SUR LA DÉFINITION GÉNÉRALE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, D'APRÈS CAUCHY*

PAR

E. GOURSAT

J'ai reconnu depuis longtemps que la démonstration du théorème de Cauchy, que j'ai donnée en 1883†, ne supposait pas la continuité de la dérivée. Pour répondre au désir qui m'a été exprimé par M. le Professeur Wm. F. Osgood, je vais indiquer ici rapidement comment on peut faire cette extension.

Soit z une variable complexe et $u = f(z)$ une autre quantité complexe qui varie avec z. La fonction $f(z)$ est dite *continue* pour la valeur z_0 de la variable si la différence $f(z_0 + h) - f(z_0)$ tend vers zéro en même temps que le module de h, ou, d'une façon plus précise, si à tout nombre positif ε, pris arbitrairement, on peut faire correspondre un autre nombre positif η, de telle façon que l'inégalité

$$|h| < \eta$$

entraîne la suivante:

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Une fonction continue $f(z)$ admet, pour $z = z_0$, une dérivée $f'(z_0)$ si le rapport

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

tend vers $f'(z_0)$ lorsque le module de h tend vers zéro ; cela revient encore à dire qu' à tout nombre positif ε, pris arbitrairement, on peut faire correspondre un autre nombre positif η tel que l'inégalité

$$|h| < \eta$$

entraîne la suivante:

$$|f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)| \leqq |h|\ \varepsilon.$$

Ces définitions étant rappelées, je definirai encore une expression que j'emploierai, pour abréger la démonstration. Soit A une portion du plan limitée par un contour fermé C, et $f(z)$ une fonction continue et admettant une dérivée

* Presented to the Society April 29, 1899. Received for publication May 5, 1899.

† Acta Mathematica, tome 4, p. 197–200; Comptes Rendus de l' Académie des Sciences de Stockholm, 1884.

pour chaque point de l'aire A et du contour C; soit d'autre part ε un nombre positif. Je dirai que le contour C satisfait à la condition (α) relativement au nombre ε s'il est possible de trouver à l'intérieur ou sur le contour C un point fixe z' tel que l'on ait

$$|f(z) - f(z') - (z - z')f'(z')| \leqq |z - z'| \,\varepsilon,$$

lorsque z décrit le contour C.

Cela posé, toute de la démonstration repose sur le lemme préliminaire suivant :

LEMME.—*Soient $f(z)$ une fonction continue et admettant une dérivée pour tous les points d'une aire A limitée par un contour fermé C et de ce contour lui-même, et ε un nombre positif arbitraire. On peut toujours décomposer l'aire A en portions assez petites pour que le contour de chacune de ces portions satisfasse à la condition (α) relativement au nombre positif ε.*

On établit ce lemme par le procédé bien connu de subdivisions successives. Pour fixer les idées, je supposerai que l'on décompose l'aire A en parties plus petites par deux séries de droites parallèles, à l'axe réel d'une part, à la perpendiculaire d'autre part, la distance de deux parallèles voisines étant constante. Si l'aire A ne satisfait pas à l'énoncé du lemme, il y aura au moins une des aires partielles A_1 qui n'y satisfera pas non plus. En subdivisant cette aire A_1 par le même procédé, on en déduira une aire plus petite A_2, et ainsi de suite. Le procédé pouvant se continuer indéfiniment, on a une suite d'aires

$$A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$$

dont chacune est comprise dans la précédente, et dont les deux dimensions tendent vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment. Il y a donc un point limite z_0, intérieur à A ou situé sur le contour C. Puisque, par hypothèse, la fonction $f(z)$ admet une dérivée $f'(z_0)$ pour $z = z_0$, on peut trouver un nombre η tel que l'on ait

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leqq |z - z_0| \,\varepsilon,$$

pourvu que $|z - z_0|$ soit $< \eta$. Soit c le cercle de rayon η décrit du point z_0 comme centre. A partir d'une valeur de n assez grande, l'aire A_n sera intérieure au cercle c, et on aura pour tous les points du contour de l'aire A_n

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leqq |z - z_0| \,\varepsilon.$$

D'ailleurs il est clair que le point z_0 est à l'intérieur de A_n ou sur le contour ; cette aire devrait donc satisfaire à la condition (α) relativement à ε. Nous sommes par conséquent conduits à une contradiction en admettant que le lemme n'est pas exact.

Il suffit maintenant de supposer, dans ma démonstration du théorème de Cauchy, que l'on choisit les points z_i de façon que les modules de toutes les quantités ε_i soient moindres qu'un nombre donné ε, sans modifier en rien le reste du raisonnement.

Du théorème sur l'intégrale $\int f(z)dz$, on déduira ensuite la formule fondamentale

$$2\pi i \cdot f(x) = \int_{(C)} \frac{f(z)dz}{z-x},$$

avec toutes ses conséquences. On voit par là qu'en se plaçant au point de vue de CAUCHY il suffit, pour édifier la thèorie des fonctions analytiques, de supposer la continuité de $f(z)$ et l'existence de la dérivée.