

SUR LES TRANSFORMÉES DE RIESZ DANS LE CAS DU LAPLACIEN AVEC DRIFT

NOËL LOHOUE AND SAMI MUSTAPHA

ABSTRACT. We prove L^p estimates for Riesz transforms with drift.

I. INTRODUCTION

La bornitude des transformées de Riesz $\frac{\partial}{\partial x_j} \Delta^{-1/2}$, $1 \leq j \leq n$, sur les espaces L^p , $1 < p < \infty$, dans \mathbb{R}^n a été étendue, grâce à la théorie des intégrales singulières dans les espaces de type homogène (cf. [4]) à d'autres contextes où le volume des boules croît d'une manière polynomiale (ex. variétés à courbure positive, groupes de Lie à croissance polynomiale, groupes discrets nilpotents, etc.; cf. [1], [2]). Dès que l'on se trouve en présence d'une croissance superpolynomiale du volume l'étude de la bornitude des transformées de Riesz devient problématique. L'investigation de ce type de situations a fait l'objet de plusieurs travaux de la part du premier auteur (cf. par exemple [7] pour les groupes de Lie non moyennables et [8] pour les variétés Riemanniennes à courbure minorée). D'autres résultats ont été obtenus récemment pour les groupes de Lie moyennables non-unimodulaires et pour certains espaces homogènes avec une croissance du volume exponentielle (cf. [9]).

Il existe néanmoins un contexte élémentaire où le problème de Riesz se pose d'une manière naturelle en présence d'un volume exponentiel. En effet, en se plaçant dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n et en ajoutant au Laplacien standard un "Drift" on obtient un opérateur qui est auto-adjoint pour une mesure pour laquelle la croissance du volume des boules est exponentielle. L'investigation de la bornitude des transformées de Riesz sur les espaces L^p correspondant à cette mesure ne peut plus se faire via la théorie de Calderon-Zygmund.

Nous étudions ci-dessous ce problème. La méthode que nous utilisons, qui est basée sur l'utilisation du noyau de la chaleur, se généralise très naturellement dans le contexte des sous-Laplaciens sur les groupes de Lie moyennables. Elle permet d'obtenir dans ce contexte un certain nombre de résultats concernant la bornitude des transformées de Riesz pour des sous-Laplaciens avec Drift. Nous illustrons ces résultats à travers l'exemple du groupe de Heisenberg et de certains groupes résolubles de rang 1.

Received by the editors October 30, 1998.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58Jxx, 43-XX; Secondary 35Jxx, 35Kxx.

Key words and phrases. Riesz transforms, drift, Lie groups, convolution.

©2004 American Mathematical Society

II. ENONCÉ DE RÉSULTATS

Considérons dans \mathbb{R}^n l'opérateur $L = \Delta + X$ où Δ est le Laplacien standard et où X est un "Drift" donné par $X = \sum_{j=1}^n c_j \partial_{x_j}$, $c_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Notons $\varphi(x) = \exp[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n c_j x_j]$ et $\lambda = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n c_j^2$. Nous supposons dans toute la suite que $\lambda \neq 0$ (i.e. qu'il existe réellement un Drift dans l'opérateur L). On vérifie (cf. §III, ci-dessous) que l'opérateur L est auto-adjoint sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)$, où dx désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n et que

$$\inf\{\langle Lf, f \rangle, \|f\|_{L^2(\varphi^{-2} dx)} = 1\} = \lambda,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\varphi^{-2} dx)$. Soit $0 \leq \theta \leq 1$, posons $\mathcal{L}_\theta = L - \theta\lambda$. Soit $\mathcal{L}_\theta = \int_{(1-\theta)\lambda}^\infty \mu dE_\mu$ la décomposition spectrale de \mathcal{L}_θ (cf. [13]). Notons $\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = \int_{(1-\theta)\lambda}^\infty \mu^{-k/2} dE_\mu$, $k = 1, 2, \dots$ Alors:

Théorème 1. *Les notations étant comme ci-dessus, on a:*

(i) *Soit $0 < \theta < 1$. Alors pour tout p vérifiant*

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \theta}} < p < \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \theta}},$$

pour tout $k = 1, 2, \dots$ et pour tout $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ la transformée de Riesz multiple $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est bornée de $L^p(\varphi^{-2} dx)$ dans $L^p(\varphi^{-2} dx)$. De plus si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls et si $p \leq 2/(1 + \sqrt{1 - \theta})$ ou $p \geq 2/(1 - \sqrt{1 - \theta})$ alors $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non bornée de $L^p(\varphi^{-2} dx)$ dans $L^p(\varphi^{-2} dx)$.

(ii) *Si $\theta = 0$ alors pour tout $k = 1, 2, \dots$ et pour tout $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ l'opérateur $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est borné sur $L^p(\varphi^{-2} dx)$ pour tout $1 < p < \infty$.*

(iii) *Si $\theta = 1$ et si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls $\partial_{x_{i_k}} \cdots \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non borné sur $L^p(\varphi^{-2} dx)$, $\forall 1 < p < \infty$.*

Le théorème ci-dessus se généralise très naturellement dans le contexte des groupes de Lie. Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et soient X_1, \dots, X_n des champs de vecteurs invariants à gauche sur G vérifiant la condition de Hörmander (cf. [12]). Soit $\Delta = -\sum X_j^2$ le sous-Laplacien qui leur correspond. Soit L l'opérateur défini par:

$$L = \Delta + \sum_{j=1}^n c_j X_j = -\sum_{j=1}^n X_j^2 + \sum_{j=1}^n c_j X_j$$

où les coefficients $c_j \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous nuls. On fait l'hypothèse suivante:

$$(H) \quad \begin{cases} \text{Il existe un caractère } \chi \text{ sur } G \text{ et il existe } \lambda > 0 \text{ telle que} \\ L = \chi(\Delta + \lambda)\chi^{-1}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que si un tel caractère existe, alors nécessairement

$$X_j(\chi) = \frac{c_j}{2} \chi, \quad 1 \leq j \leq n,$$

et

$$\lambda = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n c_j^2.$$

On vérifie alors que l'opérateur L est auto-adjoint sur $L^2(\chi^{-2}d^r g)$ où $d^r g$ est la mesure de Haar invariante à droite sur G et que

$$\inf \left\{ \int Lf \cdot f \chi^{-2} d^r g, \|f\|_{L^2(\varphi^{-2}d^r g)} = 1 \right\} = \lambda.$$

On note, comme ci-dessus, pour $0 \leq \theta \leq 1$, $\mathcal{L}_\theta = L - \theta\lambda$ et on considère $\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = \int_{(1-\theta)\lambda}^\infty \mu^{-k/2} dE_\mu$, $k = 1, 2, \dots$, où $\mathcal{L}_\theta = \int_{(1-\theta)\lambda}^\infty \mu dE_\mu$ est la décomposition spectrale de \mathcal{L}_θ .

Théorème 2. *Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et soit $L = \Delta + X$ comme ci-dessus. Supposons l'hypothèse (H) vérifiée. Alors*

(i) *Soit $0 < \theta < 1$. Alors pour tout p vérifiant*

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \theta}} < p < \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \theta}},$$

pour tout $k = 1, 2, \dots$ et pour tout $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ la transformée de Riesz multiple $X_{i_1} \dots X_{i_k} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est bornée de $L^p(G, \chi^{-2}d^r g)$ dans $L^p(G, \chi^{-2}d^r g)$. De plus si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls et si $p \leq 2/(1 + \sqrt{1 - \theta})$ ou $p \geq 2/(1 - \sqrt{1 - \theta})$ $X_{i_1} \dots X_{i_k} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non bornée de $L^p(G, \chi^{-2}d^r g)$ dans $L^p(\chi^{-2}d^r g)$.

(ii) *Si $\theta = 0$ alors pour tout $k = 1, 2, \dots$ et pour tout $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$ l'opérateur $X_{i_1} \dots X_{i_k} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est borné sur $L^p(G, \chi^{-2}d^r g)$ pour tout $1 < p < \infty$.*

(iii) *Si $\theta = 1$ et si les coefficients c_{i_k} sont tous non nuls $X_{i_1} \dots X_{i_k} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ est non borné sur $L^p(G, \chi^{-2}d^r g)$, $\forall 1 < p < \infty$.*

III. PREUVE DES THÉORÈMES

III. 1. Dans \mathbb{R}^n l'opérateur $L = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + c_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ définit bien un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)$. En effet, les notations étant les mêmes que dans §II, on a:

$$\varphi \Delta(\varphi^{-1} f) = - \left(\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n c_j^2 \right) f + Xf + \Delta f.$$

D'où l'on déduit la relation de conjugaison

$$(1) \quad Lf = \varphi(\Delta + \lambda)\varphi^{-1} f.$$

Ce qui montre que l'opérateur L est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)$. On déduit aussi de (1) que

$$(Lf, f)_{L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)} \geq \lambda \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)}^2.$$

On a aussi

$$\mathcal{L}_\theta f = \varphi(\Delta + (1 - \theta)\lambda)\varphi^{-1} f$$

et par conséquent l'opérateur \mathcal{L}_θ vérifie

$$(\mathcal{L}_\theta f, f)_{L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)} \geq (1 - \theta)\lambda \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2} dx)}^2.$$

Dans le cas général d'un groupe de Lie muni d'un sous-Laplacien avec "Drift" vérifiant l'hypothèse (H) on a la relation de conjugaison

$$(2) \quad \mathcal{L}_\theta f = \chi(\Delta + (1 - \theta)\lambda)\chi^{-1} f.$$

III. 2. Nous aurons besoin des deux ingrédients suivants:

Lemme 1. *Soit G un groupe de Lie connexe. Soit χ un caractère sur G et X un champ de vecteurs invariant à gauche tel que $X(\chi) \neq 0$. Soit $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe $C > 0$*

$$\int |f(x)|^p \chi(x) d^r x \leq C \int |Xf(x)|^p \chi(x) d^r x, \quad f \in C_0^\infty(G),$$

où $d^r x$ est la mesure de Haar invariante à droite sur G .

Lemme 2. *Soit G un groupe de Lie connexe moyennable et $\Delta = -\sum X_j^2$ un sous-Laplacien invariant à gauche sur G et soit χ un caractère sur G tel que $\Delta(\chi) = \lambda\chi$. Alors*

$$\begin{aligned} & \|\exp(-t\chi(L + (1 - \theta)\lambda)\chi^{-1})\|_{L^p(G, \chi^{-2}d^r x) \rightarrow L^p(G, \chi^{-2}d^r x)} \\ &= \exp\left(\left[\left(1 - \frac{2}{p}\right)^2 - (1 - \theta)\right]\lambda t\right). \end{aligned}$$

La preuve du Lemme 1 est une adaptation facile de la proposition IX.2.1 de [12]. Pour la preuve du Lemme 2, notons T_t le semi-groupe engendré par Δ et ϕ_t son noyau, i.e. le noyau donné par (cf. [12])

$$T_t f(x) = \int \phi_t(y^{-1}x) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(G).$$

Alors

$$\begin{aligned} \exp(-t\chi(L + (1 - \theta)\lambda)\chi^{-1})f(x) &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t)\chi T_t \chi^{-1} f(x) \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) \int (\chi\phi_t)(y^{-1}x) f(y) dy \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) f * (\chi\phi_t)(g) d^r g. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \|\exp(-t\chi(L + (1 - \theta)\lambda)\chi^{-1})\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x) \rightarrow L^p(\chi^{-2}d^r x)} \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) \sup_{f \neq 0} \frac{\|\chi^{-2/p} [f * \chi\phi_t d^r g]\|_{L^p(G, d^r g)}}{\|f\|_{L^p(G, d^r g)}} \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) \sup_{f \neq 0} \frac{\|(\chi^{-2/p} f) * (\chi^{-2/p+1} \phi_t d^r g)\|_{L^p(G, d^r g)}}{\|f\|_{L^p(G, d^r g)}} \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) \int \chi^{-2/p+1}(g) \phi_t(g) d^r g, \end{aligned}$$

du fait de la moyennabilité de G (cf. [10]). D'où en effectuant le changement de variable $g \longleftrightarrow g^{-1}$

$$\begin{aligned} & \|\exp(-t\chi(L + (1 - \theta)\lambda)\chi^{-1})\|_{L^p(\chi^{-2}dx) \rightarrow L^p(\chi^{-2}dx)} \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) \int \chi^{2/p-1}(g)\phi_t(g^{-1}) dg \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) T_t(\chi^{2/p-1})(e) \\ &= \exp(-(1 - \theta)\lambda t) \exp\left(t\left(\frac{2}{p} - 1\right)^2 \lambda\right) \\ &= \exp\left(\left[\left(\frac{2}{p} - 1\right)^2 - (1 - \theta)\right] \lambda t\right). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 2.

III. 3. Maintenant notons $T_t^\theta = \exp(-t\mathcal{L}_\theta)$, $t > 0$, le semi-groupe engendré par \mathcal{L}_θ . On alors (cf. [6])

$$\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = c \int_0^\infty t^{k/2} T_t^\theta \frac{dt}{t}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

où $c = \Gamma(k/2)^{-1}$. La transformée de Riesz multiple $\mathcal{R}_k^\theta = X_{i_1} \dots X_{i_k} \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, que nous noterons $\mathcal{R}_k^\theta = X_1 \dots X_k \mathcal{L}_\theta^{-k/2}$ afin d'alléger les notations, peut être décomposée de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k^\theta &= c \int_0^1 t^{k/2} X_1 \dots X_k T_t^\theta \frac{dt}{t} + c \int_1^\infty t^{k/2} X_1 \dots X_k T_t^\theta \frac{dt}{t} \\ &= \mathcal{R}_{k,0}^\theta + \mathcal{R}_{k,\infty}^\theta, \end{aligned}$$

et si on note $\phi_t^\theta(\cdot)$ le noyau associé à T_t^θ , on a, par le principe de Harnack local parabolique (cf. [12])

$$|X_1 \dots X_k \phi_t^\theta(g)| \leq C \phi_{t+1}^\theta(g), \quad t \geq 1, g \in G.$$

D'où

$$\|\mathcal{R}_{k,\infty}^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}dx) \rightarrow L^p(\chi^{-2}dx)} \leq C \int_1^\infty t^{k/2-1} \|T_t^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}dx) \rightarrow L^p(\chi^{-2}dx)} dt.$$

En utilisant la relation de conjugaison (2) et le lemme 2 déduit alors que

$$\|\mathcal{R}_{k,\infty}^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}dx) \rightarrow L^p(\chi^{-2}dx)} < \infty$$

dès que $(1 - 2/p)^2 - (1 - \theta) < 0$, i.e., dès que

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \theta}} < p < \frac{2}{1 - \sqrt{1 + \theta}}$$

dans le cas où $0 < \theta < 1$, et dès que $p > 1$ dans le cas où $\theta = 0$.

III. 4. La partie locale $\mathcal{R}_{k,0}^\theta$ est bornée sur $L^p(\chi^{-2}d^r x)$ pour tout $1 < p < \infty$. En effet, soit $A > 0$, écrivons

$$\begin{aligned} R_0 &= c \int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)) dt \\ &\quad + c \int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k (\exp(-t\mathcal{L}_\theta) - \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))) dt \\ &= c \int_0^\infty t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)) dt \\ &\quad - c \int_1^\infty t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)) dt \\ &\quad + c \int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k ((\exp(-t\mathcal{L}_\theta) - \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)))) dt \\ &= -c \int_1^\infty t^{k/2-1} X_1 \dots X_k \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)) dt \\ &\quad + X_1 \dots X_k (\mathcal{L}_\theta + AI)^{-k/2} \\ &\quad + c \int_0^1 t^{k/2-1} X_1 \dots X_k (\exp(-t\mathcal{L}_\theta) \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI))) dt \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

La bornitude de l'opérateur I résulte du principe de Harnack parabolique (qui permet d'estimer le noyau $|X_1 \dots X_k \phi_t^\theta(\cdot)|$ par $\phi_{t+1}^\theta(\cdot)$, $t > 1$) et de la présence du facteur $\exp(-At)$ qui permet pour un A assez grand d'absorber la croissance exponentielle de la norme $\|T_t^\theta\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x) \rightarrow L^p(\chi^{-2}d^r x)}$ et de faire converger l'intégrale. La bornitude de la transformée de Riesz $II = X_1 \dots X_k (AI + \Delta)^{-k/2}$, pour A est assez grand, découle de faits bien connus (cf. [7], [11]). Enfin le noyau de $X_1 \dots X_k ((\exp -t(\mathcal{L}_\theta) - \exp(-t(\mathcal{L}_\theta + AI)))$ est donné par

$$(3) \quad (1 - e^{-At})X_1 \dots X_k \phi_t^\theta \sim tX_1 \dots X_k \phi_t^\theta$$

et par le Théorème V.4.2 de [12], il existe $C > 0$ et $c > 0$ telles que

$$(4) \quad |X_1 \dots X_k \phi_t^\theta(g)| \leq Ct^{-k/2} \phi_{ct}^\theta(g), \quad \forall g \in G, \forall 0 < t < 1.$$

En utilisant (3) et (4) on déduit facilement la bornitude de III .

III. 5. Supposons maintenant que les champs X_j sont tels que $X_j(\chi) \not\equiv 0$ (i.e. $c_j \neq 0$ avec les notations du §II). Alors, si $\theta \neq 0$ et si $p \geq 2/(1 - \sqrt{1 - \theta})$ ou $p \leq 2/(1 + \sqrt{1 - \theta})$ la bornitude de la transformée de Riesz \mathcal{R}_k^θ entraînerait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$(5) \quad \|\mathcal{R}_k^\theta f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} = \|X_1 \dots X_k \mathcal{L}_\theta^{-k/2} f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} \leq C \|f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)}.$$

Mais, par le lemme 1, l'estimation (5) implique que

$$\|X_1 \dots X_k f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} \leq \|f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)} \leq \|\mathcal{L}_\theta^{k/2} f\|_{L^p(\chi^{-2}d^r x)}$$

et donc que

$$\mathcal{L}_\theta^{-k/2} = c \int_0^\infty t^{k/2-1} T_t^\theta dt : L^p(G, \chi^{-2}d^r x) \longrightarrow L^p(G, \chi^{-2}d^r x),$$

ce qui est incompatible avec le fait que

$$\|T_t^\theta\|_{L^p(G, \chi^{-2d^r x}) \rightarrow L^p(G, \chi^{-2d^r x})} = \exp\left(\left[\left(\frac{2}{p} - 1\right)^2 - (1 - \theta)\right] \lambda t\right) \geq 1,$$

pour tout $t > 0$ dès que $p \geq 2/(1 - \sqrt{1 - \theta})$ ou $p \leq 2/(1 + \sqrt{1 - \theta})$.

III. 6. La première partie de l’assertion (i) du théorème 2 et l’assertion (ii) résultent immédiatement de (III.3) et (III.4). La deuxième partie de l’assertion (i) et l’assertion (iii) résultent de (III.5).

IV. EXEMPLES

Le cas du groupe de Heisenberg \mathbf{H}_n . Considérons dans \mathbf{H}_n —le groupe de Heisenberg de dimension $2n + 1$ —les champs de vecteurs invariants à gauche définis par

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial u}, \\ Y_j &= \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

$1 \leq j \leq n$, les coordonnées sur \mathbf{H}_n étant données par $(x, y, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Soit L le sous-Laplacien avec Drift défini par

$$L = - \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 + Y_j^2 \right) + \sum_{j=1}^n a_j X_j + b_j Y_j$$

où $a_j, b_j \in \mathbf{R}$. Il est facile de voir que l’opérateur L vérifie l’hypothèse (H) sur \mathbf{H}_n pour le caractère χ défini par

$$\chi(g) = \chi(x, y, u) = \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (a_j x_j + b_j y_j) \right], \quad g = (x, y, u) \in \mathbf{H}_n,$$

et

$$\lambda = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (a_j^2 + b_j^2).$$

Le cas des groupes NA. Il s’agit d’une classe de groupes résolubles non-unimodulaires généralisant les groupes NA associés aux espaces symétriques de rang 1 (cf. [5]). Rappelons que si \mathcal{N} est une algèbre de Lie réelle nilpotente de rang 2 munie d’un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et si \mathcal{Z} est son centre et $\mathcal{B} = \mathcal{Z}^\perp$ alors \mathcal{N} est dite de type (H) si pour tout $X \in \mathcal{B}$ tel que $|X| = 1$, $\text{ad}(X)$ est une isométrie surjective de $\text{Ker}(\text{ad}(X))^\perp \rightarrow \mathcal{Z}$. Notons N le groupe de Lie simplement connexe correspondant à \mathcal{N} . L’application exponentielle permet de paramétrer les éléments de $N = \exp(\mathcal{N})$ par $(X, Z) \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z}$ de sorte que

$$(X, Z)(X', Z') = (X + X', Z + Z' + 1/2[X, X']).$$

On note $m = \dim(\mathcal{B})$, $k = \dim(\mathcal{Z})$ et $Q = m/2 + k$ la dimension homogène de N . Posons $A = \mathbf{R}^+$ et considérons l’action de A sur N définie par: $(X, Z) \rightarrow$

$(a^{1/2}X, aZ)$, $a \in A$. On note S le produit semi-direct NA associé à cette action. S est une extension résoluble de N . Le produit de deux éléments de S est donné par

$$(X, Z, a)(X', Z', a') = (X + a^{1/2}X', Z + aZ' + 1/2a^{1/2}[X, X'], aa'),$$

pour tout $(X, Z, a), (X', Z', a') \in S$. Sur $\mathcal{S} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathbb{R}$ (l'algèbre de Lie de S) on considère le produit scalaire

$$((X, Z, t)|(X', Z', t')) = (X|X') + (Z|Z') + tt'.$$

La mesure de Haar invariante à gauche (resp.: à droite) sur S est donnée par $d^l x = dx = a^{-Q-1} dX dZ da$ (resp.: $d^r x = a^{-1} dX dZ da$). Le groupe S est non unimodulaire et la fonction module δ est donnée par $\delta(X, Z, a) = d^l x / d^r x = a^{-Q}$.

Soient $e_1, \dots, e_m \in \mathcal{B}$, $e_{m+1}, \dots, e_{m+k} \in \mathcal{Z}$, $e_0 \in \mathbb{R}$ formant une base orthonormée de $\mathcal{S} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathbb{R}$. On note X_j , $j = 0, \dots, m+k$, les champs de vecteurs invariants à gauche définis par les vecteurs e_j et L l'opérateur défini par

$$(6) \quad L = \Delta + \alpha X_0 = -(X_0^2 + X_1^2 + \dots + X_{m+k}^2) + \alpha X_0$$

où $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

En utilisant le fait que les champs X_1, \dots, X_{m+k} ne contiennent pas de dérivation en a et que $X_0 = a\partial_a$ (cf. [5]) on voit facilement que l'opérateur L défini par (6) vérifie l'hypothèse (H) sur le groupe S avec $\chi = a^{\alpha/2}$ et $\lambda = \alpha^2/4$.

Remarquons que si $\alpha = Q$, alors L coïncide, au signe près, avec l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique riemannienne invariante à gauche induite par le produit scalaire sur \mathcal{S} et l'espace $L^p(S, a^{-\alpha} d^r g) = L^p(S, a^{-Q} d^r g) = L^p(S, d^l g)$ est l'espace de Lebesgue associé à la mesure de Haar invariante à gauche sur S . Le résultat (ii) du théorème 2 est dans ce cas contenu dans [3].

REFERENCES

- [1] G. Alexopoulos, *An application of homogenization theory to harmonic analysis: Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups of polynomial growth*, *Canad. J. Math.* **44** (1992), 691–727. MR **93j**:22006
- [2] G. Alexopoulos, *Puissances de convolution sur les groupes à croissance polynomiale du volume*, *C. R. Acad. Sci. Série I* **324** (1997), 771–776. MR **98a**:43001
- [3] J.-P. Anker, E. Damek, C. Yacoub, *Spherical analysis on harmonic AN groups*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **23** (1996), 643–679. MR **99a**:22014
- [4] R. R. Coifman et G. Weiss, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 242, Springer-Verlag, 1971. MR **58**:17690
- [5] E. Damek et F. Ricci, *Harmonic analysis on solvable extensions of H-type groups*, *J. Geom. Anal.* **3** (1992), 213–248. MR **93d**:43006
- [6] B. M. Davies, *One-parameter semigroups*, Academic Press, 1980. MR **82i**:47060
- [7] N. Lohoué, *Transformées de Riesz et fonctions de Littlewood Paley sur les groupes non moyennables*, *C. R. Acad. Sci. Série I* **306** (1988), 327–330. MR **89b**:43008
- [8] N. Lohoué, *Transformées de Riesz et fonctions sommables*, *Amer. J. Math.* **114** (1992), 875–992. MR **93k**:58214
- [9] N. Lohoué et S. Mustapha, *Sur les transformées de Riesz sur les groupes de Lie moyennables et sur certains espaces homogènes*, *Canad. J. Math.* **50** (1998), 1090–1104. MR **2000a**:43008
- [10] H. Reiter, *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*, *Oxford Math. Monograph*, 1968. MR **46**:5933
- [11] D. W. Robinson, *Elliptic Operators and Lie Groups*, Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991. MR **92m**:58133

- [12] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste et Th. Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge Tracts in Math., 100, 1993. MR **95f**:43008
- [13] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1978. MR **58**:17765

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BÂT. 425, UNIVERSITÉ PARIS XI, 91405, ORSAY CEDEX,
FRANCE

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ PARIS VI, 4, PLACE JUSSIEU, 75252, PARIS CEDEX,
FRANCE