

CATÉGORIE DE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN ET GENRE DES H_0 -ESPACES

M. CRISTINA COSTOYA-RAMOS

(Communicated by Paul Goerss)

ABSTRACT. Soit X un espace ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires. Si, pour tout nombre premier p , la LS-catégorie de tous les p -localisés de X est majorée par n , nous montrons que la LS-catégorie de X est majorée par $n + 1$. Si Y est un élément dans le genre de Mislin de X , nous en déduisons: $|\text{cat}(Y) - \text{cat}(X)| \leq 1$. Dans le cas d'un H -espace X de rang 2, nous avons exactement $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$, pour tout espace Y dans le genre de X .

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'existence de relations entre la LS-catégorie de X , $\text{cat}(X)$, et celle de ses p -localisés, $\text{cat}(X_{(p)})$ pour tout nombre premier p . G. H. Toomer a établi un premier résultat dans cette direction en montrant $\text{cat}(X_{(p)}) \leq \text{cat}(X)$, pour tout espace simplement connexe X . Cette propriété n'est pas conservée dans la classe des espaces nilpotents; un contre-exemple est donné par $\text{cat}(S^1) = 1$, $\text{cat}(K(\mathbb{Q}, 1)) = 2$. Au vu du résultat de Toomer, arrive naturellement la question suivante, pour un espace simplement connexe X :

(Q_1) Si pour tout nombre premier p , on a $\text{cat}(X_{(p)}) \leq n$, peut-on en déduire $\text{cat}(X) \leq n$?

J. Roitberg répond négativement à cette question en construisant [Roi00] un espace infini, X , vérifiant $\text{cat}(X) = 2$ et $\text{cat}(X_{(p)}) = 1$, pour tout nombre premier p . La question (Q_1) est toujours ouverte pour les espaces finis.

Pour éviter la situation de l'exemple de Roitberg et celle du cercle S^1 , nous ne considérons désormais que des *espaces simplement connexes ayant le type d'homotopie de CW-complexes finis*, que nous désignons simplement par *espaces*. Pour ces espaces, Cornea [Cor95] obtient une majoration de $\text{cat}(X)$ en fonction des $\text{cat}(X_{(p)})$: si $\text{cat}(X_{(p)})$ est majorée par n , pour tout nombre premier p , alors $\text{cat}(X) \leq 2n$.

Une deuxième question en relation avec (Q_1) concerne le genre de Mislin de X , $\mathcal{G}(X)$, défini comme l'ensemble des types d'homotopie d'espaces p -équivalents à X pour tout nombre premier p . Une propriété homotopique de X est dite *générique* si elle est partagée par tous les éléments de $\mathcal{G}(X)$. Dans [McG94], C. McGibbon pose la question de savoir si la catégorie de Lusternik-Schnirelmann est une propriété générique, i.e.:

(Q_2) A-t-on $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$ pour tout espace Y dans le genre de X ?

Received by the editors June 11, 2001 and, in revised form, September 11, 2001.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 55M30, 55P60, 55P62.

Key words and phrases. Lusternik-Schnirelmann category, Mislin genus, H -space.

L'exemple déjà cité de J. Roitberg est une réponse négative dans le cadre des espaces infinis. En se limitant aux *espaces*, McGibbon donne une réponse affirmative à (\mathcal{Q}_2) pour les *co-H-espaces*, i.e. si $\text{cat}(X) = 1$, alors $\text{cat}(Y) = 1$, pour tout $Y \in \mathcal{G}(X)$.

Remarquons qu'une réponse affirmative à (\mathcal{Q}_1) entraîne une réponse affirmative à (\mathcal{Q}_2) .

Dans cet article, après avoir rappelé les définitions de base, nous étudions la généralité de plusieurs minorants de la catégorie de Lusternik-Schnirelmann. Nous montrons que la réponse est positive (Théorème 1) pour la *catégorie faible* [BH60], la *strict category weight*, [Rud99], [Str99] et la σ^i -*catégorie* [Van00].

Le point principal du travail est l'étude des questions (\mathcal{Q}_1) et (\mathcal{Q}_2) lorsque X est un H_0 -espace, c'est-à-dire un espace ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires. Dans ce cas, nous obtenons (Théorème 2):

- pour (\mathcal{Q}_1) , $\max \{\text{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} \leq \text{cat}(X) \leq \max \{\text{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} + 1$;
- pour (\mathcal{Q}_2) , $Y \in \mathcal{G}(X) \Rightarrow \text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X) + 1$.

Nous utilisons la caractérisation de la LS-catégorie à l'aide des modèles minimaux [FH82]. Un exemple (Exemple 7) montre qu'il peut y avoir plusieurs sections aux fibrations de Ganea rationalisées d'un produit de sphères impaires, justifiant le fait que la méthode utilisée ne peut donner l'égalité $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$ mais seulement que la différence entre les deux est d'au plus une unité si $Y \in \mathcal{G}(X)$.

L'on peut également se demander si le résultat obtenu pour un produit de sphères impaires peut se généraliser à tout espace avec une preuve similaire; l'Exemple 6 montre qu'il n'en est rien.

Pour terminer, nous nous intéressons aux H -espaces de rang 2 et nous observons que la LS-catégorie y est générique.

1. FIBRATIONS DE GANEA ET LOCALISATION

Désignons par \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. Si X et Y sont des *espaces* et $f: X \rightarrow Y$ une application, nous notons $X_{(p)}$ le p -localisé de X , $X_{(0)}$ son rationalisé, et $f_{(p)}: X_{(p)} \rightarrow Y_{(p)}$ la p -localisation de f .

Pour tout espace X , Ganea [Gan60] construit par récurrence une suite de fibrations

$$F_n X \xrightarrow{j_n} G_n X \xrightarrow{g_n} X:$$

- $F_0 X \longrightarrow G_0 X \longrightarrow X$ est la fibration des chemins $\Omega X \longrightarrow PX \longrightarrow X$,

– si la fibration $F_{n-1} X \xrightarrow{j_{n-1}} G_{n-1} X \xrightarrow{g_{n-1}} X$ est donnée, on considère l'application $g'_n: G_{n-1} X \cup_{j_{n-1}} C F_{n-1} \rightarrow X$ obtenue à partir de g_{n-1} , en envoyant le cône $C F_{n-1}$ sur le point de base de X . L'application $g_n: G_n X \rightarrow X$ est la fibration associée à g'_n . Nous notons i_{n-1}^n l'application composée: $G_{n-1}(X) \hookrightarrow G_{n-1} X \cup_{j_{n-1}} C F_{n-1} \xrightarrow{\cong} G_n X$.

Nous considérons également le *fat wedge* de X défini par:

$$T^n X = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in X^{n+1} \mid \text{il existe } i \text{ avec } x_i = *\}.$$

Définition 1 ([Gan60], [Whi78]). La *LS-catégorie de X* , $\text{cat}(X)$, est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

- 1) la fibration $g_n: G_n X \rightarrow X$ admet une section;
- 2) l'application diagonale $\Delta_n: X \rightarrow X^{n+1}$ se factorise, à homotopie près, à travers $T^n X$.

Explicitons la question (Q_2) dans le contexte des fibrations de Ganea:

– La donnée d’une section $\sigma : X \rightarrow G_n X$ de g_n , implique celle d’une famille de sections $\{\sigma_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$ de $\{g_n(X_{(p)}): G_n(X_{(p)}) \simeq (G_n X)_{(p)} \rightarrow X_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$.

– Réciproquement, la donnée d’une famille de sections $\{\sigma_p \mid p \in \mathcal{P}\}$ de la famille de fibrations $\{g_n(X_{(p)}): G_n(X_{(p)}) \simeq (G_n X)_{(p)} \rightarrow X_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$ ne permet pas de construire une section de g_n . Il faut pour cela avoir une compatibilité rationnelle des sections:

si $(\sigma_p)_{(0)} \simeq (\sigma_q)_{(0)}$ pour tout couple de nombres premiers (p, q) , alors il existe une section σ de g_n ayant pour p -localisé σ_p pour tout $p \in \mathcal{P}$, [Cor95].

Remarquons qu’un CW-complexe à deux cellules, non contractile, est de catégorie 1 ou 2. La propriété d’être de catégorie 1 étant générique [McG94], on en déduit immédiatement:

Proposition 2. *Dans la catégorie des espaces ayant le type d’homotopie d’un CW-complexe à deux cellules, la LS-catégorie est générique.*

2. GÉNÉRICITÉ DE BORNES INFÉRIEURES DE LA CATÉGORIE

W. J. Gilbert démontre l’équivalence entre les deux conditions de la Définition 1 en faisant apparaître $G_n X$ comme un produit fibré homotopique de $T^n(X) \hookrightarrow X^{n+1} \leftarrow X$. Complétons ce produit fibré homotopique en explicitant les cofibres:

$$\begin{array}{ccc}
 G_n X & \longrightarrow & T^n X \\
 g_n \downarrow & & \downarrow j_n \\
 X & \xrightarrow{\Delta_n} & X^{n+1} \\
 \rho_n \downarrow & & \downarrow q_{n+1} \\
 \mathcal{C}_n X & \xrightarrow{c_n} & X^{[n+1]}
 \end{array}$$

$\mathcal{C}_n X$ (resp. $X^{[n+1]}$) est la cofibre de g_n (resp. j_n); $\overline{\Delta}_n := q_{n+1} \circ \Delta_n$ est la diagonale réduite.

Définition 3. Soit X un espace.

1) La catégorie faible de X , $wcat(X)$, est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel la diagonale réduite $\overline{\Delta}_n$ est homotopiquement triviale, [BH60].

2) La σ^i -catégorie de X , $\sigma^i cat(X)$, est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que l’application $\Sigma^{i-1} X \xrightarrow{\Sigma^{i-1} \rho_n} \Sigma^{i-1} \mathcal{C}_n X$ soit homotopiquement triviale, [Van00].

3) La strict category weight de X , $cat(X)$, est la borne inférieure des $\sigma^i cat X$, pour $i \in \mathbb{N}$, [Rud99], [Str99].

Soit Υ l’un des trois invariants mentionnés ci-dessus:

Théorème 1. *Soit X un espace tel que $\Upsilon(X_{(p)}) \leq n$, pour tout nombre premier p , alors on a: $\Upsilon(X) \leq n$.*

Démonstration. Pour 1) et 2), notons Ψ l’application intervenant dans la définition de Υ . Le résultat découle de [HMR75, Théorème 5.6]:

$$\Psi \simeq * \text{ ssi } \Psi_{(p)} \simeq *, \text{ pour tout nombre premier } p,$$

et du fait que: $(G_n X)_{(p)} \simeq G_n(X_{(p)})$, $(T^n X)_{(p)} \simeq T^n(X_{(p)})$. La propriété 3) est une conséquence de 2). □

On en déduit directement:

Corollaire 4. *Les invariants homotopiques Υ sont génériques, i.e.: si $Y \in \mathcal{G}(X)$ alors $\Upsilon(X) = \Upsilon(Y)$.*

3. LS-CATÉGORIE D'UN H -ESPACE RATIONNEL

Théorème 2. *Si X est un espace ayant le type d'homotopie rationnelle d'un produit de sphères impaires, on a:*

- 1) $\max\{\text{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} \leq \text{cat}(X) \leq \max\{\text{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} + 1.$
- 2) $Y \in \mathcal{G}(X) \Rightarrow \text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X) + 1.$

Le résultat provient d'une étude des sections des fibrations de Ganea rationalisées:

Proposition 5. *Soit $T = S^{n_1} \times \dots \times S^{n_r}$ un produit de sphères rationnelles de degré impair et soit $k \geq r$. Deux sections σ et τ de la fibration de Ganea $g_k : G_k T \rightarrow T$ vérifient $i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq i_k^{k+1} \circ \tau$, où $i_k^{k+1} : G_k T \rightarrow G_{k+1} T$ est l'application définie dans la Section 1.*

Démonstration. Nous utilisons le modèle minimal de Sullivan pour déterminer la catégorie d'un espace rationnel, renvoyant le lecteur à [FH82], [Fél89], [FHT01].

Soit $(\Lambda V, d)$ le modèle minimal de T et soit Z_j un espace rationnel du même type d'homotopie que l'adgc (pour algèbre différentielle graduée commutative) $(\Lambda V / \Lambda^{>j} V, \bar{d})$. D'après Y. Félix [Fél89, Théorème 4.1.1, Théorème 4.1.2], on a un diagramme commutatif à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc}
 G_j T & \xrightarrow{i_j^{j+1}} & G_{j+1} T \\
 \psi_j \downarrow & & \downarrow \psi_{j+1} \\
 Z_j \vee (\bigvee_{\alpha \in I_j} S^\alpha) & \xrightarrow{\rho_j} & Z_{j+1} \vee (\bigvee_{\alpha \in I_{j+1}} S^\alpha) \\
 p_j \downarrow & & \downarrow p_{j+1} \\
 T & \xlongequal{\quad} & T
 \end{array}$$

où les flèches ψ_j sont des équivalences faibles et la composée $p_j \circ \psi_j$ est homotope à la fibration de Ganea g_j . L'application ρ_j est définie par:

- sa restriction à Z_j a pour modèle la surjection canonique

$$(\Lambda V / \Lambda^{>j+1} V, \bar{d}) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>j} V, \bar{d});$$

- sa restriction au bouquet de sphères est l'application constante sur le point de base.

L'application p_j est définie par:

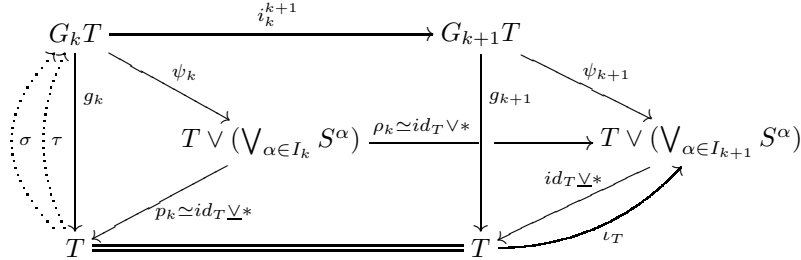
- sa restriction à Z_j a pour modèle la surjection canonique

$$(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>j+1} V, \bar{d});$$

- sa restriction au bouquet de sphères est l'application constante.

Si $k \geq r$, on constate que $\Lambda V / \Lambda^{>k} V = \Lambda V$ donc T et Z_k ont même type d'homotopie et la composée: $G_k T \xrightarrow{\psi_k} T \vee (\bigvee_{\alpha \in I_k} S^\alpha) \xrightarrow{id_T \vee * } T$ est homotope

à g_k . Le diagramme ci-dessus devient le diagramme homotopiquement commutatif suivant, dans lequel nous considérons l'inclusion canonique $\iota_T : T \rightarrow T \vee (\bigvee_{\alpha \in I_{k+1}} S^\alpha)$:



Soit σ et τ deux sections de g_k . L'application ρ_k se factorisant à travers p_k , i.e. $\rho_k \simeq \iota_T \circ p_k$, on a: $\psi_{k+1} \circ i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq \iota_T \simeq \psi_{k+1} \circ i_k^{k+1} \circ \tau$. L'application ψ_{k+1} étant une équivalence faible, on en déduit: $i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq i_k^{k+1} \circ \tau$. \square

Démonstration du Théorème 2. Si σ est une section de g_k , alors $\sigma_{(p)}$ est une section de $(g_k)_{(p)}$, d'où $\text{cat}(X_{(p)}) \leq \text{cat}(X)$ pour tout p . La première inégalité, due à Toomer [Too75], est donc redémontrée.

Pour la deuxième inégalité, notons $n_p = \text{cat}(X_{(p)})$ et choisissons une section arbitraire de $(g_{n_p})_{(p)}$, $\sigma_{n_p} : X_{(p)} \rightarrow G_{n_p} X_{(p)}$ pour chaque nombre premier p . La catégorie de X étant finie, la borne supérieure des nombres $\text{cat}(X_{(p)})$, p premier, est atteinte pour un nombre l premier.

Définissons $\phi^p : G_{n_p} X \rightarrow G_{n_l} X$ par:

$$\begin{cases} i_{n_l-1}^{n_l} \circ \dots \circ i_{n_p}^{n_p+1} : G_{n_p} X \rightarrow G_{n_l} X & \text{si } n_l \neq n_p, \\ id_{G_{n_l} X} & \text{si } n_l = n_p. \end{cases}$$

Pour tout nombre premier p , on construit une section de $(g_{n_l+1})_{(p)} : G_{n_l+1} X_{(p)} \rightarrow X_{(p)}$ par $\overline{\sigma}_p := (i_{n_l+1}^{n_l+1})_{(p)} \circ (\phi^p)_{(p)} \circ \sigma_{n_p} : X_{(p)} \rightarrow G_{n_l+1} X_{(p)}$. La proposition précédente implique $(\overline{\sigma}_p)_{(0)} \simeq (\overline{\sigma}_q)_{(0)}$ pour tout couple (p, q) de nombres premiers. La condition de compatibilité rationnelle est vérifiée, donc: $\text{cat}(X) \leq \max\{\text{cat}(X_{(p)}) \mid p \in \mathcal{P}\} + 1$.

Comme on l'a déjà remarqué, la propriété 2) est une conséquence de 1). \square

Nous terminons cette section par deux exemples; chacun d'eux utilise les modèles de Quillen en algèbres de Lie différentielles graduées (ldg); nous renvoyons le lecteur à [Tan83], [FHT01] pour leurs définition et principales propriétés. Rappelons que le modèle de Quillen d'un espace X est de la forme $(\mathbb{L}(V), d)$, où:

- $\mathbb{L}(V)$ est l'algèbre de Lie libre sur l'espace vectoriel gradué V ;
- L'espace vectoriel gradué V_* est isomorphe à $H_{*+1}(X; \mathbb{Q})$;
- La différentielle d est décomposable; c'est-à-dire que $d(v)$ est une combinaison linéaire de crochets. Une fois fixé un isomorphisme entre éléments de V et cellules, la différentielle $d(v)$ est l'application d'attachement de la cellule v ;
- $H_*(\mathbb{L}(V), d)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ munie du crochet de Samelson.

Commençons par un exemple établissant que la méthode utilisée pour les H_0 -espaces ne se généralise pas au cas d'un espace quelconque. En effet, le point clé de la preuve du Théorème 2 est le fait suivant: dans le cas d'un produit T de sphères

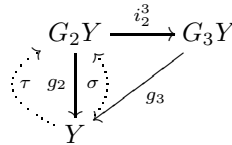
rationnelles de degré impair, si σ et τ sont deux sections de $g_k : G_k T \rightarrow T$, on a : $i_k^{k+1} \circ \sigma \simeq i_k^{k+1} \circ \tau$. Cette propriété n'est pas vraie en général :

Exemple 6. Notons Y la cofibre homotopique de l'application :

$$S^3 \vee S^6 \xrightarrow{\eta + [\iota_2, \iota_5]} S^2 \vee S^5,$$

où η est l'application de Hopf et $[\iota_2, \iota_5]$ le crochet de Whitehead des classes fondamentales de S^2 et S^5 . Cette cofibre peut aussi se décrire par : $Y = \mathbb{C}P^2 \cup_{S^2} (S^2 \times S^5)$. L'espace Y étant un 2-cône, on a : $\text{cat}(Y) \leq 2$. La fibration de Ganea g_2 admet deux sections rationnelles $\sigma : Y_{\mathbb{Q}} \rightarrow G_2 Y_{\mathbb{Q}}$, $\tau : Y_{\mathbb{Q}} \rightarrow G_2 Y_{\mathbb{Q}}$ telles que $i_2^3 \circ \sigma$ et $i_2^3 \circ \tau$ ne soient pas homotopes.

Démonstration. Déterminons les modèles de Quillen des applications figurant dans le diagramme suivant :



- La décomposition cellulaire donne le modèle de Quillen de Y : c'est une l'dg, $(\mathbb{L}(V), d)$, où l'espace vectoriel rationnel V est engendré par les éléments (x_1, x_3, x_4, x_6) , x_i de degré i , de différentielle : $dx_1 = dx_4 = 0$, $dx_3 = [x_1, x_1]$, $dx_6 = [x_1, x_4]$.

- Nous utilisons l'existence d'une section $\sigma : Y \rightarrow G_2 Y$ de g_2 pour construire le modèle de Quillen de $G_2 Y$ comme une KQ-extension [Tan83] de $(\mathbb{L}(V), d)$, c'est-à-dire : le modèle de σ est construit comme un monomorphisme canonique de l'dg $(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta)$.

Pour connaître W en bas degré, remarquons que la fibre de g_2 a le type d'homotopie du joint itéré $*^3 \Omega Y$; son 7-squelette est donc une sphère S^5 . En utilisant la suite spectrale de Serre de la fibration associée à g_2 , on constate :

$$H_5(G_2 Y; \mathbb{Q}) \cong H_5(Y; \mathbb{Q}) \oplus H_5(*^3 \Omega Y; \mathbb{Q}).$$

L'espace vectoriel W_4 , isomorphe à $H_5(*^3 \Omega Y; \mathbb{Q})$, est donc de dimension 1 ; on note b_4 une base de W_4 correspondant à la sphère S^5 de $*^3 \Omega Y$. C'est un élément sphérique, donc de différentielle nulle : $\delta(b_4) = 0$.

Remarquons maintenant que l'espace vectoriel des cycles du modèle de $G_2 Y$ en dimension 5 contient $[x_1, b_4]$. Le groupe d'homotopie :

$$\pi_5(\Omega(G_2 Y)) \otimes \mathbb{Q} \cong (\pi_5(\Omega(Y)) \otimes \mathbb{Q}) \oplus (\pi_5(\Omega(*^3 \Omega Y)) \otimes \mathbb{Q})$$

étant nul, il existe un élément b_6 dans W tel que $\delta(b_6) = [x_1, b_4]$.

- Construisons maintenant le modèle de Quillen de $G_3 Y$ comme cofibre homotopique de $*^3 \Omega Y \rightarrow G_2 Y$. En dimension inférieure à 7, l'homologie de $*^3 \Omega Y$ est réduite à celle d'une sphère S^5 dont la classe fondamentale correspond à b_4 . La construction classique d'une cofibre en modèle de Quillen donne pour modèle de $G_3 Y$ une l'dg $(\mathbb{L}(U), \bar{\delta})$ telle que :

en degrés inférieurs à 7, U admet comme base $(x_1, x_3, x_4, x_6, b_6)$ avec la différentielle $\bar{\delta}(x_1) = \bar{\delta}(x_4) = \bar{\delta}(b_6) = 0$, $\bar{\delta}(x_3) = [x_1, x_1]$, $\bar{\delta}(x_6) = [x_1, x_4]$.

• Nous construisons deux sections de g_2 en les définissant au niveau des modèles par:

σ est l'injection canonique $(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta)$;
 $\tau(x_1) = x_1, \tau(x_3) = x_3, \tau(x_4) = x_4 + b_4, \tau(x_6) = x_6 + b_6$.

• Pour conclure, il suffit de remarquer que les applications $i_2^3 \circ \sigma$ et $i_2^3 \circ \tau$, de $(\mathbb{L}(V), d)$ dans $(\mathbb{L}(U), \bar{\delta})$ ne sont pas homotopes car elles ne coïncident pas en homologie:

$$(i_2^3 \circ \sigma)(x_6) = x_6 \neq x_6 + b_6 = (i_2^3 \circ \tau)(x_6).$$

□

Terminons par un exemple exhibant plusieurs classes d'homotopie de sections aux fibrations de Ganea d'un espace rationnel T égal à un produit de sphères impaires. Ceci justifie la composition avec i_k^{k+1} utilisée dans la preuve du Théorème 2.

Exemple 7. Il existe au moins deux classes d'homotopie de sections à la fibration de Ganea g_2 de l'espace rationnel T égal au rationalisé de $S^3 \times S^5$.

Démonstration. Comme précédemment, la preuve se situe au niveau des modèles de Quillen.

• Dans le modèle de Quillen de T , $(\mathbb{L}(V), d)$, l'espace vectoriel V admet pour base (x_2, x_4, x_7) , avec x_i de degré i et $d(x_2) = d(x_4) = 0, d(x_7) = [x_2, x_4]$.

• Avec un argument similaire à celui utilisé dans l'Exemple 6, on construit le modèle de Quillen de G_2T à partir d'un monomorphisme

$$(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta).$$

L'espace vectoriel W n'a pas de générateurs en degrés inférieurs strictement à 7 et W_7 admet pour base un élément b_7 à différentielle nulle.

• Deux sections de $g_2: G_2T \rightarrow T$ sont définies par:
 σ est l'injection canonique $(\mathbb{L}(V), d) \hookrightarrow (\mathbb{L}(V \oplus W), \delta)$;
 $\tau(x_2) = x_2, \tau(x_4) = x_4, \tau(x_7) = x_7 + b_7$.

Elles ne sont pas homotopes car elles ne coïncident pas en homologie. □

4. H-ESPACES DE RANG DEUX

Exemple 8. La LS-catégorie est générique pour les H -espaces de rang deux.

Démonstration. Les résultats sur les H -espaces de rang 2 utilisés dans cette démonstration proviennent de [MNT73].

• Les H -espaces de rang deux ayant un type différent de $(3, 7)$ et $(3, 11)$ ayant un genre trivial, il suffit d'étudier ces deux cas.

• Les H -espaces de type $(3, 7)$ sont classifiés par $\{E_k \mid k = 0, 1, 3, 4, 5\}$, où E_k est le S^3 - fibré principal de base S^7 et d'application classifiante $kw \in \pi_7(BS^3) = \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, avec ω l'élément de Blakers-Massey. L'espace E_k étant un fibré en sphère de base une sphère, il admet une décomposition cellulaire avec 3 cellules: $E_k = S^3 \cup_{kw} e^7 \cup e^{10}$. Il vérifie donc $\text{cat}(E_k) \leq 3$. Décrivons le genre des E_k :

– Le genre de E_k est trivial pour $k \in \{0, 3, 4\}$.

– Les espaces $E_1 = Sp(2)$ et E_5 ont même genre. Dans [Sch65], Schweitzer montre que $\text{wcat}(Sp(2)) = \text{cat}(Sp(2)) = 3$. Le Définition 1 implique: $3 = \text{cat}(Sp(2)) = \text{wcat}(Sp(2)) = \text{wcat}(E_5) \leq \text{cat}(E_5) \leq 3$.

• Les H -espaces de type $(3, 11)$ sont classifiés par $\{X_k \mid k \in \mathbb{Z}, -2 \leq k \leq 5\}$. L'espace X_0 est le groupe de Lie exceptionnel \mathbb{G}_2 , qui peut-être vu comme l'espace

total d'un S^3 -fibré principal, de base la variété de Stiefel $V_{7,2} = S^5 \cup e^6 \cup e^{11}$; notons $\beta \in [V_{7,2}, BS^3]$ son application classifiante.

La variété de Stiefel est la cofibre d'une application $S^{10} \rightarrow S^5 \cup e^6$; notons $c: V_{7,2} \rightarrow V_{7,2} \vee S^{11}$ la co-opération de Puppe de cette cofibration. Les espaces X_k sont les S^3 -fibrés principaux d'application classifiante:

$$V_{7,2} \xrightarrow{c} V_{7,2} \vee S^{11} \xrightarrow{\beta \vee k\alpha} BS^3$$

où α est le générateur de $\pi_{11}(BS^3) = \pi_{10}(S^3) = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Décrivons le genre des espaces X_k :

- Le genre de X_k est trivial pour $k = -2$ et $k = 3$;
- $\mathcal{G}(X_1) = \{X_1, X_4\}$;
- $\mathcal{G}(\mathbb{G}_2) = \{X_{-1}, \mathbb{G}_2, X_2, X_5\}$.

Nous allons maintenant montrer que $\text{cat}(X_k) = 4$ pour tout k , $-2 \leq k \leq 5$, ce qui terminera la preuve. Nous rappelons que tous les espaces X_k admettent la décomposition cellulaire suivante : $X_k = S^3 \cup e^5 \cup e^6 \cup e^8 \cup e^9 \cup e^{11} \cup e^{14}$.

D'une part, la LS-catégorie d'un espace X est majorée par le quotient $\dim(X)/(r+1)$, où r est la connectivité de X . Dans notre cas, on a: $\text{cat}(X_k) \leq 4$.

D'autre part, la LS-catégorie est minorée par la longueur maximale du cup-produit de l'algèbre de cohomologie. Ici, cette longueur vaut 4, comme le montre l'isomorphisme: $\tilde{H}^*(X_k; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x_3]/[x_3^4] \otimes \Lambda(x_5)$ [MNT73, Théorème 2.1]. On a donc $\text{cat}(X_k) = 4$ comme annoncé. \square

REMERCIEMENTS

Je remercie Daniel Tanré pour l'attention qu'il a portée à ce travail, et pour son aide lors de la rédaction. Je remercie également Yves Félix qui m'a signalé l'Exemple 6.

REFERENCES

- [BH60] I. Bernstein and P. J. Hilton, *Category and generalized Hopf invariants*, Illinois J. Math. **4** (1960), 437–451. MR **23**:A3572
- [Cor95] O. Cornea, *Lusternik-Schnirelmann categorical sections*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **28** (1995), 689–704. MR **96h**:55008
- [Fél89] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle*, Astérisque, vol. 176, Soc. Math. France, 1989. MR **91c**:55016
- [FH82] Y. Félix and S. Halperin, *Rational LS-category and its applications*, Trans. Am. Math. Soc. **273** (1982), 1–37. MR **84h**:55011
- [FHT01] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer-Verlag, New York, 2001. CMP 2001:06
- [Gan60] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and cocategory*, Proc. London Math. Soc. **10** (1960), 623–639. MR **23**:A3574
- [HMR75] P. Hilton, G. Mislin, and J. Roitberg, *Localization of nilpotent groups and spaces*, Notas de Matemática, vol. 15, North Holland, New York, 1975. MR **57**:17635
- [Mar80] Howard J. Marcum, *Fibrations over double mapping cylinders*, Illinois J. Math. **24** (1980), 344–358. MR **81j**:55011
- [McG94] Charles A. McGibbon, *The Mislin genus of a space*, The Hilton Symposium 1993 (Montreal, PQ), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 75–102. MR **96a**:55018
- [MNT73] M. Mimura, G. Nishida, and H. Toda, *On the classification of H-spaces of rank two*, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 611–627. MR **48**:12514
- [Roi00] J. Roitberg, *The Lusternik-Schnirelmann category of certain infinite CW-complexes*, Topology **39** (2000), 95–101. MR **2000g**:55012
- [Rud99] Y.B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37–55. MR **99f**:55007

- [Sch65] P. Schweitzer, *Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping*, *Topology* **3** (1965), 337–355. MR **32**:451
- [Str99] J. A. Strom, *Essential category weight*, Preprint, 1999.
- [Tan83] D. Tanré, *Homotopie Rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes Series, vol. 1025, Springer-Verlag, 1983. MR **86b**:55010
- [Too75] G.H. Toomer, *Topological localization, category and cocategory*, *Can. J. Math.* **27** (1975), 319–322. MR **51**:6798
- [Van00] L. Vandembroucq, *Suspension of Ganea fibrations and a Hopf invariant*, *Topology and Its Applns.* **105** (2000), 187–200. MR **2001c**:55002
- [Whi78] G.W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 61, Springer-Verlag, New York, 1978. MR **80b**:55001

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES, U.M.R. 8524, UNIVERSITÉ DE LILLE 1, 59655 VILLENEUVE D'ASCQ
CEDEX, FRANCE – AND – DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE
DE LAUSANNE, CH-1015 LAUSANNE, SWITZERLAND

E-mail address: `costoya@gat.univ-lille1.fr`

E-mail address: `costoya@masg1.epfl.ch`