\bar{F} \longmapsto [(y, z) \mapsto (\bar{F}(y), z)], \quad y \in k^{n-1}, z \in k. \quad \square$$

Voici encore une description géométrique des transformations stellaires.

Soit  $\bar{T} : \mathbf{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$  et  $T : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^n$  deux applications rationnelles telles que  $\pi \circ T = \bar{T} \circ \pi$  où  $\pi : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^{n-1}$  est la projection de centre  $O$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \longmapsto [x_1, \dots, x_n].$$

Si  $\bar{T} = [t_1, \dots, t_n]$  où  $t_i \in k[x_1, \dots, x_n]_r$  avec  $\text{pgcd}(t_1, \dots, t_n) = 1$ , il existe  $g \in A_d, q \in A_{d-r}$  avec  $\text{pgcd}(q, g) = 1$ , qui sont uniques à multiplication par un scalaire non-nul près, tels que

$$T_{g,q,t} := T = [g, qt_1, \dots, qt_n].$$

*Remarque 2.1.* Dans la preuve du résultat principal de [6] on montre que si  $n > 2$ , tout ensemble de générateurs de  $\mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n)$  doit contenir une famille non dénombrable d'éléments de  $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n) \setminus PGL(n+1)$ .

Finalement, pour une application rationnelle  $F = [f_0, \dots, f_m] : \mathbf{P}^n \dashrightarrow \mathbf{P}^m$ , avec  $\text{pgcd}(f_0, \dots, f_m) = 1$ , on note  $B(F)$  le schéma de base défini par l'idéal  $(f_0, \dots, f_m)$  et  $\Lambda_F$  le sous-système linéaire engendré par les  $f_i$ : celui-ci est l'ensemble des hypersurfaces d'équations  $\sum_{i=0}^m a_i f_i = 0, [a_0, \dots, a_m] \in \mathbf{P}^m$ . Si  $P \in \mathbf{P}^n$ , la multiplicité de  $\Lambda_F$  en  $P$  est le nombre entier non-négatif

$$m_P(\Lambda_F) := \min\{m_P(S) : S \in \Lambda_F\},$$

où  $m_P(S)$  est la multiplicité de l'hypersurface  $S$  en  $P$ ; si  $S = \{f = 0\}$ , ce nombre est l'ordre d'annulation  $m_P(f)$  de  $f$  en  $P$ .

**Proposition 2.2.** *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (1)  $T_{g,q,t}$  est birationnelle;
- (2)  $\bar{T}$  est birationnelle et  $m_O(\Lambda_{T_{g,q,t}}) = d - 1$ ;
- (3)  $\bar{T}$  est birationnelle,  $m_O(g) \geq d - 1$  et  $m_O(g) + m_O(q) \in \{2d - r - 2, 2d - r - 1\}$ .

En particulier, si  $n > 2$  et  $d > 1$  le point  $O$  est un point singulier de  $B(T_{g,q,t})$ .

*Preuve.* Notons  $\Lambda := \Lambda_{T_{g,q,t}}$ .

(1  $\iff$  2) Au dehors de  $\{g = q = 0\} \cup \{g = t_1 = \dots = t_n = 0\}$ , l'intersection de  $n$  éléments génériques dans  $\Lambda$  est l'intersection d'une hypersurface générique dans  $\Lambda$  avec l'intersection de  $n - 1$  hypersurfaces dans  $\mathbf{P}^n$  de la forme  $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i t_i = 0$  en dehors de  $\{t_1 = \dots = t_n = 0\}$ ; d'où l'assertion.

(2  $\iff$  3) Observons d'abord que  $m_O(t_i) = r$  pour tout  $i$ . Par définition  $m_O(\Lambda) = d - 1$  si et seulement si  $m_O(g), m_O(qt_i) \geq d - 1$  et l'un des  $g, qt_1, \dots, qt_n$  a multiplicité  $d - 1$  en  $O$ . L'assertion suit du fait que  $m_O(qt_i) = m_O(q) + m_O(t_i)$ .

Montrons maintenant la dernière assertion. D'une part si  $r = 1$  on montre sans peine que l'idéal  $(x_1, \dots, x_n)$  définit un point immergé de  $B(T_{g,q,t})$ : c'est l'annulateur de  $q$  (ici on a utilisé  $n > 2$ ); d'autre part, si  $r > 1$  on constate que la matrice jacobienne associée à l'idéal  $(g, qt_1, \dots, qt_n)$  a rang  $\leq 1$  en  $O$ . On en déduit l'assertion.  $\square$

Le degré commun des  $f_i$  dans l'écriture de  $F = [f_0, \dots, f_m]$  s'appelle le degré de  $F$ , qu'on note  $\text{deg}(F)$ .

*Remarque 2.2.* Parmi les hypersurfaces de degré  $d > 2$  qui possèdent au moins un point de multiplicité  $d - 1$ , celles qui n'en possèdent qu'un seul constituent un sous-ensemble dense. On peut donc dire qu'une transformation stellaire "générique" de degré  $> 2$  ne possède qu'un seul sommet.

**Exemple 2.3.** Les transformations de Cremona à schéma de base lisse et non discret (pour l'existence voir [5] et [1]) ne sont pas stellaires.

**Exemple 2.4.** Soient  $d \geq 1$  et  $n \geq 2$ . En prenant  $r = 1$ , on construit des exemples de transformation stellaires de  $\mathbf{P}^n$  de degré  $d$ .

Le corollaire suivant donne un critère plus calculatoire pour décider sur la bi-rationalité d'un candidat à transformation stellaire. Pour  $f \in A_d$  on pose  $f = x_0^d f_0 + \dots + x_0 f_{d-1} + f_d$  où  $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ .

**Corollaire 2.3.** *On a les assertions équivalentes suivantes*

- (1)  $T_{g,q,t}$  est birationnelle;
- (2)  $\bar{T}$  est birationnelle,  $g = x_0 q_{d-1} + g_d$ ,  $q = x_0 q_{d-r-1} + q_{d-r}$  et  $g_d q_{d-r-1} - g_{d-1} q_{d-r} \neq 0$ .

*Preuve.* Par la proposition, il suffit de démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- (1)  $g_{d-1} \neq 0$  ou  $q_{d-r-1} \neq 0$ ;
- (2)  $g_d q_{d-r-1} - g_{d-1} q_{d-r} \neq 0$ .

On montre  $(1 \Rightarrow 2)$ , car l'autre assertion est évidente.

Supposons par l'absurde

$$(2) \quad g_d q_{d-r-1} = g_{d-1} q_{d-r}.$$

Puisque  $q_{d-r-1} = g_{d-1} = 0$  n'est pas possible et  $q \neq 0$ , on a  $q_{d-r-1} \neq 0$ ; soit

$$q_{d-r-1} = h h'$$

où  $h|g_{d-1}$ ,  $h'|q_{d-r}$  (éventuellement  $h = 1$  ou  $h' = 1$ ). Posons

$$g_{d-1} = \bar{g}h, \quad q_{d-r} = \bar{q}h'.$$

De l'équation (2) suit

$$g_d = \bar{g}\bar{q}.$$

Donc

$$g = \bar{g}(x_0 h + \bar{q}), \quad q = h'(x_0 h + \bar{q}),$$

ce qui contredit  $pgdc(g, q) = 1$  et démontre l'assertion. □

### 3. QUELQUES CALCULS DE DIMENSION

On fixe  $n \geq 1$ . Soient  $r \leq d$  et  $\mathcal{E} \subset \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^{n-1})$  un sous-ensemble constructible constitué de transformations de degré  $r$  (i.e.  $\mathcal{E} \subset \mathbf{P}(k[x_1, \dots, x_n]_r^n)$ ). On note

$$\mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d := \{F \in \mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n) : \deg(F) = d, \bar{F} \in \mathcal{E}\},$$

$$\mathbf{St}(\mathcal{E})_d := (PGL(n+1) \times PGL(n+1)) \cdot \mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d;$$

observer que dans le cas où  $r = 1$  et  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset PGL(n)$  on a  $\mathbf{St}(\mathcal{E})_d = \mathbf{St}(PGL(n))_d$ .

Pour  $d = 1$ , on a  $r = 1$  et alors,  $\mathcal{E} \subset PGL(n)$ ; on voit facilement que si  $\mathcal{E} \neq \emptyset$ , alors

$$\mathbf{St}(\mathcal{E})_1 = PGL(n+1).$$

On traite à continuation le cas où  $d \geq 2$ .

Considérons la fonction polynomiale

$$p : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

donnée par

$$p(x, y, z) = \binom{x + y - 1}{y} + \binom{x + y - 2}{y - 1} + \binom{x + y - z - 1}{y - z} + \binom{x + y - z - 2}{y - z - 1} - 2,$$

où  $\mathbf{Z}$  est l'ensemble des nombres entiers. On a

**Proposition 3.1.** *Soit  $d > 2$ . Si  $\mathcal{E}$  est irréductible, alors  $\mathbf{St}(\mathcal{E})_d$  est un sous-ensemble constructible et irréductible d'une variété quasi-projective tel que*

$$\dim \mathbf{St}(\mathcal{E})_d = \begin{cases} \dim \mathcal{E} + p(n, d, r) + 2n + 1 & \text{si } r > 1, \\ \dim PGL(n) + p(n, d, r) + 2n + 1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

*Preuve.* Considérons les sous-ensembles

$$U_{d,r}^2 := \{(g, q) \in A_d \times A_{d-r} : \text{pgcd}(g, q) = 1\},$$

$$U_r^n := \{(t_1, \dots, t_n) \in k[x_1, \dots, x_n]_r^n : \text{pgcd}(t_1, \dots, t_n) = 1\}.$$

L'application  $((g, q), (t_1, \dots, t_n)) \mapsto (g, qt_1, \dots, qt_n)$  induit un morphisme injectif

$$\phi : U_{d,r}^2 \times U_r^n / (k^*)^2 \longrightarrow \mathbf{P}(k[x_0, \dots, x_n]_d^n)$$

où  $(k^*)^2$  opère par  $(a, b) \cdot (g, q, t) \mapsto (abg, aq, bt)$ ; l'image de  $\phi$  contient les éléments de degré  $d$  dans  $\mathbf{St}_O(\mathbf{P}^n)$ . De la proposition 2.2 on déduit que  $\mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d$  est irréductible et

$$\dim \mathbf{St}_O(\mathcal{E})_d = \dim \mathcal{E} + 1 + p(n, d, r).$$

Par ailleurs, observer que  $\mathbf{St}(\mathcal{E})_d$  est la réunion des sous-ensembles constitués des transformations stellaires qui ont centre  $(P_1, P_2)$  pour  $P_1, P_2 \in \mathbf{P}^n$ ; de plus, observer que les points génériques de ces sous-ensembles ne coïncident pas. On en déduit le résultat. □

*Remarque 3.1.* En fait on peut montrer que si  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^{n-1})$  sont constitués par des éléments de degrés  $r_1, r_2$  avec  $r_1 \neq r_2$ , alors  $\mathbf{St}(\mathcal{E}_1)_d \cap \mathbf{St}(\mathcal{E}_2)_d = \emptyset$ , donc la proposition fournit une façon de calculer la dimension de l'ensemble des transformations stellaires de degré  $d > 2$ .

**Exemple 3.1.** Dans le cas où  $\emptyset \neq \mathcal{E} \subset PGL(n)$ ,  $\dim \mathbf{St}(PGL(n))_d$  vaut

$$n(n + 2) + \frac{(n + d - 3)!}{(d - 2)!(n - 1)!} \left[ \frac{n^2 + (4d - 3)n + 2(2d^2 - 4d + 1)}{d(d - 1)} \right];$$

et donc on a aussi

$$\dim \mathbf{St}(PGL(n))_d \approx 4 \prod_{l=0}^{d-3} \frac{l + n}{l + 1}.$$

Comme cas particulier on en déduit une preuve du fait:  $\dim \mathbf{Cr}(\mathbf{P}^n) = \infty$  si  $n \geq 2$ .

**Exemple 3.2.** Dans le cas des transformations stellaires de degré 2, on ne peut pas assurer l'unicité (générique) du sommet. Par exemple on sait (voir [2] ou encore [4]) qu'une transformation quadratique générique dans le plan est dans l'orbite de l'application  $F_2$  de l'exemple 2.2.

**Commentaires finals.** Pour  $n > 2$  et  $r = 1$  on peut montrer l'unicité du centre sans aucune hypothèse de généricité: une telle transformation  $F$  avec centre  $(P_1, P_2)$  et  $(P'_1, P'_2)$  doit vérifier qu'il existe  $q_1, q'_1 \in A_{d-1}$  tel que

$$\Lambda_F \supset \mathbf{P}(q_1 V_1) \cup \mathbf{P}(q'_1 V'_1),$$

avec  $V_1, V'_1 \subset A_1$  désignant les sous-espaces des formes s'annulant en  $P_1$  et  $P'_1$  respectivement. Avec des arguments de divisibilité on montre qu'alors  $q'_1/q_1 \in k \setminus \{0\}$  et  $P_1 = P'_1$ ; le même argument vaut pour  $F^{-1}$ .

#### REFERENCES

- [1] L. Ein and N. Shepherd-Barron (1989): Some Special Cremona transformations. *American Journal of Mathematics*, 111, pages 783-800. MR **90j**:14015
- [2] L. Godeaux ( ): Géométrie algébrique I. Transformations birationnelles et géométrie hyperespatiale. *Massons & Cie, Editeurs, Paris*
- [3] J. Harris (1992): Algebraic Geometry. *Springer Verlag*. MR **93j**:14001
- [4] H.P. Hudson (1927): Cremona transformation in Plane and Space. *Cambridge at the University Press*.
- [5] B.Crauder and S.Katz (1989): Cremona Transformations with smooth irreducible fundamental locus. *American Journal of Mathematics* 111, 289-307. MR **90b**:14012
- [6] I. Pan (1999): Une remarque sur la génération du groupe de Cremona, *Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 30, N.1, 95-98* MR **2000b**:14015
- [7] J.G. Semple and L. Roth (1949): Introduction to Algebraic Geometry. *Oxford at the Clarendon Press, Amen House, London E.C.M.* MR **11**:535d

INSTITUTO DE MATEMÁTICA-UFRGS, AV. BENTO GONÇALVES 9500, 91540-000 PORTO ALEGRE/RS, BRASIL

*E-mail address:* pan@mat.ufrgs.br