

## SUR L'IDEAL D'ORDRE DES OPERATEURS AM-COMPACTS

BELMESNAOUI AQZZOUZ AND REDOUANE NOUIRA

(Communicated by Joseph A. Ball)

ABSTRACT. We give different necessary and sufficient conditions so that the space of AM-compact operators is an order ideal and we deduce some consequences.

RÉSUMÉ. Nous donnons différentes conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace des opérateurs AM-compacts soit un idéal d'ordre et nous déduisons quelques conséquences.

### 1. INTRODUCTION ET RAPPELS

Dans son article [8], Fremlin a introduit la classe des opérateurs AM-compacts. Un opérateur borné pour l'ordre d'un treillis vectoriel  $E$  vers un treillis de Banach  $F$  est dit AM-compact si l'image de toute partie bornée pour l'ordre de  $E$  est une partie compacte de  $F$ . Il est clair que tout opérateur borné pour l'ordre et compact est un AM-compact, cependant un opérateur AM-compact n'est pas nécessairement compact. Fremlin [8] a montré que si  $E$  est un treillis vectoriel et  $F$  un treillis de Banach dont la norme est continue pour l'ordre, alors le sous-espace vectoriel de tous les opérateurs AM-compacts est une bande du treillis vectoriel  $\mathcal{L}_b(E, F)$ , où  $\mathcal{L}_b(E, F)$  est l'espace de toutes les applications linéaires bornées pour l'ordre de  $E$  vers  $F$ . Aussi, Dodds et Fremlin [7] ont établi que si  $E$  et  $F$  sont deux treillis de Banach tels que la norme de  $F$  et celle du dual topologique  $E'$  de  $E$  sont continues pour l'ordre, alors tout opérateur AM-compact  $T$  de  $E$  dans  $F$  qui est semi-compact (i.e. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u \in E^+$  tels que  $T(B_E) \subset [-u, u] + \varepsilon B_F$ , où  $B_H$  est la boule unité de  $H = E, F$  et  $E^+ = \{x \in E : 0 \leq x\}$ ) est compact. Ensuite, Aliprantis et Burkinshaw ([2], Théorème 1.2) ont généralisé le résultat de Fremlin et ont obtenu un théorème qui était à la base des démonstrations des principaux résultats de leur fameux article ([2], Théorème 2.1, Théorème 2.2 et Théorème 2.3).

D'autre part, contrairement aux opérateurs compacts et aux opérateurs faiblement compacts, l'opérateur dual d'un AM-compact n'est pas nécessairement un AM-compact, et un opérateur dont le dual est un AM-compact n'est pas nécessairement un AM-compact. Dans ([12], Théorème 125.6), Zaanen a établi que si  $E$  et  $F$  sont des treillis de Banach tels que la norme de  $F$  et celle de  $E'$  sont continues pour

---

Received by the editors March 23, 2005 and, in revised form, June 14, 2005.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 46A40, 46B40, 46B42.

*Key words and phrases*. Opérateur AM-compact, norme continue pour l'ordre, treillis vectoriel discret.

©2006 American Mathematical Society  
Reverts to public domain 28 years from publication

l'ordre, alors un opérateur  $T$  de  $E$  vers  $F$  est un AM-compact si, et seulement si, son opérateur dual  $T'$  de  $F'$  vers  $E'$  l'est aussi.

Enfin, notons qu'Andreu, Caselles, Martinez et Mazon [3] ont étudié les propriétés spectrales des opérateurs AM-compacts (pas nécessairement bornés pour l'ordre) sur les treillis de Banach. Aussi, Troitsky [10] a donné des résultats sur la mesure de la non compacité des opérateurs AM-compacts.

L'objectif de ce papier est de donner d'abord une condition suffisante, différente de celle du Théorème 1.2 de [2]. Plus précisément, nous établirons que si  $E$  est un treillis vectoriel dont le dual d'ordre  $E_b^\sim$  de  $E$  est discret et si  $(F, \nu)$  est un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet pour l'ordre, alors pour tout  $x \in E^+$ , le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_x = \{T \in \mathcal{L}_b(E, F) : T([0, x]) \text{ est précompact pour } \nu\}$  est un idéal d'ordre de  $\mathcal{L}_b(E, F)$ , où  $E^+ = \{z \in E : 0 \leq z\}$  et  $E_b^\sim = \mathcal{L}_b(E, \mathbb{R})$ . Ensuite, nous montrerons la réciproque en établissant que si pour tout  $x \in E^+$ , le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_x$  est un idéal d'ordre de  $\mathcal{L}_b(E, F)$ , alors soit la topologie  $\nu$  est de Lebesgue soit  $E_b^\sim$  est discret. Aussi, nous donnerons un exemple qui montre que lorsque  $E_b^\sim$  est discret,  $\mathcal{L}_x$  n'est pas nécessairement une bande de  $\mathcal{L}_b(E, F)$ . Enfin, nous établirons que si  $E$  est un treillis de Banach, alors pour tout  $x \in E^+$ ,  $L_x$  est une bande de  $L_b(E, F)$  si, et seulement si, la topologie  $\nu$  est de Lebesgue ou  $E$  est discret et de norme continue pour l'ordre, où  $L_b(E, F)$  est le treillis vectoriel des applications linéaires bornées pour l'ordre et continues de  $E$  vers  $F$  et  $L_x = \{T \in L_b(E, F) : T([0, x]) \text{ est précompact pour } \nu\}$ . Aussi, nous donnerons des conséquences. En particulier, si  $(E, \tau)$  est un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet pour l'ordre et si  $E$  est discret et sa topologie  $\tau$  est de Lebesgue, alors  $E'$  est discret.

Nous rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite. Un idéal d'ordre  $A$  est un sous-espace vectoriel solide de  $E$ , i.e., si  $x \in A$ ,  $y \in E$  et  $|y| \leq |x|$ , alors  $y \in A$ . Une bande est un idéal d'ordre fermé pour l'ordre. Un élément non nul  $x$  d'un treillis vectoriel  $E$  est dit discret si l'idéal d'ordre engendré par  $x$  coïncide avec la droite engendrée par  $x$ . Le treillis vectoriel  $E$  est dit discret, s'il admet un système disjoint complet d'éléments discrets. Pour tous  $x, y \in E$  tels que  $x \leq y$ , l'ensemble  $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$  est appelé un intervalle d'ordre de  $E$ .

Si  $(E, \tau)$  est un treillis vectoriel localement convexe et solide, la topologie  $\tau$  est dite de Lebesgue si pour toute suite généralisée  $(x_\alpha)$  telle que  $x_\alpha \downarrow 0$  dans  $E$ , la suite  $(x_\alpha)$  converge vers 0 pour la topologie  $\tau$ , où la notation  $x_\alpha \downarrow 0$  signifie que la suite  $(x_\alpha)$  est décroissante, admet un infimum et  $\inf(x_\alpha) = 0$ . Pour plus de détails sur les treillis vectoriels localement convexes et solides, nous renvoyons le lecteur au livre d'Aliprantis et Burkinshaw [1].

## 2. RÉSULTATS PRINCIPAUX

Une partie d'un treillis vectoriel  $E$  est dite bornée pour l'ordre si elle est contenue dans un intervalle d'ordre. Une application linéaire  $T$  de  $E$  vers un treillis vectoriel  $F$ , est dite bornée pour l'ordre si elle transforme tout borné pour l'ordre de  $E$  en un borné pour l'ordre de  $F$ . Notons par  $\mathcal{L}_b(E, F)$  l'espace de toutes les applications linéaires bornées pour l'ordre de  $E$  vers  $F$ . C'est un treillis vectoriel si  $F$  est complet pour l'ordre.

Rappelons que si  $(E, E^*)$  est un système en dualité et  $\mathcal{A}$  une famille de parties de  $E$  bornées pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$ , alors la  $\mathcal{A}$ -topologie sur  $E^*$  est la

topologie de la convergence uniforme sur les éléments de  $\mathcal{A}$ . C'est une topologie engendrée par la famille des semi-normes  $\{P_A : A \in \mathcal{A}\}$ , où  $P_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$  pour tout  $f \in E^*$ . Notons que cette topologie n'est pas nécessairement séparée. De la même manière, si  $\mathcal{B}^*$  est une famille de parties de  $F^*$  bornées pour  $\sigma(F^*, F)$ , nous définissons la  $\mathcal{B}^*$ -topologie sur  $E$  comme la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de  $\mathcal{B}^*$ .

Si  $T : E \rightarrow F$  est une application linéaire faiblement continue, correspondant aux systèmes en dualités  $(E, E^*)$  et  $(F, F^*)$ , l'application duale  $T^* : F^* \rightarrow E^*$  est définie par  $T^*(f(x)) = f(T(x))$  pour tout  $f \in F^*$  et pour tout  $x \in E$ .

La preuve du Théorème 2.3 repose sur deux Lemmes. Le premier est exactement le Théorème de dualité de A. Grothendieck ([9], Théorème 3, p. 51).

**Lemme 2.1.** *Soient  $(E, E^*)$  et  $(F, F^*)$  deux systèmes en dualités, et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire faiblement continue. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $T(A)$  est un précompact pour la  $\mathcal{B}^*$ -topologie.*
2. *Pour tout  $B \in \mathcal{B}^*$ ,  $T^*(B)$  est un précompact pour la  $\mathcal{A}$ -topologie.*

Soient  $E$  un treillis vectoriel et  $(F, \nu)$  un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet pour l'ordre. Pour tout  $x \in E^+$ , on note par  $I_x$  l'idéal d'ordre de  $E$  engendré par  $x$ ,  $T_x$  la restriction de  $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$  à  $I_x$  et  $\tau_x$  la topologie de la convergence uniforme sur l'intervalle d'ordre  $[0, x]$ . Il est clair que  $\tau_x$  est une topologie localement solide sur  $(I_x)^* = \{f|_{I_x} : f \in E_b^*\}$ .

D'après le Lemme 2.1, pour tout  $T \in \mathcal{L}_b(E, F)$  et pour tout  $x \in E^+$ , l'ensemble  $T([0, x])$  est précompact pour  $\nu$  dans  $F$  si, et seulement si, pour tout équicontinu  $H \subset F'$ , l'ensemble  $(T_x)'(H)$  est précompact pour  $\tau_x$  dans  $(I_x)^*$ , où  $F'$  est le dual topologique de  $F$  et  $(T_x)'$  est l'application duale de  $T_x$ .

**Lemme 2.2.** *Si  $E$  est un treillis vectoriel, alors pour tout  $x \in E^+$ , le treillis vectoriel  $(I_x)^*$  est complet pour l'ordre et sa topologie  $\tau_x$  est de Lebesgue.*

*Preuve.* (i) Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une suite généralisée de  $E_b^{\sim}$  telle que  $f_{i|_{I_x}} \downarrow 0$ . Fixons  $i_o \in I$  et posons

$$F_{i_1, \dots, i_n} = \left( \left( \bigwedge_{j=1}^n f_{i_j} \right) \wedge f_{i_o} \right).$$

Quitte à remplacer  $f_i$  par  $|f_i|$ , on peut supposer  $f_i \geq 0$  pour tout  $i \in I$ . La suite  $(F_{i_1, \dots, i_n})$  est décroissante et minorée dans  $E_b^{\sim}$ , donc admet un infimum  $h \geq 0$ , i.e.,  $F_{i_1, \dots, i_n} \downarrow h$ . Il s'ensuit que la suite  $(F_{i_1, \dots, i_n}(x))$  converge vers  $h(x)$  et  $h \leq f_i$  pour tout  $i \in I$ . Ceci implique  $h_{|_{I_x}} \leq f_{i|_{I_x}}$  et donc  $h_{|_{I_x}} = 0$ . Par suite, la topologie  $\tau_x$  est de Lebesgue.

(ii) Soient  $(f_i)_{i \in I}$  une suite généralisée de  $E_b^{\sim}$  tels que  $f_{i|_{I_x}} \uparrow \leq f_{i|_{I_x}}$ . Posons

$$F_{i_1, \dots, i_n} = \left( \left( \bigvee_{j=1}^n f_{i_j} \right) \wedge f \right).$$

Comme  $E_b^{\sim}$  est complet pour l'ordre, la suite  $(F_{i_1, \dots, i_n})$  converge pour l'ordre vers un certain  $g \in E_b^{\sim}$ .

Donc

$$f_{i|I_x} = f_{I_x} \wedge f_{i|I_x} = (f \wedge f_i)_{|I_x} \leq g_{|I_x}.$$

Par suite,  $f_{i|I_x} \leq g_{|I_x}$  pour tout  $i \in I$ .

Montrons que  $f_{i|I_x} \uparrow g_{|I_x}$ . Supposons qu'il existe  $h \in E_b^\sim$  tel que  $f_{i|I_x} \uparrow \leq h_{|I_x}$  pour tout  $i \in I$ . Soit  $y \in I_x$ , alors  $(F_{i_1, \dots, i_n}(y))$  converge vers  $g(y)$ . Comme  $F_{i_1, \dots, i_n}(y) \leq h(y)$ , alors  $g(y) \leq h(y)$ . Ceci implique  $g_{|I_x} \leq h_{|I_x}$  et finalement  $f_{i|I_x} \uparrow g_{|I_x}$ .

Une partie  $A$  d'un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé  $F$  est dite quasi-précompacte pour l'ordre si pour tout voisinage  $U$  de 0, il existe  $y \in F^+$  tels que  $A \subset [-y, y] + U$ . □

**Théorème 2.3.** *Soient  $E$  un treillis vectoriel et  $(F, \nu)$  un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet pour l'ordre. Si  $E_b^\sim$  est discret, alors pour tout  $x \in E^+$ , le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_x$  est un idéal d'ordre de  $\mathcal{L}_b(E, F)$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in E^+$  et soient  $S, T$  deux opérateurs de  $E$  vers  $F$  tels que  $T \in \mathcal{L}_x$  et  $S \in \mathcal{L}_b(E, F)$  vérifiant  $0 \leq S \leq T$ . Comme l'ensemble  $T([0, x])$  est précompact dans  $F$  pour la topologie  $\nu$ , alors pour toute partie équicontinue  $H$  de  $F'$ , contenue dans  $(F')^+$ , l'ensemble  $(T_x)^*(H)$  est précompact dans  $(I_x)^*$  pour la topologie  $\tau_x$ . Et par suite,  $(T_x)^*(H)$  est une partie quasi-précompacte pour l'ordre dans  $(I_x)^*$ .

Si  $(I_x)^*$  est trivial, alors il résulte du Lemme 2.1 que l'ensemble  $S([0, x])$  est précompact (car  $(S_x)^*$  est l'application nulle).

Sinon, comme  $0 \leq S^* \leq T^*$ , il découle de la Proposition 2.4 de [4], que  $(S_x)^*(H)$  est une partie quasi-précompacte pour l'ordre dans  $(I_x)^*$ .

Soit  $U$  un voisinage de 0 pour la topologie  $\tau_x$  dans le treillis vectoriel  $(I_x)^*$ . Il existe donc  $f \in (I_x)^*$  tel que

$$(S_x)^*(H) \subset [-f, f] + \frac{U}{2}.$$

Comme le dual d'ordre  $E_b^\sim$  de  $E$  est discret, alors  $(I_x)^*$  est discret. D'autre part, il résulte du Lemme 2.2 que  $(I_x)^*$  est complet pour l'ordre et sa topologie  $\tau_x$  est de Lebesgue. Par conséquent, il résulte du Corollaire 21.13 de [1] que l'intervalle d'ordre  $[-f, f]$  est précompact pour cette topologie. D'où l'existence d'une partie finie  $K$  de  $(I_x)^*$  telle que

$$[-f, f] \subset K + \frac{U}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$(S_x)^*(H) \subset K + U.$$

Ceci montre que  $(S_x)^*(H)$  est précompact et donc  $S([0, x])$  l'est aussi. Par suite, le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_x$  est solide dans le treillis vectoriel  $\mathcal{L}_b(E, F)$ . Ce qui montre le Théorème. □

*Remarque 2.4.* Le Théorème 2.3 reste vrai si on suppose que le dual d'ordre  $(I_x)_b^\sim$  de  $I_x$  est discret pour tout  $x \in E^+$ . En effet, il suffit de remplacer  $(I_x)^*$  par  $(I_x)_b^\sim$  dans la preuve du Théorème 2.3.

*Remarque 2.5.* Si  $(E, \tau)$  est un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé tel que  $E'$  est discret, alors pour tout  $x \in E^+$ , le sous-espace vectoriel  $L_x$  est un idéal d'ordre de  $L_b(E, F)$ . En effet, il suffit de remplacer  $(I_x)^*$  par  $D_x = \{f_{|I_x} : f \in E'\}$  dans la preuve du Théorème 2.3.

Par une démonstration analogue à celle du Théorème 2.3, on obtient aussi le Théorème suivant.

**Théorème 2.6.** *Soient  $(E, \tau)$  et  $(F, \nu)$  deux treillis vectoriels localement convexes solides et séparés avec  $F$  complet pour l'ordre. Alors  $L_x$  est un idéal d'ordre de  $L_b(E, F)$  si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

- i) *Pour tout  $x \in E^+$ , le dual topologique  $(I_x)'$  est discret.*
- ii) *Pour tout  $x \in E^+$ , l'ensemble  $D_x$  est discret.*

Notons par  $|\sigma|(E_b^\sim, E)$  la topologie localement convexe et solide sur  $E_b^\sim$ , engendrée par la famille des semi-normes de treillis  $\{P_x : x \in E\}$ , où  $P_x(f) = |f|(|x|)$  pour tout  $f \in E_b^\sim$ .

**Théorème 2.7.** *Soient  $E$  un treillis vectoriel et  $(F, \nu)$  un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet pour l'ordre. Si pour tout  $x \in E^+$ , le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_x$  est un idéal d'ordre de  $\mathcal{L}_b(E, F)$ , alors l'une des propriétés suivantes est vérifiée:*

- a) *La topologie  $\nu$  est de Lebesgue.*
- b) *Le treillis vectoriel  $E_b^\sim$  est discret.*

*Preuve.* Supposons que la topologie  $\nu$  n'est pas de Lebesgue et que le treillis vectoriel  $E_b^\sim$  n'est pas discret. Il existe donc  $z \in F^+$  et une suite disjointe  $(z_n)$  dans  $[0, z]$  qui ne converge pas vers 0 pour la topologie  $\nu$ . Aussi, comme les intervalles d'ordre de  $E_b^\sim$  sont complets pour la topologie  $|\sigma|(E_b^\sim, E)$ , alors il existe  $\Psi \in (E_b^\sim)^+$  et une suite  $(\Psi_n)$  dans  $[-\Psi, \Psi]$  telle que  $(\Psi_n)$  converge vers 0 pour la topologie faible  $\sigma(E_b^\sim, E)$  mais  $(\Psi_n)$  ne converge pas vers 0 pour la topologie faible absolue  $|\sigma|(E_b^\sim, E)$  (Corollaire 21.13 de [1]). D'où l'existence d'un élément  $y \in E^+$  tel que  $|\Psi_n|(y) | > 2$  pour tout  $n$ . Ceci permet de conclure que  $\Psi_n^+(y) > 1$  ou  $\Psi_n^-(y) > 1$ . Dans les deux cas, on peut trouver  $y_n$  dans  $[0, y]$  tels que  $|\Psi_n(y_n) | > 1$  pour tout  $n$ .

Posons

$$K = \left\{ \sum_n \alpha_n z_n : \alpha_n \longrightarrow 0 \right\}$$

et notons par  $P_n$  l'application de  $K$  vers  $\mathbb{R}$  définie par

$$P_n \left( \sum_i \alpha_i z_i \right) = \alpha_n.$$

Maintenant, considérons les opérateurs  $S$  et  $T$  définis de  $E$  vers  $F$  par

$$S(x) = \Psi(x).z + \sum \Psi_n(x).z_n$$

et

$$T(x) = 2\Psi(x)z$$

pour tout  $x \in E$ .

Il est clair que  $0 \leq S \leq T$  et  $T \in \mathcal{L}_y$ . Si  $S \in \mathcal{L}_y$  alors l'opérateur  $S_1$  défini de  $E$  vers  $F$  par  $S_1(x) = \sum_{n \geq 1} \Psi_n(x)z_n$  en est de même. En regardant  $S_1$  comme un opérateur de  $I_y$  vers  $K$ , alors pour toute partie équicontinue  $H$  de  $K'$ ,  $(S_1)^*(H)$  est une partie précompacte pour la topologie  $\tau_y$  dans  $(I_y)^*$ .

En particulier, si on prend  $H = \{P_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ , alors  $(S_1)^*(H) = \{\Psi_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  est une partie précompacte pour la topologie  $\tau_y$  dans  $(I_y)^*$ . Il existe donc une sous-suite  $(\Psi_{n_k})_{n \geq 1}$  telle que  $|\Psi_{n_1} - \Psi_{n_k}|(y) < \frac{1}{3}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Donc  $|(\Psi_{n_1} - \Psi_{n_k})(y_{n_k})| < \frac{1}{3}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

En faisant tendre  $k$  vers l'infini, on obtient  $|\Psi_{n_1}(y_{n_1})| < \frac{1}{3}$ . Ce qui est faux. Par conséquent,  $S \notin \mathcal{L}_y$  et donc  $\mathcal{L}_y$  n'est pas un idéal d'ordre du treillis vectoriel  $\mathcal{L}_b(E, F)$ . Ce qui est absurde.  $\square$

Lorsque  $(E, \tau)$  est un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé, en remplaçant  $E_b^\sim$  par  $E'$  dans la preuve du Théorème 2.7, on obtient le Théorème suivant.

**Théorème 2.8.** *Soient  $(E, \tau)$  et  $(F, \nu)$  deux treillis vectoriels localement convexes solides et séparés avec  $F$  complet pour l'ordre. Si pour tout  $x \in E^+$ , le sous-espace vectoriel  $L_x$  est un idéal d'ordre de  $L_b(E, F)$ , alors l'une des propriétés suivantes est vérifiée.*

- a) *La topologie  $\nu$  est de Lebesgue.*
- b) *Le treillis vectoriel  $E'$  est discret.*

Comme conséquence, nous obtenons le résultat suivant.

**Corollaire 2.9.** *Soit  $E$  un treillis vectoriel, alors  $E_b^\sim$  est discret si au moins l'une des propriétés suivantes est vérifiée:*

- a)  *$(I_x)^*$  est discret pour tout  $x \in E^+$ .*
- b)  *$(I_x)_b^\sim$  est discret pour tout  $x \in E^+$ .*

*Preuve.* En prenant  $F = l^\infty$ , le résultat découle de la Remarque 2.4 et du Théorème 2.7.  $\square$

Comme conséquence des Théorèmes 2.6 et 2.8, nous obtenons le Corollaire suivant.

**Corollaire 2.10.** *Soit  $(E, \tau)$  un treillis vectoriel localement convexe solide et séparé, alors  $E'$  est discret si au moins l'une des propriétés suivantes est vérifiée:*

- a)  *$(I_x)'$  est discret pour tout  $x \in E^+$ .*
- b)  *$D_x$  est discret pour tout  $x \in E^+$ .*

*Remarque 2.11.* Contrairement au Théorème 1.2 de [2], si le dual d'ordre  $E_b^\sim$  est discret, le sous-espace vectoriel  $\mathcal{L}_x$  n'est pas nécessairement une bande dans  $\mathcal{L}_b(E, F)$ , comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 2.12.** Considérons les opérateurs  $T_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $T$  définis du treillis de Banach  $c$  vers le treillis de Banach  $l^\infty$ , par  $T_n((\alpha_k)_{k \geq 1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)$  et  $T((\alpha_k)_{k \geq 1}) = (\alpha_k)_{k \geq 1}$  pour tout  $(\alpha_k)_{k \geq 1} \in c$ , où  $c$  est l'espace de toutes les suites convergentes.

Il est clair que  $0 \leq T_n \uparrow T$  et que chaque  $T_n$  est un élément de  $\mathcal{L}_x$  pour tout  $x \in c^+$ . Mais pour  $x = (1, 1, \dots)$ , l'ensemble  $T([0, x])$  n'est pas précompact dans  $l^\infty$ .

Le résultat suivant donne une condition suffisante, différente de celle du Théorème 1.2 d'Aliprantis et Burkinshaw [2], et qui montre que pour tout  $x \in E^+$ ,  $L_x$  est une bande de  $L_b(E, F)$ .

**Théorème 2.13.** *Soient  $(E, \tau)$  et  $(F, \nu)$  deux treillis vectoriels localement convexes solides séparés et complets pour l'ordre. Si  $E$  est discret et sa topologie est de Lebesgue, alors pour tout  $x \in E^+$ ,  $L_x$  est une bande de  $L_b(E, F)$ .*

*Preuve.* En effet, sous ces hypothèses, l'intervalle d'ordre  $[0, x]$  est compact dans  $E$  pour tout  $x \in E^+$  ([1], Théorème 21.13). Il s'ensuit que pour tout  $T \in L_b(E, F)$ , on a  $T \in L_x$ .  $\square$

Comme conséquence immédiate, nous obtenons le Corollaire suivant.

**Corollaire 2.14.** *Soit  $(E, \tau)$  un treillis vectoriel localement convexe solide séparé et complet pour l'ordre. Si  $E$  est discret et sa topologie  $\tau$  est de Lebesgue, alors  $E'$  est discret.*

*Preuve.* En effet, en prenant  $F = l^\infty$  dans le Théorème 2.13, le sous-espace vectoriel  $L_x$  est une bande de  $L_b(E, l^\infty)$  et donc un idéal d'ordre. Comme la topologie définie par la norme de  $l^\infty$  n'est pas de Lebesgue, il résulte du Théorème 2.8 que  $E'$  est discret. □

Rappelons que la norme d'un treillis de Banach est dite continue pour l'ordre si la topologie qu'elle définit est de Lebesgue.

Comme réciproque du Théorème 1.2 d'Aliprantis et Burkinshaw [2] et du Corollaire 2.14, on a le résultat suivant.

**Théorème 2.15.** *Soient  $(E, |||)$  un treillis de Banach et  $(F, \nu)$  un treillis vectoriel localement convexe solide complet et complet pour l'ordre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout  $x \in E^+$ ,  $L_x$  est une bande de  $L_b(E, F)$ .*
2. *L'une des conditions suivantes est vérifiée:*
  - (i) *La topologie  $\nu$  est de Lebesgue.*
  - (ii)  *$E$  est discret et sa norme est continue pour l'ordre.*

*Preuve.* (i) implique 1. C'est exactement le Théorème 1.2 d'Aliprantis et Burkinshaw [2]. Pour 2(ii) implique 1, il résulte du Théorème 2.13.

1 implique 2. Supposons qu'aucune des conditions (i) et (ii) n'est vérifiée. Il existe donc  $z \in F$  et il existe une suite disjointe  $(z_m)$  contenue dans  $[0, z]$  qui n'admet aucune sous-suite convergente vers 0 dans  $F$ .

Soit

$$H = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n z_n : (\alpha_n) \in l^\infty \right\}$$

où la convergence de la série  $\sum_{n=1}^{+\infty}$  est prise au sens de l'ordre.

1er cas. Supposons que la norme de  $E$  est continue pour l'ordre, alors la topologie faible absolue  $|\sigma|(E, E')$  est de Lebesgue. D'après le Corollaire 21.13 de [1], il existe un  $a \in E^+$  et une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  dans  $[0, a]$ , qui converge vers 0 pour la topologie faible  $\sigma(E, E')$ , mais ne converge pas vers 0 pour la topologie  $|\sigma|(E, E')$ . Ceci permet de construire  $\Psi \in E'$ ,  $\Psi_n \in [0, \Psi]$  et  $y_n \in [0, x_n]$  tels que  $|\Psi_n(y_n)| > 1$ .

2eme cas. On suppose que la norme de  $E$  n'est pas continue pour l'ordre, alors il existe  $a \in E^+$  et il existe une suite disjointe  $(y_n)_{n \geq 1}$  dans  $[0, a]$  tels que  $\|y_n\| \geq 1$ . On peut construire  $\Psi_n \in (E')^+$  tel que  $\Psi_n(y_m) = \delta_{m,n}$  et  $\|\Psi_n\| \leq 1$ .

Dans les deux cas, nous considérons les opérateurs  $T_n$  et  $T$  définis de  $E$  vers  $H$  comme suit:

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \Psi_k(x) z_k$$

et

$$T(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Psi_k(x) z_k.$$

Encore une fois la convergence de la série  $\sum_{n=1}^{\infty}$  est prise au sens de l'ordre. Comme  $T$  est positif et dominé par l'opérateur défini par  $\Psi(x)z$ , alors il est nécessairement continu.

D'autre part, il est clair que  $0 \leq T_n \uparrow T$  et  $T_n$  est compact, mais  $T([0, a])$  n'est pas précompact dans  $H$ . En effet, sinon la suite  $(T(y_n))$  admettra alors une sous-suite convergente dans  $H$ , qu'on note aussi par  $(T(y_n))$ . La limite étant obligatoirement nulle. Ce qui contredit que  $|\Psi_n(y_n)| > 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Comme conséquence du Théorème 2.15, nous obtenons un résultat qui est une généralisation du Corollaire 2.3 de la Note [5]:

**Corollaire 2.16.** *Soient  $(E, \tau)$ ,  $(F, \nu)$  et  $(G, s)$  des treillis vectoriels localement convexes solides et séparés. Si  $F'$  est discret, alors pour tous opérateurs  $S_1, T_1$  de  $E$  vers  $F$  et  $S_2, T_2$  de  $F$  vers  $G$  tels que  $0 \leq S_i \leq T_i$  pour  $i = 1, 2$  et  $T_i$  compact, l'opérateur  $S_2 \circ S_1$  est compact.*

*Preuve.* Soit  $B$  une partie bornée pour la topologie  $\tau$  et contenue dans  $E^+$ . Comme  $T(B)$  est quasi-précompact pour l'ordre, alors  $S(B)$  l'est aussi. Soient  $U$  et  $V$  des voisinages solides de 0 pour les topologies  $\nu$  et  $s$  tels que

$$S_2(U) \subset V.$$

Il existe  $x \in E^+$  tel que

$$S_1(B) \subset [-x, x] + \frac{1}{2}U.$$

Par suite,

$$S_2 \circ S_1(B) \subset S_2([-x, x]) + \frac{1}{2}V.$$

Puisque  $T_2 \in L_x$ , il résulte de la Remarque 2.5 que  $S_2 \in L_x$ . Ce qui montre que l'opérateur  $S_2 \circ S_1$  est compact.  $\square$

*Remarque 2.17. 1.* Dans ([2], Théorème 2.2), Aliprantis et Burkinshaw ont établi que si  $E$  est un treillis de Banach tel que la norme de  $E$  ou celle de  $E'$  est continue pour l'ordre, et si  $S$  et  $T$  sont des opérateurs définis de  $E$  dans  $E$  vérifiant  $0 \leq S \leq T$  et  $T$  compact, alors le carré  $S^2$  est compact. Le Corollaire 2.16 ci-dessus donne une nouvelle condition suffisante différente de celles de ([2], Théorème 2.2). En fait ce Corollaire est exactement le Théorème 2.2 (iii) que nous avons établi dans [6] lorsque nous avons montré la réciproque du Théorème 2.2 de Aliprantis et Burkinshaw [1]. Notons aussi, que la réciproque du Théorème 2.2 de [2] a été étudié par Wickstead dans ([11], Théorème 2.2).

**2.** Aliprantis et Burkinshaw ont utilisé le Théorème 1.2 de leur article [2] pour établir les Théorème 2.1, Théorème 2.2 et Théorème 2.3 de [2] qui donnent des résultats importants sur le problème de domination dans la classe des opérateurs compacts. Ici dans notre cas, nous avons obtenu comme conséquence du Théorème 2.15 un résultat relatif au même problème. Ceci montre le lien étroit entre la classe des opérateurs AM-compacts et le problème de domination pour les opérateurs compacts.

#### REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier le référé pour ses suggestions qui ont permis d'améliorer ce papier.

## RÉFÉRENCES

- [1] Aliprantis C.D. and Burkinshaw O., Locally solid Riesz spaces, Academic Press, 1978. MR0493242 (58:12271)
- [2] Aliprantis C.D. and Burkinshaw O., Positive compact operators on Banach lattices, Math. Z., 174 (1980) 289-298. MR0593826 (81m:47053)
- [3] Andreu F., Caselles V, Martinez J and Mazon J.M., The essential spectrum of AM-compact operators, Indag. Math. N.S. 2 (2), (1991) 149-158. MR1123357 (92j:47067)
- [4] Aqzzouz B. and Nouria R., Les opérateurs précompacts sur les treillis vectoriels localement convexes et solides, Sci. Math. Jpn., vol. 57 no.2 (2003) 279-256. MR1959985 (2003k:46001)
- [5] Aqzzouz B. and Nouria R., Sur les opérateurs précompacts positifs, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, vol. 337, 8 (2003) 527-530. MR2017131 (2004h:46002)
- [6] Aqzzouz B. and Nouria R., On the converse of Aliprantis and Burkinshaw's Theorem, to appear in Positivity 2006.
- [7] Dodds P.G. and Fremlin D.H., Compact operators on Banach lattices, Israel J. Math. 34 (1979) 287-320. MR0570888 (81g:47037)
- [8] Fremlin D.H., Riesz spaces with the order continuity property. I, Proc. Cambr. Phil. Soc. 81 (1977) 31-42. MR0425572 (54:13526)
- [9] Robertson A.P. and Robertson W., Topological vector spaces, Second edition, Cambridge University Press, London, 1973. MR0350361 (50:2854)
- [10] Troitsky V.G., Measures of non-compactness of operators on Banach lattices, Positivity 8, 2 (2004) 165-178. MR2097086 (2005i:47059)
- [11] Wickstead A.W., Positive compact operators on Banach lattices: some loose ends, Positivity 4 (2000), 313-325. MR1797133 (2001k:47054)
- [12] Zaanen A.C., Riesz spaces. II, North-Holland Publishing Company, 1983. MR0704021 (86b:46001)

FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ IBN TOFAIL, EQUIPE D'ANALYSE FONCTIONNELLE, B.P. 133, KÉNITRA, MOROCCO  
*E-mail address:* [baqzzouz@hotmail.com](mailto:baqzzouz@hotmail.com)

FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ IBN TOFAIL, EQUIPE D'ANALYSE FONCTIONNELLE, B.P. 133, KÉNITRA, MOROCCO