PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 132, Number 8, Pages 2421–2428
S 0002-9939(04)07352-6
Article electronically published on March 3, 2004

DOMAINE NUMÉRIQUE DU PRODUIT ET DE LA BIMULTIPLICATION $M_{2,A,B}$

MOHAMED CHRAIBI KAADOUD

(Communicated by Joseph A. Ball)

Abstract. In this paper, we present an extension of Bouldin's result (1970) concerning the numerical range $W(AB)$ of the product of two operators A and B that are commuting and for which one of the set $W(A)$ or $W(B)$ consists of positive numbers. We also prove that if A or B is a subnormal operator on a separable Hilbert space, then

$$\overline{W(M_{2,A,B})} = \overline{co\,[W(A)W(B)]},$$

where $M_{2,A,B}$ is the operator bimultiplication and co is the convex hull.

Résumé. Dans ce travail, nous améliorons un résultat de Bouldin (1970) concernant la localisation de $W(AB)$, le domaine numérique du produit de deux opérateurs A et B sur un espace de Hilbert lorsque A et B commutent et $W(A)$ est constitué de réels strictement positifs. Dans le cas où A ou B est un opérateur sous normal sur un espace de Hilbert séparable, nous montrons que

$$\overline{W(M_{2,A,B})} = \overline{co\,[W(A)W(B)]},$$

où $M_{2,A,B}$ est l'opérateur produit ou bimultiplication et co est l'enveloppe convexe.

1. Introduction

Soient $B(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe H et A un élément de $B(H)$. Une extension naturelle en dimension finie et infinie des formes quadratiques est celle du domaine numérique

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle\,,\ x \in H,\ \ \|x\| = 1\}\,,$$

qui est un convexe borné du plan complexe $\mathbb{C}$, voir [12]. Il permet de localiser le spectre $\sigma(A)$, puisque l'enveloppe convexe $co\sigma(A)$ de $\sigma(A)$ est toujours contenue dans $\overline{W(A)}$, voir [9], théorème 1.2-1. L'inclusion précédente devient une égalité (voir [9], théorème 6.2-5) si et seulement si $w(A-\lambda I) = \rho(A-\lambda I)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, où I est l'opérateur identité, $\rho(A-\lambda I)$ est le rayon spectral de $A-\lambda I$ et $w(A-\lambda I)$ est le rayon numérique de $A-\lambda I$, c'est à dire

$$w(A-\lambda I) = \sup\{|z|\,,\ z \in W(A-\lambda I)\}\,.$$

Received by the editors June 19, 2002 and, in revised form, May 16, 2003.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47A12.
Key words and phrases. Domaine numérique, bimultiplication.

En 1932, Marshall Stone a considéré le nom "*domaine numérique*" pour $W(T)$, Toeplitz et Hausdorff l'ont appellé "*Wertvorrat" d'une forme bilinéaire* et d'autres ont choisi "*le domaine de Hausdorff"*.

Les opérateurs élémentaires étaient nommés et étudiés par Lumer et Rosemblum [13]. Pour A, B deux éléments de $B(H)$, la bimultiplication $M_{2,A,B}$ est définie sur l'espace de Hilbert-Schmidt $C_2(H)$ par

$$M_{2,A,B}(X) = L_{2,A}R_{2,B}(X) = AXB, \quad \forall X \in C_2(H),$$

avec $L_{2,A}(X) = AX$ et $R_{2,B}(X) = XB$. L'espace de Hilbert-Schmidt est muni du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle_2 = tr\,(XY^*) \text{ pour } X, Y \in C_2\,(H)\,,$$

où tr désigne la trace. On rappel que pour $X \in C_1\,(H)$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système maximal de vecteurs orthonormés de H, $tr(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle Xx_i, x_i \rangle$. Cette expression est indépendante du choix du système maximal de H (voir [14], III, lemme 1). Le domaine numérique de $M_{2,A,B}$ est

$$W(M_{2,A,B}) = \{tr(AXBX^*),\ \ \|X\|_2 = 1\}\,.$$

En ce qui concerne le domaine numérique du produit AB, l'information intéréssante dans cette question est dûe à Bouldin [3] en 1970, qui a prouvé que si A et B commutent et A est positif (c'est à dire $W(A)$ est contenu dans la demi-droite des réels positifs), alors $W(AB) \subset W(A)W(B)$. Nous généralisons ce résultat dans le paragraphe suivant lorsque A et B commutent et $W(A)$ est contenu dans la demi-droite des réels strictement positifs en montrant que $W(AB) \subset J(A^{-1}, B)$ où

$$J(A^{-1}, B) = \left\{ \frac{\langle Bx, x \rangle}{\langle A^{-1}x, x \rangle},\ x \in H,\ \ \|x\| = 1 \right\}.$$

Cet encadrement est optimal, comme le montre le cas où $B = A^{-1}$.

Dans le théorème 4, pour A et B quelconques dans $B(H)$, nous montrons que $W(AB)$ est l'ensemble des quantités

$$\langle Ax, x \rangle \langle Bx, x \rangle + \langle Ay, x \rangle \langle Bx, y \rangle\,,$$

avec $Bx \in vect(x, y)$, $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\langle x, y \rangle = 0$. Il s'en suit que

$$W(AB) \subset W(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)}, \tag{1}$$

$$W(M_{2,A,B}) \subset W(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)} \tag{2}$$

et que

$$w(AB) \le w(A)w(B) + d(A)d(B) \tag{3}$$

avec

$$S(A) = \{\langle Ax, y \rangle\,, \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \langle x, y \rangle = 0\},$$

qui n'est autre que le disque de centre l'origine et de rayon $d(A) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|A - \lambda\|$, voir [5], lemme 7.

Holbrook (voir [11] et [4]) a prouvé que si A et B commutent, alors

$$w(AB) \le 2w(A)w(B), \tag{4}$$

et si A et B double commutent, c'est à dire A commute avec B et B^*, alors

$$w(AB) \le w(A)\,\|B\|\,. \tag{5}$$

Si A ou B est l'identité, alors (1) , (2) et (3) deviennent des égalités. Nous montrons que dans certains cas, et sans supposer que A et B double commutent ni commutent que l'inégalité (3) est mieux que (4) , et dans d'autres, (3) est mieux que (5).

La détermination de $W(M_{2,A,B})$ est une question qui était posée en 1991 par L. Fialkow dans [7]. Les deux résultats les plus importants dans cette question sont dû à Chraibi [5], théorème 9 et à Gustafson et Rao [9], théorème 5.4-3. Le premier affirme que pour A et B quelconques dans $B(H)$, on a

$$W(M_{2,A,B}) \subset coW(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)}. \tag{6}$$

Le second a démontré que dans le cas où H est de dimension finie et A ou B est normal, nous avons

$$W(A \otimes B) = coW(A)W(B). \tag{7}$$

La détermination de $W(M_{2,A,B})$ et de $W(AB)$ dans le cas général où A et B sont quelconques n'est pas encore réalisée.

Il est clair que l'inclusion (2) est une amélioration de (6). Dans le paragraphe 3, nous généralisons (7) en montrant que si H est séparable et A est sous normal (voir définition plus loin), alors

$$\overline{W(M_{2,A,B})} = \overline{co\,[W(A)W(B)]}.$$

2. Domaine numérique du produit

En ce qui concerne le domaine numérique du produit AB, nous établissons les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Soient A et B deux éléments de $B(H)$ tels que $AB = BA$ et $\overline{W(A)} \subset]0, +\infty[$. Alors*

$$W(AB) \subset J(A^{-1}, B).$$

Preuve. Puisque $co\sigma(A) = \overline{W(A)}$ qui ne contient pas 0, alors A est inversible. Par le résultat de Bouldin déjà énoncé, nous avons

$$W(A\left[B - aA^{-1}\right]) \subset W(A)W(B - aA^{-1}).$$

Soit $a \in W(AB)$. Alors

$$0 \in W(AB - aI) = W(A\left[B - aA^{-1}\right]) \subset W(A)W(B - aA^{-1}).$$

Donc $0 \in W(B - aA^{-1})$, d'où il existe $x \in H$, $\|x\| = 1$ et $\left\langle B - aA^{-1}x, x\right\rangle = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2. Le résultat du théorème précédent généralise celui de Bouldin puisque $J(A^{-1}, B) \subset W(A)W(B)$. Cette inclusion peut être stricte comme le montre le cas trivial où $B = A^{-1}$.

Théorème 3. *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a*

$$W(A)W(B) = J(L_{A^{-1}}, R_B).$$

Preuve. Les opérateurs L_A, R_B commutent entre eux et $M_{2,A,B} = L_A R_B$; alors par le théorème précédent nous avons

$$W(M_{2,A,B}) \subset J(L_{A^{-1}}, R_B) \subset W(R_B)W(L_A).$$

Par [5], théorème 13, on a $W(L_A) = W(A)$ et $W(R_B) = W(B)$. Pour l'inclusion inverse, pour tous vecteurs x, y normés de H, nous avons $x \otimes y$ est unitaire dans $C_2(H)$ et

$$\langle Ax, x\rangle \langle By, y\rangle = \langle M_{2,A,B} x \otimes y, x \otimes y\rangle .$$

Par suite $W(A)W(B) \subset W(M_{2,A,B}) \subset J(L_{A^{-1}}, R_B)$. Ceci termine la preuve. □

Les théorèmes suivants sont valables pour A et B quelconques dans $B(H)$.

Théorème 4. *Pour A, $B \in B(H)$, nous avons $W(AB)$ est l'ensemble des quantités*

$$\langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle + \langle Ay, x\rangle \langle Bx, y\rangle ,$$

avec $Bx \in vect(x, y)$, $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\langle x, y\rangle = 0$. Si H est de dimension 2, on a

$$W(AB) = \{\langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle + \langle Ay, x\rangle \langle Bx, y\rangle , \ \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \ \langle x, y\rangle = 0\} .$$

Preuve. Soit x unitaire dans H. Alors

$$Bx = \alpha x + \beta y \text{ avec } \langle x, y\rangle = 0, \ \ \|y\| = 1, \ \alpha = \langle Bx, x\rangle \ \text{ et } \beta = \langle Bx, y\rangle ,$$

d'où

$$\langle ABx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle + \langle Ay, x\rangle \langle Bx, y\rangle .$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec

$$z = \langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle + \langle Ay, x\rangle \langle Bx, y\rangle , \ \ \|x\| = \|y\| = 1,$$

et

$$\langle x, y\rangle = 0 \ \text{ et } Bx \in vect(x, y).$$

On a

$$Bx = \alpha x + \beta y \text{ avec } \alpha = \langle Bx, x\rangle \ \text{ et } \beta = \langle Bx, y\rangle ,$$

d'où $z = \langle ABx, x\rangle$. □

Corollaire 5. *Soient A, $B \in B(H)$. Nous avons*

$$W(AB) \subset I_{A,B} + \overline{S(A)S(B)} \subset W(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)}$$

et

$$w(AB) \leq w(A)w(B) + d(A)d(B),$$

avec

$$I_{A,B} = \{\langle Ax, x\rangle \langle Bx, x\rangle , \ \ \|x\| = 1\} .$$

Preuve. Pour l'inégalité il suffit d'utiliser le fait que

$$d(A) = \sup \{|z| , \ z \in S(A)\} ,$$

voir [1]. □

Remarque 6. L'inégalité (3) est meilleure que (4) si

$$d(A) < w(A) \text{ et } d(B) < w(B),$$

même si on ne suppose pas dans (3) que A et B commutent. L'inégalité (3) est meilleure ou équivalente à (4) si par exemple $R_{W(A)} = d(A)$ et $R_{W(B)} = d(B)$. Ces deux égalités sont vérifiées si et seulement si

$$w(A - C_A) = \|A - C_A\| \ \text{ et } w(B - C_B) = \|B - C_B\| ,$$

où C_A et $R_{W(A)}$ désignent respectivement le centre et le rayon du plus petit disque contenant $W(A)$, voir [6], proposition 3.2.1. Dans l'inégalité (3) , on ne suppose pas que A double commute avec B, et elle est dans certains cas meilleure que (5). Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $w(A)w(B) + d(A)d(B) = \frac{n+2}{2}$ et $w(A)\,\|B\| = n+1$. Pour $B = I$ et A quelconque dans $B(H)$, (1), (2) et (3) sont en fait des égalités.

3. Domaine numérique de $M_{2,A,B}$

Nous citons d'abord la définition d'un opérateur sous normal.

Définition 7. Un opérateur $A \in B(H)$ est dit sous normal s'il existe un espace de Hilbert K contenant H et un opérateur N sur K, tel que $N_{/H} = A$, H est invariant par N et N normal, c'est à dire $N^*N = NN^*$.

Les deux lemmes suivants seront utiles pour démontrer le théorème 10.

Lemme 8 ([2])**.** *Soit $A \in B(H)$, A sous normal. Il existe un espace de Hilbert K contenant H et un opérateur normal N sur K, tels que $N_{/H} = A$, $\sigma(N) \subset \sigma(A)$ et une suite d'opérateurs normaux $N_n = U_n^* N U_n$ sur H convergent fortement vers A, avec U_n unitaire de H dans K.*

Lemme 9. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs convergent uniformément vers A. Alors la suite $(\overline{W(A_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff vers $\overline{W(A)}$.*

Preuve. Soient K et S deux fermés de $\mathbb{C}$. Posons

$$e(K,S) = \sup_{u\in K} \inf_{v\in S} |u-v|\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} e(\overline{W(A_n)}, \overline{W(A)}) &\leq \sup_{u\in\overline{W(A_n)}} \inf_{v\in W(A)} |u-v| \\ &= \sup_{u\in W(A_n)} \inf_{v\in W(A)} |u-v| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \inf_{\|y\|=1} \{|\langle A_n x, x\rangle - \langle Ay, y\rangle|\} \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \{|\langle A_n x, x\rangle - \langle Ax, x\rangle|\} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \{|\langle (A_n - A)x, x\rangle|\} \\ &\leq \|A_n - A\|\,. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme, puisque la distance de Hausdorff entre $\overline{W(A_n)}$ et $\overline{W(A)}$ est la plus grande des deux expressions $e(\overline{W(A_n)}, \overline{W(A)})$ et $e(\overline{W(A)}, \overline{W(A_n)})$. □

Théorème 10. *Soient H un espace de Hilbert séparable et $A, B \in B(H)$ avec A ou B sous normal. Alors*

(i) $$\overline{W(M_{2,A,B})} = \overline{co\,[W(A)W(B)]}.$$

Dans le cas où A ou B est diagonal nous avons

(ii) $$W(M_{2,A,B}) = coW(A)W(B).$$

Preuve. Pour tous vecteurs x, y normés de H, nous avons $x \otimes y$ est unitaire dans $C_2(H)$ et

$$\langle Ax, x\rangle \langle By, y\rangle = \langle M_{2,A,B} x \otimes y, x \otimes y\rangle .$$

Par suite $W(A)W(B) \subset W(M_{2,A,B})$, et donc $\overline{co\,[W(A)W(B)]} \subset \overline{W(M_{2,A,B})}$. Pour l'inclusion inverse de (ii), avec A diagonal, il existe une base orthonormée $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de H, telle que

$$\langle Ae_i, e_i\rangle = a_i \quad \text{et} \quad \langle Ae_i, e_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Soit X de norme un dans $C_2(H)$. Puisque $(e_i \otimes e_j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ est une base de $C_2(H)$, alors

$$X = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} b_{i,j} e_i \otimes e_j \quad \text{avec} \quad \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |b_{i,j}|^2 = 1.$$

Nous pouvons vérifier que

$$X = \sum_i \alpha_i e_i \otimes y_i \text{ pour } y_i = \sum_j \beta_{i,j} e_j,\ \beta_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{\alpha_i} \text{ et } \alpha_i = \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_{i,k}|^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

que l'on supposera non nulle dans cette démonstration. On a $|y_i| = 1$, $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ et

$$\begin{aligned}\langle M_{2,A,B}X, X\rangle &= tr(AXBX^*) = tr(\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_i\alpha_j Ae_i \otimes y_i.By_j \otimes e_j)\\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_i\alpha_j tr(Ae_i \otimes (e_j \otimes y_j B^*)y_i).\end{aligned}$$

Par le lemme 2 de la partie I et le lemme 9 de la partie III dans [14], on a

$$tr(Ae_i \otimes (e_j \otimes y_j B^*)y_i) = \langle Ae_i, e_j \otimes y_j(B^* y_i)\rangle ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle M_{2,A,B}X, X\rangle &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_i\alpha_j \langle Ae_i, e_j \otimes y_j(B^*y_i)\rangle\\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_i\alpha_j \langle Ae_i, \langle By_j, y_i\rangle e_j\rangle\\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \alpha_i\alpha_j \langle Ae_i, e_j\rangle \langle By_j, y_i\rangle\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i^2 a_i \langle By_i, y_i\rangle .\end{aligned}$$

Cette dérnière expression est un élément de $co\,[W(A)W(B)]$, puisque $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ (voir [5]), théorème 5), d'où nous avons l'égalité $(ii$

Pour l'inclusion inverse de (i), on va la traiter d'abord pour A normal, puis pour A sous-normal.

Si A est normal, comme c'est connu dans la théorie spectrale, voir [8], A est limite uniforme d'une suite d'opérateurs diagonaux $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On peut vérifier que $(M_{2,D_i,B})_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $M_{2,A,B}$, et par le lemme 9 nous avons l'égalité (i).

Enfin, si A est sous-normal, $\overline{W(N)} = co\sigma(N)$, voir [10], problème 172. Soit X_K un élément de $C_2(H)$, de norme un et de rang fini. $X_k = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_{i,k} x_{i,k} \otimes y_{i,k}$ avec

$(x_{i,k})$ et $(y_{i,k})$ deux suites de vecteurs orthonormés de H. Comme précédemment, nous avons

$$\langle M_{2,A,B}X_k, X_k\rangle = \sum_{i,j=1}^{i,j=m} \lambda_{i,k}\lambda_{j,k} \langle Ax_{i,k}, x_{j,k}\rangle \langle By_{j,k}, y_{i,k}\rangle .$$

Il suit du lemme 8 et de sa notation que

$$\begin{aligned} \langle M_{2,A,B}X_k, X_k\rangle &= \sum_{i,j=1}^{i,j=m} \lambda_{i,k}\lambda_{j,k} \left\langle \lim_n N_n x_{i,k}, x_{j,k}\right\rangle \langle By_{j,k}, y_{i,k}\rangle \\ &= \lim_n \sum_{i,j=1}^{i,j=m} \lambda_{i,k}\lambda_{j,k} \langle N_n x_{i,k}, x_{j,k}\rangle \langle By_{j,k}, y_{i,k}\rangle \\ &= \lim_n \langle M_{2,N_n,B}X_k, X_k\rangle . \end{aligned}$$

La normalité des N_n montre que $\langle M_{2,N_n,B}X, X\rangle$ est dans $\overline{co\,[W(N_n)W(B)]}$. Puisque

$$\overline{W(N_n)} \subset \overline{W(N)} = co\sigma(N) \subset co\sigma(A) = \overline{W(A)},$$

alors $\langle M_{2,A,B}X, X\rangle$ est dans $\overline{co\,[W(A)W(B)]}$.

Si X est un élément quelconque de norme un dans $C_2(H)$, d'après [14], II, théorème 3, $X = \lim_{k\in\mathbb{N}} X_k$ avec X_k de rang fini. On peut prendre les X_k de norme un dans $C_2(H)$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle M_{2,A,B}X, X\rangle &= \left\langle M_{2,A,B} \lim_k X_k, \lim_j X_j \right\rangle \\ &= \lim_{k,j} \langle M_{2,A,B}X_k, X_j\rangle \in \overline{co\,[W(A)W(B)]}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Le théorème suivant est valable pour A et B quelconques dans $B(H)$.

Théorème 11. *Pour A, B dans $B(H)$, nous avons*

$$W(M_{2,A,B}) \subset W(A)W(B) + \overline{S(A)S(B)}.$$

Preuve. Par le corollaire 5,

$$W(M_{2,A,B}) \subset W(L_A)W(R_B) + \overline{S(L_A)S(R_B)}.$$

Par [5], théorème 13, $W(R_B) = W(B)$ et $W(L_A) = W(A)$. Par [5], lemme 7, pour C dans $B(H)$, $S(C)$ est le disque de centre l'origine et de rayon $d(C)$. Puisque $d(L_A) = d(A)$ et $d(R_B) = d(B)$, alors $\overline{S(A)} = \overline{S(L_A)}$ et $\overline{S(B)} = \overline{S(R_B)}$. □

References

[1] T. Ando, *Distance to the set of thin operators*, preprint, 1970.

[2] E. Bishop, *Spectral theory for operators on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., **86** (1957), 414-445. MR **20:**7217

[3] R. Bouldin, *The numerical range of a product,* J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 459-467. MR **42:**5079a

[4] R. Bouldin, *The numerical range of a product, II,* J. Math. Anal. Applic. **33** (1971), 212-219. MR **42:**5079a

[5] M. K. Chraibi, *Domaine numérique de l'opérateur produit $M_{2,A,B}$ et de la dérivation généralisée $\delta_{2,A,B}$*, Extracta Mathematicae. Vol. 17, Num. 1, 2002, 59-68. MR **2003h:**47065

[6] M. K. Chraibi, *Domaine numérique d'opérateurs élémentaires. Problèmes de rafle,* thèse d'état, Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia. Marrakech. 2002. N° D'ordre 339.

[7] L. Fialkow, *Structural properties of elementary operators*, *Elementary operators and applications* (Blaubeuren, 1991), 55-113, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992. MR **93i:**47042

[8] C. K. Fong, *Most normal operators are diagonal*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 671-672. MR **88b:**47033

[9] K. Gustafson and D. Rao, *The field of values of linear operators and matrices*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1997. MR **98b:**47008

[10] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967. MR **34:**8178

[11] J. A. R. Holbrook, *On the power bounded operators of Sz.-Nagy and Foias*, Acta Sci. Math. (Szeged) **29** (1968), 299-310. MR **39:**810

[12] C. K. Li, *C-numerical range and C-numerical radii*, Linear and Multilinear Algebra **37** (1994), 51-82. MR **95k:**15039

[13] G. Lumer and M. Rosenblum, *Linear operator equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 32-41. MR **21:**2927

[14] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **27**, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970. MR **41:**2449

Département des Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia, Université Cadi Ayyad, Marrakech, Maroc

E-mail address: chraibik@ucam.ac.ma