

## ESTIMATIONS $L^p$ DES FONCTIONS DU LAPLACIEN SUR LES VARIÉTÉS CUSPIDALES

HONG-QUAN LI

RÉSUMÉ. Le but de cet article est d'étudier la continuité  $L^p$  des fonctions du Laplacien sur les variétés cuspidales.

### 1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

On considère  $M$  une variété différentiable, munie d'une mesure  $d\sigma$ . Soit  $L$  un opérateur différentiel du second ordre, positif et essentiellement auto-adjoint sur  $C_0^\infty(M)$ . Pour une fonction borélienne  $m : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , l'opérateur  $m(\sqrt{L})$  est définie par le théorème spectral. Quand  $m$  est bornée, on sait bien que  $m(\sqrt{L})$  est borné sur  $L^2(M)$ . On s'intéresse à montrer la continuité  $L^p(M)$  ( $p \neq 2$ ) de  $m(\sqrt{L})$ . En particulier, on aime bien trouver des conditions sur  $m$  qui permettent d'assurer que  $m(\sqrt{L})$  est borné sur  $L^p$  pour tout  $1 < p < +\infty$ .

Dans le cadre des espaces euclidiens  $\mathbb{R}^n$  (avec  $-L = \Delta$  le Laplacien), par [35] et [50], on sait que  $m(L)$  est borné sur  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $1 < p < +\infty$  si  $m$  satisfait la condition de Mikhlin-Hörmander, c'est-à-dire,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]+1} \sup_{\lambda>0} \lambda^k |m^{(k)}(\lambda)| < +\infty,$$

où  $[s]$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) désigne la partie entière de  $s$ . On peut se reporter à [60] pour d'autres types de conditions.

Dans le cas où  $M$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  et  $L = -\Delta + C$  avec  $\Delta$  le Laplacien et  $C \geq 0$  une constante, d'après le travail de A. Seeger et C.D. Sogge (voir [55]), on sait que  $m(\sqrt{L})$  est borné sur  $L^p$  pour tout  $1 < p < +\infty$  s'il existe  $\alpha > \frac{n}{2}$  et une fonction positive  $\beta \in C_0^\infty([1, 2])$  telles que:

$$\sup_{s>0} \left\| \beta(\cdot) m(s \cdot) \right\|_{L_\alpha^2(\mathbb{R})} < +\infty.$$

Et on peut trouver un résultat plus général dans [56].

Dans le cadre des groupes de Lie à croissance polynomiale avec  $-L = \Delta$  un sous-Laplacien, on trouve des résultats analogues aux cas précédents, voir par exemple [37], [19], [20], [49], [14], [57], [29], [51], [1] et [30].

Dans le cadre des groupes de Lie à croissance exponentielle, les résultats sont très variés, voir par exemple [28], [31]-[33], [17], [9], [8], [15], [53], [54], [47], [58], [34] et [27].

---

Received by the editors August 9, 2003.

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 42B15, 42B20.

©2004 American Mathematical Society  
Reverts to public domain 28 years from publication

Dans le cadre des espaces symétriques de type non compact, par le travail de Clerc et Stein (voir [13]), on doit supposer que  $m$  est holomorphe dans une certaine bande de  $\mathbb{C}$  pour que  $m(L)$  soit borné dans  $L^p$  pour tout  $1 < p < +\infty$ . Et on trouve les travaux [59], [5]-[7], [26], [38]-[40] qui sont consacrés à l'étude des multiplicateurs spectraux sur les espaces symétriques de type non compact.

On peut se reporter à [41], [23], [2]-[4], [21], [18], [46], [24], [22] et les références dedans pour l'étude de multiplicateurs spectraux dans d'autres situations.

Dans [63], M.E. Taylor a étudié la continuité  $L^p$  des fonctions du Laplacien sur une classe très large des variétés, les variétés riemanniennes à géométrie bornée. Dans cet article, on se propose d'établir un résultat analogue à celui de [63] dans le cadre des variétés cuspidales.

Avant d'énoncer notre résultat, nous rappelons quelques définitions et notations:

Si  $X$  est une variété riemannienne de dimension  $N$ , avec un bord  $\partial X$  (on admet  $\partial X = \emptyset$ ), on définit  $\text{Cusp}(X)$  comme étant l'espace  $\mathbb{R}^+ \times X$  muni de la métrique riemannienne  $r^{-2}(dr^2 + g_x)$ , où  $g_x$  est la métrique riemannienne sur  $X$ . Par exemple, si  $X$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^N$ , alors  $\text{Cusp}(X)$  est l'espace hyperbolique réel de dimension  $N + 1$ . On note  $d_X$  (resp.  $d$ ) la distance riemannienne induite sur  $X$  (resp.  $\text{Cusp}(X)$ ),  $d\mu$  (resp.  $d\mu_X$ ) la mesure riemannienne induite sur  $\text{Cusp}(X)$  (resp.  $X$ ),  $\Delta$  le Laplacien sur  $\text{Cusp}(X)$ . Notons  $B(Y, r)$  ( $Y \in \text{Cusp}(X)$ ,  $r > 0$ ) la boule géodésique de centre  $Y$  et de rayon  $r$ ,  $|B(Y, r)|$  son volume et

$$L = -\Delta - \frac{N^2}{4}$$

où  $\frac{N^2}{4}$  est la base du spectre  $-\Delta$  dans  $L^2(\text{Cusp}(X))$  (voir la proposition 2.4 de [44]).

Rappelons que (voir la proposition 2.2 de [44])

(1.1)

$$d((y, x), (y', x')) = \text{arc cosh} \frac{y^2 + y'^2 + d_X^2(x, x')}{2yy'}, \quad \forall (y, x), (y', x') \in \text{Cusp}(X).$$

La difficulté particulière des variétés cuspidales tient à ce que la courbure de Ricci n'est pas toujours minorée, que le rayon d'injectivité peut être nul et que le volume des boules est à croissance exponentielle. Pour d'autres informations sur les variétés cuspidales, on pourra se reporter par exemple aux [52] et [44].

Dans cet article, on utilisera les notations de [63],

$$\overline{\Omega}_W = \{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \leq W\},$$

$\Omega_W$  est l'intérieur de  $\overline{\Omega}_W$  et

$$\mathcal{F}_W^s = \{\Psi \text{ est holomorphe et paire dans } \Omega_W :$$

$$|\Psi^{(j)}(z)| \leq C_j(1 + |z|^2)^{\frac{s-j}{2}}, \quad \forall z \in \overline{\Omega}_W\}.$$

Dans cet article, on va montrer le théorème suivant:

**Théorème 1.1.** *Soit  $X$  une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension  $N \geq 2$ . Pour  $1 < p < +\infty$ , quand  $m_o \in \mathcal{F}_W^0$  avec  $W \geq N|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$ ,  $m_o(\sqrt{L})$  est borné sur  $L^p(\text{Cusp}(X))$ . De plus, quand  $m_o \in \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}^0$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que:*

$$\mu\left\{Y \in \text{Cusp}(X); |m_o(\sqrt{L})f(Y)| > \lambda\right\} \leq C \frac{\|f\|_1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0, \forall f \in L^1(\text{Cusp}(X)).$$

On remarque que dans le theorem A de [63], on n'a obtenu aucune information concernant la continuité  $L^1 \rightarrow L^{1,\infty}$  de  $m(\sqrt{L})$ ; pour montrer les résultats de [63], Taylor a utilisé la formule

$$m(\sqrt{L}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \widehat{m}(t) \cos(t\sqrt{L}) dt$$

où

$$\widehat{m}(h) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} m(t) \cosh th dt,$$

la théorie des opérateurs pseudo-différentiables, et les estimations du noyau des fonctions du Laplacien établies dans [11].

Dans cet article, on va utiliser la méthode de la séparation des variables pour montrer notre résultat. On peut trouver aussi quelques affinements du théorème 1.1 dans cet article.

Cet article est organisé de la façon suivante: dans la section 2, on utilise les résultats de [52] pour donner la formule du noyau de  $m(\sqrt{L})$  et on montre le théorème 1.1 dans la section 3.

## 2. LE NOYAU DE $m(\sqrt{L})$

Dans toute la suite,  $C$ ,  $C_*$ ,  $C^*$ , etc. désigneront des constantes universelles qui dépendent peut-être des propriétés de  $X$ . Celles-ci pourront changer d'une ligne à une autre. Et dans la suite,  $m$  désignera une fonction borélienne, bornée, paire définie sur  $\mathbb{R}$ , celle-ci pourra changer d'une proposition à l'autre et d'un lemme à l'autre.

En utilisant la méthode de la séparation des variables et la transformation de Kantorovitch-Lebedjev, W. Müller a obtenu une représentation spectrale de  $-\Delta$ , voir [52] (p. 207). Donc, en répétant la méthode de la construction des fonctions du Laplacien dans le cadre des variétés coniques (voir par exemple [12]), on peut considérer  $m(\sqrt{L})$  comme  $k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_X})$ , une distribution sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  à valeur dans l'espace des opérateurs sur  $L^2(X)$ , avec

$$\begin{aligned} (2.1) \quad k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_X}) &= (yy')^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} m(\sqrt{\lambda}) K_{i\sqrt{\lambda}}(y\sqrt{-\Delta_X}) K_{i\sqrt{\lambda}}(y'\sqrt{-\Delta_X}) \frac{\sinh \pi\sqrt{\lambda}}{\pi^2} d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi^2} (yy')^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) K_{i\lambda}(y\sqrt{-\Delta_X}) K_{i\lambda}(y'\sqrt{-\Delta_X}) \sinh(\pi\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

où  $K_\nu(x)$  ( $x > 0$ ,  $\nu \in \mathbb{C}$ ) désigne la fonction de Bessel modifiée.

En général, (2.1) ne serait pas très utile dans les applications. Donc, on aime bien la simplifier. Rappelons que (voir par exemple [48], p. 96)

$$\begin{aligned} K_{i\lambda}(ys) K_{i\lambda}(y's) &= \frac{\pi}{2} (yy')^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\cosh(\pi\lambda)} \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}\left(\frac{t^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}\right) \cos(ts) dt, \quad \forall y, y', s > 0, \end{aligned}$$

où  $\beta_\nu^\mu(s)$  ( $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ ,  $s > 1$ ) désigne les fonctions de Legendre du second genre. D'après les propriétés suivantes de  $\beta_\nu^\mu$  (voir par exemple [48] pp. 174, 196 et 201-202),

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\beta_\nu(z) &= (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\beta_\nu^1(z), \\ \beta_\nu^k(z) &= 2^{-\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(\nu + k + 1)}{m!\Gamma(\nu - k + 1)}(z - 1)^{\frac{k}{2}}(1 + 0(1)) \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \text{quand } z \rightarrow 1^+, \\ \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}^\mu(\cosh a) &\sim \left(\frac{\sinh a}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\mu-1}\cos\left(a\lambda + \frac{\pi\mu}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{quand } \lambda \gg 1;\end{aligned}$$

on déduit que quand  $\lambda m(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^+, d\lambda)$  et  $s > 0$ , on a:

$$\begin{aligned}2 \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) K_{i\lambda}(ys) K_{i\lambda}(y's) \frac{\sinh(\pi\lambda)}{\pi^2} d\lambda \\ &= \frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) \tanh(\pi\lambda) \\ &\quad \times \left[ \frac{-1}{s} \int_0^{+\infty} \sin(ts) \frac{\partial}{\partial t} \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}\left(\frac{t^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}\right) dt \right] d\lambda \\ &= \frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-1}{s} \sin(ts) \\ &\quad \times \left[ \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) \tanh(\pi\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}\left(\frac{t^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}\right) d\lambda \right] dt \\ &= \frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{-1}{s} \sin(ts) \frac{\partial}{\partial t} \\ &\quad \times \left[ \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) \tanh(\pi\lambda) \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}\left(\frac{t^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}\right) d\lambda \right] dt \\ &= \frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(ts) \\ &\quad \times \left[ \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) \tanh(\pi\lambda) \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}\left(\frac{t^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}\right) d\lambda \right] dt.\end{aligned}$$

Or,

$$\tanh(\pi\lambda)\beta_{i\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh a) = C \int_a^{+\infty} \frac{\sin \lambda h}{\sqrt{\cosh h - \cosh a}} dh, \quad \forall a > 0, \lambda \in \mathbb{R},$$

où  $C > 0$  est une constante, voir [48] (p. 422); donc, quand  $\lambda m(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^+, d\lambda)$ , pour tout  $s > 0$ , on a:

$$\begin{aligned}2 \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) K_{i\lambda}(ys) K_{i\lambda}(y's) \frac{\sinh(\pi\lambda)}{\pi^2} d\lambda \\ &= C(yy')^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(ts) \left\{ \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) \left[ \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{\sin(\lambda h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh \right] d\lambda \right\} dt \\ &= C'(yy')^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(ts) \left[ \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{-\widehat{m}'(h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh \right] dt,\end{aligned}$$

où

$$(2.2) \quad \eta(t) = \operatorname{arc} \cosh \frac{y^2 + y'^2 + t^2}{2yy'}.$$

Autrement dit, quand  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda) \cap L^1(\mathbb{R}^+, \lambda d\lambda)$ , on a:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} m(\sqrt{L}) &= k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_X}) \\ &= C(yy')^{\frac{N-1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_X}) \left[ \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{-\widehat{m}'(h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh \right] dt. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations, on note

$$\begin{aligned} F_m(s) &= \int_s^{+\infty} \frac{-\widehat{m}'(h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh s}} dh \quad (s > 0), \quad Y = (y, x), \\ Y' &= (y', x'), \quad d_X = d_X(x, x') \text{ et } d = d(Y, Y'); \end{aligned}$$

d'après (1.1), on a  $d = \eta(d_X)$ .

### 3. PREUVE DU THÉORÈME 1.1

Dans cet article, on a besoin des résultats sur la solution fondamentale de l'équation des ondes sur  $X$  (voir par exemple [10], pp. 252-258, ou [36], §17.4): il existe une constante  $1 \geq \zeta_o > 0$  telle que pour tout  $0 < s \leq \zeta_o$ , on a (formellement):

$$(3.1) \quad \cos s\nu(x, x') = \sum_{k=0}^K u_k(x, x') s \frac{(s^2 - d_X^2)_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)} \Big|_{l=\frac{N+1}{2}} + sC_K(s, x, x'),$$

où  $u_k(x, x') \in C^\infty(X \times X)$  et le sens de l'opérateur  $\frac{(s^2 - d_X^2(x, x'))_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)} \Big|_{l=\frac{N+1}{2}}$  (pour  $0 < s \leq \zeta_o$ ) est donné dans §3.4. de [25];  $C_K(s, x, x') \in C^2([0, \zeta_o] \times X \times X)$  (si on choisit  $K$  assez grand, par exemple  $K = N + 3$ ) et on sait que:

1.  $C_K(s, x, x') = 0$  quand  $d_X = d_X(x, x') > s$ .
2. Quand  $s \in (0, \zeta_o]$ ,  $\frac{(s^2 - d_X^2)_+^{k - \frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{N+1}{2} + 1)}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) est  $C^\infty$  par rapport par  $s$ , et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \frac{(s^2 - d_X^2)_+^{k - \frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{N+1}{2} + 1)} &= 2s \frac{(s^2 - d_X^2)_+^{k - \frac{N+1}{2} - 1}}{\Gamma(k - \frac{N+1}{2})}, \quad \forall s \in (0, \zeta_o], \\ \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{(s^2 - d_X^2)_+^{k - \frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{N+1}{2} + 1)} &= 0. \end{aligned}$$

Pour  $x, x' \in X$  fixés, on peut considérer  $\frac{(s^2 - d_X^2)_+^{k - \frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{N+1}{2} + 1)}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) comme une distribution en  $s \geq 0$ , dont le sens est donné dans [25], chap. I, §3. Et en notant  $\delta$  la mesure de Dirac, on a (voir [25] p. 184):

$$(3.2) \quad 2s \frac{(s^2 - d_X^2)_+^{-1}}{\Gamma(0)} = 2s\delta(s^2 - d_X^2) = \delta(s - d_X), \quad \forall s \geq 0.$$

Pour estimer le noyau de  $m(\sqrt{L}) = k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_X})$ , on le divise par deux morceaux. Plus précisément, choisissons  $\zeta_o > 0$  comme dans (3.1) et  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

telle que

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi(s) = \psi(-s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \leq \left(\frac{1}{4}\sqrt{\zeta_o}\right)^4, \\ 0 & \text{si } |s| \geq \left(\frac{1}{2}\sqrt{\zeta_o}\right)^4, \end{cases}$$

fixons

$$\phi(s) = \psi(s^2), \quad \varphi(s) = 1 - \phi(s) \quad (s \in \mathbb{R});$$

notons

$$\begin{aligned} m(\sqrt{L}) &= k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_X}) = m_{loc} + m_{inf} \\ &= C(yy')^{\frac{N-1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_X})\phi(t)F_m(\eta(t)) dt \\ (3.3) \quad &+ C(yy')^{\frac{N-1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_X})\varphi(t)F_m(\eta(t)) dt. \end{aligned}$$

On va montrer la proposition suivante:

**Proposition 3.1.** *Soit X une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension  $N \geq 2$ . Si  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda) \cap L^1(\mathbb{R}^+, \lambda d\lambda)$ , et il existe deux constantes  $\varpi_o > 1, M > 0$  telles que*

$$(3.4) \quad \left| \left( \frac{1}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right)^k (-\widehat{m})(t) \right| \leq M(1+t)^{-\varpi_o} [\cosh t]^{-\left(\frac{N}{2}+k\right)}, \quad \forall t > 0, k = 0, 1, \dots, N+2.$$

Alors, il existe une constante  $C(\varpi_o)$  qui ne dépend que de  $\varpi_o$  et des propriétés de X telle que:

$$\|m(\sqrt{L})f\|_{L^p(\text{Cusp}(X))} \leq C(\varpi_o)M\|f\|_{L^p(\text{Cusp}(X))}, \quad \forall f \in L^p \quad (1 \leq p \leq +\infty).$$

*Preuve.* Il suffit de montrer que

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} [|m_{loc}| + |m_{inf}|] d\mu(Y') \leq C(\varpi_o)M,$$

où  $m_{loc}$  et  $m_{inf}$  sont définis par (3.3).

On commence par estimer  $|m_{loc}|$ . On utilise la paramétrice de  $\cos t\sqrt{-\Delta_X}$  (voir (3.1)), et puisque  $\phi(t) = 0$  si  $t \geq \frac{\zeta_o}{4}$  et  $C_K(t, x, x') = 0$  quand  $d_X = d_X(x, x') > t$ , en utilisant les estimations (3.4), on a:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \phi(t)tC_K(t, x, x')F_m(\eta(t)) dt \right| \\ & \leq CM \int_{d_X}^{+\infty} \phi(t) \left\{ \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{(1+h)^{-\varpi_o} \sinh h}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} [\cosh h]^{-\left(\frac{N}{2}+1\right)} dh \right\} dt \\ & \leq C_*M \sup_{t \geq d_X} \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{(1+h)^{-\varpi_o} \sinh h}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} [\cosh h]^{-\left(\frac{N}{2}+1\right)} dh \\ & \leq C'M(1+\eta(d_X))^{-\varpi_o} [\cosh \eta(d_X)]^{-\frac{N+1}{2}} \\ & \leq CM(1+d)^{-\varpi_o} e^{-\frac{N+1}{2}d}. \end{aligned}$$

Pour estimer

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_X^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t)) dt \right|,$$

on peut utiliser la façon de [45] (pp. 697-699) ou celle de [52] (pp. 223-225): quand  $\frac{N+1}{2} \in \mathbb{N}$ , en utilisant (3.2), on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_X^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t)) dt &= \frac{1}{2} (-1)^{\frac{N-1}{2}} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \Big|_{t=d_X} [\phi(t) F_m(\eta(t))] \\ &= \frac{1}{2} (-1)^{\frac{N-1}{2}} \frac{\partial^{\frac{N-1}{2}}}{\partial s^{\frac{N-1}{2}}} \Big|_{s=0} [\psi(d_X^2 + s) F_m(\eta(\sqrt{d_X^2 + s}))], \end{aligned}$$

par le changement de variable  $s = t^2 - d_X^2$  et le fait que  $\phi(t) = \psi(t^2)$ , quand  $\frac{N+1}{2} \notin \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_X^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t)) dt \\ &= (-1)^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{\frac{N}{2}}}{\partial s^{\frac{N}{2}}} [\psi(d_X^2 + s) F_m(\sqrt{d_X^2 + s})] \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} ds. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on note

$$(3.5) \quad \eta_*(s) = \eta(\sqrt{d_X^2 + s}) (s \geq 0), \quad \Xi_m(n+1, h) = \sinh h \left[ \frac{1}{\sinh h} \frac{d}{dh} \right]^{n+1} (-\widehat{m})(h).$$

D'après les propriétés de  $m$ , quand  $0 \leq n \leq [\frac{N}{2}]$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^n}{\partial s^n} F_m(\eta_*(s)) \right| &= \left| (2yy')^{-n} \int_{\eta_*(s)}^{+\infty} \frac{\Xi_m(n+1, h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta_*(s)}} dh \right| \\ &\leq (2yy')^{-n} M(1 + \eta_*(0))^{-\varpi_0} \int_{\eta_*(s)}^{+\infty} \frac{\sinh h [\cosh h]^{-\frac{N}{2} + n + 1}}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta_*(s)}} dh \\ &\leq C_n M(1+d)^{-\varpi_0} e^{-\frac{N+1}{2}d} (y^2 + y'^2 + d_X^2 + s)^{-n}. \end{aligned}$$

Donc, en remarquant que  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , on a:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_X^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t)) dt \right| \\ &\leq C(k) M(1+d)^{-\varpi_0} e^{-\frac{N+1}{2}d} \left[ 1 + (y^2 + y'^2 + d_X^2)^{-\frac{N-1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

De la même façon, pour  $1 \leq k \leq K$ , on a:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_X^2)_+^{k - \frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k - \frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t)) dt \right| \\ &\leq C(k) M(1+d)^{-\varpi_0} e^{-\frac{N+1}{2}d} \left[ 1 + (y^2 + y'^2 + d_X^2)^{-\max(0, \frac{N-3}{2})} \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(3.6) \quad |m_{loc}| \leq CM(1+d)^{-\varpi_0} \left[ e^{-Nd} + e^{-\frac{N+1}{2}d} (yy')^{\frac{N-1}{2}} \right].$$

D'après la proposition 2.3 de [44], quand  $\varpi_o > 1$ , on a:

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} (1+d)^{-\varpi_o} e^{-Nd} d\mu(Y') < C(\varpi_o).$$

Donc, pour montrer que:

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} |m_{loc}|(Y, Y') d\mu(Y') \leq C(\varpi_o)M,$$

il nous reste à montrer le lemme suivant:

**Lemme 3.2.** *Soient X une variété riemannienne compacte de dimension N, et  $\varpi_o > 1$  fixé. Alors*

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} (1+d)^{-\varpi_o} (yy')^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{N+1}{2}d} d\mu(Y') < C(\varpi_o).$$

*Preuve.* D'après (1.1), on voit qu'il existe une constante telle que pour tous  $Y, Y' \in \text{Cusp}(X)$ , on a:

$$(1+d)^{-\varpi_o} (yy')^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{N+1}{2}d} \leq C \left(1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right)^{-\varpi_o} (yy')^N (y^2 + y'^2 + d_X^2)^{-\frac{N+1}{2}}.$$

On distingue les deux cas suivants:  $0 < y \leq 1$  et  $y > 1$ .

Quand  $0 < y \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Cusp}(X)} \left[1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right]^{-\varpi_o} (yy')^N (y^2 + y'^2 + d_X^2)^{-\frac{N+1}{2}} d\mu(y', x') \\ & \leq \int_0^{+\infty} \left[1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right]^{-\varpi_o} (yy')^N \left[ \int_X (y^2 + y'^2 + d_X^2)^{-\frac{N+1}{2}} d\mu_X(x') \right] y'^{-N-1} dy' \\ & \leq C \int_0^{+\infty} \left[1 + \left| \ln \frac{y'}{y} \right| \right]^{-\varpi_o} (yy')^N (y^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'^{-N-1} dy' \\ & \leq C y^{N-1} \int_0^{+\infty} (1 + |\ln h|)^{-\varpi_o} (1 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{dh}{h} < C(\varpi_o). \end{aligned}$$

Quand  $y \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Cusp}(X)} \left[1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right]^{-\varpi_o} (yy')^N (y^2 + y'^2 + d_X^2)^{-\frac{N+1}{2}} d\mu(y', x') \\ & \leq \int_{\text{Cusp}(X)} \left[1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right]^{-\varpi_o} y'^N d\mu(y', x') \\ & \leq C \int_0^{+\infty} \left[1 + \left| \ln \frac{y'}{y} \right| \right]^{-\varpi_o} y'^{-1} dy' \leq C(\varpi_o). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

On va montrer

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} |m_{inf}|(Y, Y') d\mu(Y') \leq C(\varpi_o)M.$$

On commence par estimer  $|m_{inf}|$ , et on va utiliser le lemme suivant:

**Lemme 3.3.** *Soient  $X$  une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension  $N \geq 2$ , et  $\Phi \in C(\mathbb{R})$  une fonction paire. Alors,*

$$(3.7) \quad \sup \left\{ \left| \Phi(\sqrt{-\Delta_X})(x, x') - \frac{1}{|X|} \Phi(0) \right|; x, x' \in X \right\} \leq C \sup_{s>0} s^{N+1} |\Phi(s)|.$$

*Preuve.* Ce résultat a été utilisé dans [42]. Pour être complet, on donne sa preuve:

D'après le développement spectral de  $\Phi(\sqrt{-\Delta_X})$ , on peut choisir  $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$  telle que  $\kappa(s) = 0$  quand  $s \ll 1$ ,  $\kappa(s) = 1$  quand  $s$  est assez grand, et

$$\Phi(\sqrt{-\Delta_X})(x, x') = \frac{1}{|X|} \Phi(0) + [\kappa\Phi](\sqrt{-\Delta_X})(x, x').$$

Puisque  $(I - \Delta_X)^{-\frac{N+1}{4}}$  est borné de  $L^1(X)$  dans  $L^2(X)$  et aussi de  $L^2(X)$  dans  $L^\infty(X)$ , on a donc:

$$\begin{aligned} \left| [\kappa\Phi](\sqrt{-\Delta_X})(x, x') \right| &\leq \left\| [\kappa\Phi](\sqrt{-\Delta_X}) \right\|_{L^1(X) \rightarrow L^\infty(X)} \\ &\leq C \left\| (I - \Delta_X)^{\frac{N+1}{2}} [\kappa\Phi](\sqrt{-\Delta_X}) \right\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \\ &\leq C' \sup_{s \geq 0} (1 + s^2)^{\frac{N+1}{2}} |\kappa(s)\Phi(s)| \\ &\leq C \sup_{s > 0} s^{N+1} |\Phi(s)|. \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

On estime maintenant  $|m_{inf}|$ .

En utilisant le raisonnement par récurrence, on voit que pour  $k \in \mathbb{N}$ , il existe des constantes telles que:

$$(3.8) \quad \frac{d^k}{dt^k} F_m(\eta(t)) = \sum_{0 \leq l \leq n \leq k; n+(n-l)=k} t^l \frac{C(l, n, k)}{(2yy')^n} \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{\Xi_m(n+1, h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh.$$

On en déduit que pour  $0 \leq k \leq N + 1$  fixé, on a:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dt^k} F_m(\eta(t)) \right| &\leq C_k \sum_{0 \leq l \leq n \leq k; n+(n-l)=k} t^l (2yy')^{-n} \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{|\Xi_m(n+1, h)|}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh \\ &\leq MC_k \sum_{\eta(t)}^{+\infty} t^l (2yy')^{-n} \frac{(1+h)^{-\varpi_0} \sinh h [\cosh h]^{-\left(\frac{N}{2}+n+1\right)}}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh \\ &\leq MC'_k \sum t^l (2yy')^{-n} (1 + \eta(t))^{-\varpi_0} [\cosh \eta(t)]^{-\left(\frac{N+1}{2}+n\right)} \\ &\leq MC_k (1 + \eta(t))^{-\varpi_0} \left( \frac{2yy'}{y^2 + y'^2 + t^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} t^{-k}. \end{aligned}$$

Donc, par (3.7), on a:

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left| \int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_X})(x, x')\varphi(t)F_m(\eta(t)) dt \right|; x, x' \in X \right\} \\ & \leq C \left[ \left| \int_0^{+\infty} \varphi(t)F_m(\eta(t)) dt \right| + \sup_{s>0} s^{N+1} \left| \int_0^{+\infty} \varphi(t)F_m(\eta(t)) \cos(ts) dt \right| \right] \\ & \leq C \left\{ \int_0^{+\infty} |\varphi(t)F_m(\eta(t))| dt + \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} [\varphi(t)F_m(\eta(t))] \right| dt \right\} \\ & \leq CM \left[ \int_{\frac{\zeta_o}{16}}^{+\infty} (1 + \eta(t))^{-\varpi_o} \left( \frac{2yy'}{y^2 + y'^2 + t^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} dt \right. \\ & \quad \left. + (1 + \eta(\frac{\zeta_o}{16}))^{-\varpi_o} \left( \frac{2yy'}{y^2 + y'^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} \right] \\ & \quad (\text{puisque } \varphi(t) = 0 \text{ si } t \leq \frac{\zeta_o}{16} \text{ et } \varphi(t) = 1 \text{ si } t \geq \frac{\zeta_o}{4}) \\ & \leq C'M(1 + \eta(\frac{\zeta_o}{16}))^{-\varpi_o} \left( \frac{2yy'}{y^2 + y'^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2} \right)^{\frac{N+1}{2}} \left[ 1 + \sqrt{y^2 + y'^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2} \right] \\ & \leq C(\zeta_o)M \left( 1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right)^{-\varpi_o} (yy')^{\frac{N+1}{2}} [y^2 + y'^2]^{-\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, par la définition de  $m_{inf}$  (voir (3.3)), on a:

$$|m_{inf}| \leq C(\zeta_o)M \left( 1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right)^{-\varpi_o} y'^N \left[ 1 + \left( \frac{y'}{y} \right)^2 \right]^{-\frac{N}{2}},$$

et

$$\begin{aligned} & \sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} |m_{inf}| d\mu(Y') \\ & \leq CM|X| \int_0^{+\infty} \left( 1 + \left| \ln \frac{y}{y'} \right| \right)^{-\varpi_o} y'^N \left[ 1 + \left( \frac{y'}{y} \right)^2 \right]^{-\frac{N}{2}} y'^{-N-1} dy' < C(\varpi_o)M. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 3.1. □

On montre maintenant le résultat suivant:

**Proposition 3.4.** *Soit X comme dans la proposition 3.1. Si m est une fonction bornée, paire,  $\in L^1(\mathbb{R}^+, \lambda d\lambda)$  satisfaisant  $\text{Supp} \hat{m} \subset [-1, 1]$  et*

$$\left| \left( \frac{1}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right)^k (-\hat{m})(t) \right| \leq Mt^{-2k-1}, \quad \forall 0 < t \leq 1, k = 0, 1, \dots, N + 2.$$

Alors, il existe une constante  $C > 0$  qui ne dépend que des propriétés de X telle que pour tout  $f \in L^1(\text{Cusp}(X))$ , on a:

$$\mu \left\{ Y \in \text{Cusp}(X); |m(\sqrt{L})f(Y)| > \gamma \right\} \leq C \frac{1 + M + \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda)}}{\gamma} \|f\|_1, \quad \forall \gamma > 0.$$

Donc,  $m(\sqrt{L})$  est borné dans  $L^p(\text{Cusp}(X))$  pour tout  $1 < p < +\infty$ .

*Preuve.* On commence par étudier  $m_{loc}$ .

Pour  $0 \leq k \leq N + 1$  fixé, d'après la définition de  $\Xi_m(k + 1, t)$  (voir (3.5)) et les propriétés de  $\widehat{m}$ , on a:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\eta}^{+\infty} (\cosh t - \cosh \eta)^{-\frac{1}{2}} |\Xi_m(k + 1, t)| dt \\
 \leq & M \int_{\min(\eta, 1)}^1 \frac{t^{-2(k+1)-1} \sinh t}{\sqrt{\cosh t - \cosh \eta}} dt \\
 \leq & C_k M \chi\{\eta \leq 1\} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\sinh t (\cosh t - 1)^{-\frac{2(k+1)+1}{2}}}{\sqrt{\cosh t - \cosh \eta}} dt \\
 & \quad (\text{car } t^2 \sim \cosh t - 1 \text{ quand } 0 \leq t \leq 1) \\
 = & 2C_* M \chi\{\eta \leq 1\} \int_0^{+\infty} (s^2 + \cosh \eta - 1)^{-\frac{2(k+1)+1}{2}} ds \\
 & \quad (\text{par le changement de variable } s^2 = \cosh t - \cosh \eta) \\
 (3.9) \quad & \leq CM (\cosh \eta - 1)^{-k-1} \chi_{\{\eta \leq 1\}},
 \end{aligned}$$

pour tout  $\eta > 0$ , où  $\chi$  désigne la fonction caractéristique.

Donc, en répétant la méthode d'estimer  $|m_{loc}|$  dans la preuve de la proposition 3.1, on a:

$$(3.10) \quad m_{loc} = I_1 + I_{loc},$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= u_o(x, x') \\
 \times \begin{cases} C_1 \psi(d_X^2) \int_d^{+\infty} \frac{\Xi_m(\frac{N-1}{2}+1, h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh d}} dh & \text{si } \frac{N-1}{2} \in \mathbb{N}, \\ C_2 (2yy')^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \psi(d_X^2 + s) \left[ \int_{\eta_*(s)}^{+\infty} \frac{\Xi_m(\frac{N}{2}+1, h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta_*(s)}} dh \right] \frac{ds}{\sqrt{s}} & \text{si } \frac{N}{2} \in \mathbb{N}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

et

$$(3.11) \quad |I_{loc}| \leq CM (yy')^{\frac{N-1}{2}} \chi_{\{d \leq 1\}} \times \begin{cases} d^{-2} & \text{si } N = 2, \\ [d^{-2} + (yy')^{1 - [\frac{N-1}{2}}] d^{-2[\frac{N-1}{2}}]] & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

On considère maintenant  $m_{inf}$ .

Pour  $0 \leq k \leq N + 1$  fixé, par (3.8) et (3.9), on déduit que pour tout  $t > 0$ , on a:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d^k}{dt^k} F_m(\eta(t)) \right| &\leq C_k \sum_{0 \leq l \leq n \leq k; n+(n-l)=k} t^l (2yy')^{-n} \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{|\Xi_m(n+1, h)|}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} dh \\
 &\leq MC'_k \sum_{0 \leq l \leq n \leq k; n+(n-l)=k} t^l (2yy')^{-n} \left[ \frac{(y-y')^2 + t^2}{2yy'} \right]^{-n-1} \chi\{\eta(t) \leq 1\} \\
 &\leq MC_k t^{-k} \left[ \frac{(y-y')^2 + t^2}{2yy'} \right]^{-1} \chi\left\{ \frac{y^2 + y'^2 + t^2}{2yy'} \leq \cosh 1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Donc, par (3.7), on déduit:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_X}) \varphi(t) F_m(\eta(t)) dt = \frac{1}{|X|} \int_0^{+\infty} \varphi(t) F_m(\eta(t)) dt + R_{inf},$$

avec

$$\begin{aligned} |R_{inf}| &\leq \sup_{h>0} h^{N+1} \left| \int_0^{+\infty} \cos(th) \varphi(t) F_m(\eta(t)) dt \right| \\ &\leq C \int_0^{+\infty} \left| \frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}} [\varphi(t) F_m(\eta(t))] \right| dt \\ &\leq MC(\zeta_o) \frac{2yy'}{(y-y')^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2} \chi \left\{ \eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

parce que  $\varphi(t) = 0$  si  $t \leq \frac{\zeta_o}{16}$  et  $\varphi(t) = 1$  si  $t \geq \frac{\zeta_o}{4}$ .

Autrement dit, on a:

$$(3.12) \quad m_{inf} = I_2 + I_{inf},$$

où

$$(3.13) \quad \begin{aligned} I_2 &= \frac{C}{|X|} (yy')^{\frac{N-1}{2}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) F_m(\eta(t)) dt, \\ |I_{inf}| &\leq C'(\zeta_o) M \frac{(2yy')^{\frac{N+1}{2}}}{(y-y')^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2} \chi \left\{ \eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Par (3.10) et (3.12), on peut écrire:

$$m(\sqrt{L})(Y, Y') = (I_1 + I_2) + I_{loc} + I_{inf} = I(Y, Y') + I_{loc} + I_{inf}.$$

Remarquons qu'il existe une constante  $C > 1$  telle que:

$$(3.14) \quad \text{Supp} I(Y, Y') \subset \left\{ (Y, Y') \in \text{Cusp}(X); d(Y, Y') < C \right\}.$$

On va montrer que:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} &\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} \left[ |I_{loc}| + |I_{inf}| \right] d\mu(Y') \\ &= \sup_{Y'} \int_{\text{Cusp}(X)} \left[ |I_{loc}| + |I_{inf}| \right] d\mu(Y) \leq CM. \end{aligned}$$

En utilisant (1.1) (ou (2.2)), on voit que

$$(3.16) \quad d(Y, Y') \leq 1 \text{ (ou } \eta(\frac{\zeta_o}{16}) \leq 1) \implies e^{-1}y' \leq y \leq ey'.$$

Par conséquent, (3.13) montre que:

$$\begin{aligned} &\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \frac{1}{M} \int_{\text{Cusp}(X)} |I_{inf}| d\mu(Y') \\ &\leq C|X| \sup_{y>0} \int_{e^{-1}<\frac{y'}{y}<e} \frac{(2yy')^{\frac{N+1}{2}}}{(y-y')^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2} y'^{-N-1} dy' \\ &\leq C' \sup_{y>0} \frac{1}{y} \int_{e^{-1}<a<e} \frac{da}{(1-a)^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2 y^{-2}} \\ &\leq C \sup_{y>0} \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} \frac{dh}{h^2 + (\frac{\zeta_o}{16})^2 y^{-2}} = C(\zeta_o). \end{aligned}$$

Pour montrer que:

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} |I_{loc}| d\mu(Y') \leq CM,$$

on distingue les deux cas:  $N \geq 3$  et  $N = 2$ . Et on considère d'abord le cas où  $N \geq 3$ :

(1) Pour  $0 < y \leq 1$ , (3.11) et (3.16) donnent:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} \int_{\text{Cusp}(X)} |I_{loc}| d\mu(Y') \\ & \leq C \int_{d \leq 1} \left[ (yy')^{\frac{N-1}{2}} d^{-2} + (yy')^{\frac{N+1}{2} - [\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\ & \leq C' \int_{d \leq 1} d^{-N} d\mu(Y') = C' \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^{-j-1} \leq d \leq 2^{-j}} d^{-N} d\mu(Y') < C, \end{aligned}$$

par la proposition 2.3 de [44].

(2) Dans le cas où  $y \geq 1$ , en utilisant (3.16), on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \int_{\text{Cusp}(X)} |I_{loc}| d\mu(Y') & \leq C \int_{d \leq 1} \left[ y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\ & = C \int_{y^{-1} \leq d \leq 1} + \int_{d \leq y^{-1}}, \end{aligned}$$

mais, la proposition 2.3 de [44] montre que:

$$\begin{aligned} & \int_{y^{-1} \leq d \leq 1} \left[ y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\ & \leq \sum_{j=0}^{[\log_2 y]} \int_{2^j y^{-1} \leq d \leq 2^{j+1} y^{-1}} \left[ y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\ & \leq \sum_{j=0}^{[\log_2 y]} \left[ y^{N-1} (2^j y^{-1})^{-2} + y^{N+1-2[\frac{N-1}{2}]} (2^j y^{-1})^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] |B(Y, 2^{j+1} y^{-1})| \\ & \leq C \sum_{j=0}^{[\log_2 y]} \left[ y^{N-1} (2^j y^{-1})^{-2} + y^{N+1-2[\frac{N-1}{2}]} (2^j y^{-1})^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] y^{-N} (2^{j+1} y^{-1}) < C', \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{d \leq y^{-1}} \left[ y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\ & = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^{-j-1} y^{-1} \leq d \leq 2^{-j} y^{-1}} \left[ y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\ & \leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \left\{ y^{N-1} (2^{j+1} y)^2 + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} [2^{j+1} y]^{2[\frac{N-1}{2}]} \right\} |B(Y, 2^{-j} y^{-1})| \\ & \leq C' \sum_{j=0}^{+\infty} y^{N+1} \left[ (2^{j+1})^2 + (2^{j+1})^{2[\frac{N-1}{2}]} \right] (2^{-j} y^{-1})^{N+1} < C. \end{aligned}$$

De la même façon, pour  $N = 2$ , on a:

$$\sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} |I_{loc}| d\mu(Y') \leq CM.$$

Définissons les opérateurs intégraux,  $T_1$  et  $T_2$ , de noyaux intégraux donnés par  $I_{loc} + I_{inf}$  et  $I(Y, Y')$ . On remarque que:

$$m(\sqrt{L}) = T_1 + T_2,$$

et (3.15) montre que:

$$\|T_1 f\|_{L^p(\text{Cusp}(X))} \leq CM \|f\|_{L^p(\text{Cusp}(X))}, \quad \forall f \in L^p(\text{Cusp}(X)) \quad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Puisque

$$\|m(\sqrt{L})f\|_2 \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda)} \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\text{Cusp}(X)),$$

on a donc

$$(3.17) \quad \|T_2 f\|_2 \leq (CM + \|m\|_\infty) \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\text{Cusp}(X)).$$

La proposition 2.3 de [44] montre que pour tout  $c > 0$  fixé et pour tout  $Y \in \text{Cusp}(X)$ ,  $B(Y, c)$  est un espace homogène au sens de [16]. Par (3.14), (3.17) et la théorie des intégrales singulières (voir par exemple [16] ou [62]), pour achever la démonstration de la proposition 3.4, il suffit de montrer les estimations suivantes:

$$|I(Y, Y')| \leq CM |B(Y, d(Y, Y'))|^{-1}, \quad |\nabla I(Y, Y')| \leq \frac{CM}{d(Y, Y')|B(Y, d(Y, Y'))|}.$$

Par exemple, par (3.9) et la propriétés de  $\varphi$ , on a:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C(yy')^{\frac{N-1}{2}} \chi\left\{\eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) \leq 1\right\} \int_{\frac{\zeta_o}{16}}^{+\infty} \frac{2yy'}{(y-y')^2 + t^2} dt \\ &\leq C'(yy')^{\frac{N}{2}} (\cosh \eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) - 1)^{-\frac{1}{2}} \chi\left\{\eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) \leq 1\right\} \\ &\leq Cy^N [\eta(d_X)]^{-1} \quad (\text{par (3.16) et le fait que} \\ &\qquad \qquad \qquad \cosh \eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) - 1 \sim \eta^2\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) \sim \eta^2(d_X) \text{ quand } \eta\left(\frac{\zeta_o}{16}\right) \leq 1) \\ &\leq C |B(Y, d(Y, Y'))|^{-1}, \end{aligned}$$

grâce à la proposition 2.3 de [44].

De la même façon, on peut montrer les autres estimations. □

*Remarque.* Si  $X$  et  $m$  sont comme dans la proposition 3.4, de plus, on suppose qu'il existe  $1 \geq \epsilon > 0$  telle que:

$$\left| \left( \frac{1}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right)^k (-\hat{m}(t)) \right| \leq Mt^{-2k+\epsilon-1}, \quad \forall 0 < t \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, N + 2,$$

alors, on peut montrer qu'il existe une constante  $C(\epsilon) > 0$  telle que:

$$(3.18) \quad \sup_{Y \in \text{Cusp}(X)} \int_{\text{Cusp}(X)} |m(\sqrt{L})(Y, Y')| d\mu(Y') \leq C(\epsilon)M.$$

On peut donner maintenant **la Preuve du théorème 1.1:**

Il suffit de montrer que le théorème 1.1 est vrai pour  $0 < W \leq \frac{N}{2}$ . On peut supposer que  $m_o \in L^1(\mathbb{R}^+, \lambda d\lambda)$  afin d'utiliser (2.3). En général, comme ce qu'Ionescu a expliqué dans la proof of theorem A de [39], il suffit de remplacer  $m_o(\lambda)$  par  $e^{-\epsilon^2 \lambda^2} m_o(\lambda)$  ( $0 < \epsilon \leq 1$ ) et utiliser ensuite l'argument standard de limite.

D'après le lemme 1.2 de [63], on peut écrire  $m_o = m_a + m_b$  où  $m_a$  satisfait les conditions de la proposition 3.4, et  $m_b$  a les propriétés suivantes:  $\text{Supp} \widehat{m}_b \subset (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$  et

$$\left| \left( \frac{1}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right)^k \widehat{m}_b(t) \right| \leq C_k (1+t)^{-2} [\cosh t]^{-(W+k)}, \quad \forall t > 0, k \in \mathbb{N}.$$

D'après la proposition 3.4, on sait que  $m_a(\sqrt{L})$  est borné dans  $L^p(\text{Cusp}(X))$  pour tout  $1 < p < +\infty$  et de type faible  $(1, 1)$ .

Pour montrer que  $m_b$  est borné dans  $L^p(\text{Cusp}(X))$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) quand  $N|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}| \leq W$ , définissons une famille analytique des opérateurs

$$T_z(\sqrt{L}) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{(W - \frac{N}{2}z)t} \widehat{m}_b(t) \cos(t\sqrt{L}) dt, \quad 0 \leq \Re z \leq 1.$$

Quand  $\Re z = 0$ , on a  $\|T_z(\sqrt{L})\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C$ . Quand  $\Re z = 1$ , notons  $m_a^z$  la transformation inversée de Fourier de  $e^{(W - \frac{N}{2}z)|t|} \widehat{m}_b(|t|)$ . On a  $T_z(\sqrt{L}) = m_a^z(\sqrt{L})$  où  $m_a^z$  satisfait les conditions de la proposition 3.1; donc,  $T_z(\sqrt{L})$  est borné dans  $L^p(\text{Cusp}(X))$  pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ .

D'après le théorème d'interpolation de Stein, on obtient le résultat du théorème 1.1.  $\square$

*Remarque.* Si on ne s'intéresse pas la continuité  $L^1 - L^{1,\infty}$  de  $m(\sqrt{L})$ , on peut donner une amélioration des propositions 3.1 et 3.4, donc une amélioration du théorème 1.1.

La proposition 3.1 et (3.18) donnent le résultat suivant:

**Théorème 3.5.** *Soit  $X$  une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension  $N \geq 2$ . Pour  $m \in \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}^{-\epsilon}$  avec  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $C(\epsilon) > 0$  telle que:*

$$\|m(\sqrt{L})f\|_p \leq C(\epsilon)\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\text{Cusp}(X)) \quad (1 \leq p \leq +\infty).$$

#### REMERCIEMENTS

Ce travail a été fait quand je visitais l'IHES, voir [43]. Je tiens à remercier Professeur Jean-Pierre Bourguignon pour son invitation à l'IHES, les Professeurs Laurent Clozel et Laurent Lafforgue pour leur aide. Je voudrais remercier aussi les membres de l'équipe d'Analyse Harmonique d'Orsay pour leur soutien constant.

#### REFERENCES

- [1] G. Alexopoulos, Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994) 973-979. MR1172944 (95j:22016)
- [2] G. Alexopoulos,  $L^p$  bounds for spectral multipliers from Gaussian estimates of the heat kernel, Prépublication 1999.
- [3] G. Alexopoulos, Spectral multipliers on discrete groups, Bull. London Math. Soc. 33 (2001) 417-424. MR1832553 (2002d:22010)
- [4] G. Alexopoulos, Spectral multipliers for Markov chains. A paraître au J. Math. Soc. Japan.
- [5] J.-P. Anker, N. Lohoué, Multiplicateurs sur certains espaces symétriques, Amer. J. Math. 108 (1986) 1303-1354. MR0868894 (88c:43008)

- [6] J.-P. Anker,  $L^p$  Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the non-compact type, *Ann. of Math.* 132 (1990) 597-628. MR1078270 (92e:43006)
- [7] J.-P. Anker, Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces, *Duke Mathematical Journal* 65 (1992) 257-297. MR1150587 (93b:43007)
- [8] J.-P. Anker, E. Damek, C. Yacoub, Spherical Analysis on Harmonic  $AN$  Groups, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. IV. Ser.* 23 (1996) 643-679. MR1469569 (99a:22014)
- [9] F. Astengo, Multipliers for a distinguished Laplacean on solvable extensions of H-type groups, *Monatsh. Math.* 120 (1995) 179-188. MR1363136 (97c:22012)
- [10] P. Bérard, On the Wave Equation on Riemannian Manifold without Conjugate Points, *Math. Z.*, 155 (1977) 249-276. MR0455055 (56:13295)
- [11] J. Cheeger, M. Gromov, M. E. Taylor, Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* 17 (1982) 15-53. MR0658471 (84b:58109)
- [12] J. Cheeger, M. E. Taylor, On the diffraction of wave by conical singularities. I, *Comm. Pure Appl. Math.* XXV (1982) 275-331. MR0649347 (84h:35091a)
- [13] J. Clerc, E. M. Stein,  $L^p$ -multipliers for noncompact symmetric spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 71 (1974) 3911-3912. MR0367561 (51:3803)
- [14] M. Christ,  $L^p$  bound for spectral multiplier on nilpotent groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 328 (1991) 73-81. MR1104196 (92k:42017)
- [15] M. Christ, D. Müller, On  $L^p$  spectral multipliers for a solvable Lie group, *Geom. Funct. Anal.* 6 (1996) 860-876. MR1415763 (98b:22017)
- [16] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Springer L.N. $n^0$  242, 1971. MR0499948 (58:17690)
- [17] M. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki, G. Mauceri, Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth, *Studia Math.* 111 (1994) 103-121. MR1301761 (95j:43002)
- [18] M. Cowling, A. Sikora, A spectral multiplier theorem for a sublaplacian on  $SU(2)$ , *Math. Z.* 238 (2001) 1-36. MR1860734 (2002h:42016)
- [19] L. De Michèle, G. Mauceri,  $L^p$ -multipliers on the Heisenberg group, *Michigan Math. J.*, 26 (1979) 361-373. MR0544603 (80j:43003b)
- [20] L. De Michèle, G. Mauceri,  $H^p$  multipliers on stratified groups, *Ann. Mat. Pura Appl.* 148 (1987) 353-366. MR0932770 (89e:43009)
- [21] X.-T. Duong, E. M. Ouhabaz, Heat kernel bounds and spectral multipliers on spaces of polynomial volume growth and irregular domains. Prépublication 1999.
- [22] X.-T. Duong, E. M. Ouhabaz, A. Sikora, Plancherel-type estimates and sharp spectral multipliers, *J. Funct. Anal.* 196 (2002) 443-485. MR1943098 (2003k:43012)
- [23] J. García-Cuerva, G. Mauceri, P. Sjögren, J.-L. Torrea, Spectral multipliers for the Ornstein-Uhlenbeck semigroup, *J. Anal. Math.* 78 (1999) 281-305. MR1714425 (2000m:42015)
- [24] J. García-Cuerva, G. Mauceri, S. Meda, P. Sjögren, J.-L. Torrea, Functional calculus for the Ornstein-Uhlenbeck operator, *J. Funct. Anal.* 183 (2001) 413-450. MR1844213 (2002d:47023)
- [25] I. M. Gelfand, G. Shilov, *Generalized Functions I*, Academic Press, New York and London, 1964. MR0166596 (29:3869)
- [26] S. Giulini, G. Mauceri, S. Meda,  $L^p$  multipliers on noncompact symmetric spaces, *J. Reine Angew. Math.* 482 (1997) 151-175. MR1427660 (98g:43006)
- [27] M. Gnewuch, Spectral Multipliers for sub-Laplacians on amenable Lie groups with exponential volume growth, *Math. Z.* 246 (2004) 69-83. MR2031445
- [28] W. Hebisch, The subalgebra of  $L^1(AN)$  generated by the laplacean, *Proc. Amer. Math. Soc.* 117 (1993) 547-549. MR1111218 (93d:22009)
- [29] W. Hebisch, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, *Coll. Math.* 65 (1993) 231-239. MR1240169 (94m:43013)
- [30] W. Hebisch, J. Zienkiewicz, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups II, *Coll. Math.* 69 (1995) 29-36. MR1341678 (96h:43007)
- [31] W. Hebisch, Boundedness of  $L^1$  spectral multipliers for an exponential solvable Lie group, *Coll. Math.* 73 (1997) 155-164. MR1436956 (98e:22005)
- [32] W. Hebisch, Spectral multipliers on exponential growth solvable Lie groups, *Math. Z.* 229 (1998) 435-441. MR1658573 (2000a:43004)
- [33] W. Hebisch, Spectral multipliers on metabelian groups, *Revista Math. Iberoamericana* 16 (2000) 597-604. MR1813330 (2001m:22016)

- [34] W. Hebisch, T. Steger, Multipliers and singular integrals on exponential growth groups, *Math. Z.* 245 (2003) 37-61. MR2023952
- [35] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in  $L^p$  spaces, *Acta Math.* 104 (1960) 93-139. MR0121655 (22:12389)
- [36] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operator III : Pseudo - Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985. MR0781536 (87d:35002a)
- [37] A. Hulanicki, Subalgebra of  $L_1(G)$  associated with Laplacian on a Lie group, *Coll. Math.* 31 (1974) 259-287. MR0372536 (51:8743)
- [38] A. Ionescu, Singular integrals on symmetric spaces of real rank one, *Duke Math. J.* 114 (2002) 101-122. MR1915037 (2003c:43008)
- [39] A. Ionescu, Fourier integral operators on noncompact symmetric spaces of real rank one, *J. Funct. Anal.* 174 (2000) 274-300. MR1767376 (2001h:43009)
- [40] A. Ionescu, Singular integrals on symmetric spaces II, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003) 3359-3378. MR1974692 (2004b:43009)
- [41] C. E. Kenig, R. J. Stanton, P. A. Tomas, Divergence of eigenfunction expansions, *J. Funct. Anal.* 46 (1982) 28-44. MR0654463 (83k:22025)
- [42] H.-Q. Li, Certaines fonctions maximales sur les variétés cuspidales. Prépublication de l'IHES, décembre 2002.
- [43] H.-Q. Li, Estimations  $L^p$  des fonctions du Laplacien sur les variétés cuspidales I. Prépublication de l'IHES, décembre 2002.
- [44] H.-Q. Li, Analyse sur les variétés cuspidales, *Math. Ann.* 326 (2003) 625-647. MR2003446
- [45] H.-Q. Li, N. Lohoué, Estimations  $L^p$  des solutions de l'équation des ondes sur certaines variétés coniques, *Trans. Amer. Math. Soc.* 355 (2003) 689-711. MR1932721 (2003i:58052)
- [46] N. Lohoué, A. Nilsson, Spectral multipliers on quotients by amenable subgroups, *Manuscripta Math.* 104 (2001) 295-299. MR1828875 (2002e:43002)
- [47] J. Ludwig, D. Müller, Sub-Laplacians of holomorphic  $L^p$ -type on rank one  $AN$ -groups and related solvable groups, *J. Funct. Anal.* 170 (2000) 366-427. MR1740657 (2001g:43010)
- [48] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1966. MR0232968 (38:1291)
- [49] G. Mauceri, S. Meda, Vector-valued multipliers on stratified groups, *Revista Math. Iberoamericana* 6 (1990) 141-154. MR1125759 (92j:42014)
- [50] S. Mikhlin, *Multidimensional singular integral equation*, Pergamon Press, New York, 1965. MR0185399 (32:2866)
- [51] D. Müller, E. M. Stein, On spectral multipliers for Heisenberg and related groups, *J. Math. Pures et Appl.* 73 (1994) 413-440. MR1290494 (96m:43004)
- [52] W. Müller, Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula, *Math. Nachr.* 111 (1983) 197-288. MR0725778 (85i:58121)
- [53] S. Mustapha, Multiplicateurs spectraux sur certains groupes non-unimodulaires, *Harmonic Analysis and Number Theory, CMS Conf. Proceedings*, Vol. 21, 1997, 11-30. MR1472776 (98k:22032)
- [54] S. Mustapha, Multiplicateurs de Mikhlin pour une classe particulière de groupes non-unimodulaires, *Ann. Inst. Fourier* 48 (1998) 957-966. MR1656003 (99j:22013)
- [55] A. Seeger, C.D. Sogge, On the boundedness of function of (pseudo-)Differential operators on compact manifolds, *Duke Math. J.* 59 (1989) 709-736. MR1046745 (91d:58244)
- [56] A. Seeger, Endpoint estimates for multiplier transformations on compact manifolds, *Indiana Univ. Math. J.* 40 (1991) 471-533. MR1119186 (92f:58166)
- [57] A. Sikora, Multiplicateurs associés aux sous-Laplaciens sur les groupes homogènes, *C. R. Acad. Sci. Paris* 315 (1992) 417-419. MR1179049 (93e:43010)
- [58] A. Sikora, Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth (a remark on the paper of M. Cowling et al.), *Studia Math.* 152 (2002) 125-130. MR1916545 (2003g:22006)
- [59] R. Stanton, P. Tomas, Expansions for spherical functions on noncompact symmetric spaces, *Acta Math.* 140 (1978) 251-276. MR0511124 (58 #23365)
- [60] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970. MR0290095 (44:7280)
- [61] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971. MR0304972 (46:4102)

- [62] E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993. MR1232192 (95c:42002)
- [63] M. E. Taylor,  $L^p$ -Estimates on functions of the Laplace operator, *Duke Math. J.* 58 (1989) 773-793. MR1016445 (91d:58253)

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK, UNIVERSITÄT BONN, WEGELERSTR. 6, D-53115  
BONN, GERMANY

*E-mail address:* `li-hq@wiener.iam.uni-bonn.de`