PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 80, Number 2, October 1980

EIN EXISTENZSATZ FÜR GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN BANACHRÄUMEN

PETER VOLKMANN

ABSTRACT. A positive answer will be given to the question in the books of Martin [4] and Deimling [2], whether initial value problems for ordinary differential equations in Banach spaces are locally solvable, provided the right-hand side of the equation is the sum of two operators of dissipative and compact type, respectively (see Theorem 2 below).

Für Elemente x, y des im folgenden auftretenden Banachraumes E wird wie bei Martin [4] die Bezeichnung

$$m_-[x, y] = \lim_{h \nearrow 0} \frac{1}{h}\{\|x + hy\| - \|x\|\}$$

verwendet.

SATZ 1. *Seien E, F reelle Banachräume, und sei (v_0, w_0) ein innerer Punkt der Teilmenge D von $E \times F$. Für die stetigen Funktionen Φ: $D \to E$, Ψ: $D \to F$ werde die Ungleichung*

$$m_-[x - y, \Phi(x, z) - \Phi(y, z)] \leqslant l\|x - y\| \qquad ((x, z), (y, z) \in D) \tag{1}$$

und die Existenz einer kompakten Menge $C \subseteq F$ mit $\Psi(D) \subseteq C$ vorausgesetzt. Dann gibt es $T > 0$ und Funktionen v: $[0, T] \to E$, w: $[0, T] \to F$, so dass

$$v'(t) = \Phi(v(t), w(t)), \qquad w'(t) = \Psi(v(t), w(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{2}$$

$$v(0) = v_0, \qquad w(0) = w_0 \tag{3}$$

gilt.

BEWEIS. Man wähle zunächst $\rho > 0$, so dass $S_E(v_0; \rho) \times S_F(w_0; \rho)$ in D liegt und die Funktionen Φ, Ψ auf dieser Menge beschränkt sind. (Dabei ist $S_E(v_0; \rho) = \{x | x \in E, \|x - v_0\| \leqslant \rho\}$, und $S_F(w_0; \rho)$ hat eine entsprechende Bedeutung.) Es gilt demnach

$$\|\Phi(x, y)\|, \|\Psi(x, y)\| \leqslant M \qquad ((x, y) \in S_E(v_0; \rho) \times S_F(w_0; \rho)). \tag{4}$$

Setzt man

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|) \qquad ((x, y) \in E \times F), \tag{5}$$

so wird $E \times F$ zu einem Banachraume. Nach Lasota und Yorke [3] lassen sich zu $n = 1, 2, 3, \ldots$ lokal Lipschitz-stetige Funktionen Φ_n: $D \to E$ mit

Received by the editors October 22, 1979.
AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 34G05.

$$\|\Phi_n(x,y) - \Phi(x,y)\| < \frac{1}{n} \qquad ((x,y) \in D) \tag{6}$$

finden. Man betrachte die Anfangswertprobleme

$$v_n' = \Phi_n(v_n, w_n), \quad w_n' = \Psi(v_n, w_n), \quad v_n(0) = v_0, \quad w_n(0) = w_0. \tag{7}$$

Die rechten Seiten der Differentialgleichungen lassen sich zu den durch

$$\chi_n(x,y) = (\Phi_n(x,y), \Psi(x,y)) \qquad ((x,y) \in D) \tag{8}$$

definierten Funktionen χ_n: $D \to E \times F$ zusammenfassen. Da Φ_n lokal Lipschitz-stetig ist und $\Psi(D)$ in einer kompakten Menge liegt, gibt es zu jedem Punkte (x, y) aus D eine Umgebung U, so dass die Einschränkung von χ_n auf U ein α-lipschitz-Operator ist (Terminologie wie bei Martin [4, S.79]). Somit hat das Anfangswertproblem (7) nach einem Satze von Szufla [5] eine lokale Lösung. Wegen (4), (5), (6), (8) ist

$$\|\chi_n(x,y)\| \leq M + 1 \qquad ((x,y) \in S_{E\times F}((v_0, w_0); \rho) \subseteq D),$$

und daher besitzt (7) Lösungen

$$v_n\colon [0, T] \to S_E(v_0; \rho), \qquad w_n\colon [0, T] \to S_F(w_0; \rho), \tag{9}$$

falls $T = \rho/(M + 1)$ gesetzt wird.

Man betrachte nun die Funktionen w_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wegen (4), (7), (9) gilt

$$\|w_n'(t)\| \leq M \qquad (0 \leq t \leq T),$$

also sind die w_n gleichgradig stetig. Ferner ist

$$w_n(t) = w_0 + \int_0^t \Psi(v_n(\tau), w_n(\tau))\, d\tau \qquad (0 \leq t \leq T), \tag{10}$$

also liegen die Werte $w_n(t)$ in der kompakten Menge

$$C_1 = w_0 + T \cdot \overline{\mathrm{Konv}\{C \cup \{\theta_F\}\}}\,.$$

(Zum Beweise dieser Tatsache approximiere man das Integral in (10) durch Riemannsche Summen; "Konv" bedeutet die konvexe Hülle einer Menge, und θ_F bezeichnet das Nullelement des Raumes F.) Nach einem Satze von Arzelà und Ascoli ist somit eine Teilfolge der Funktionenfolge (w_n) auf $[0, T]$ gleichmässig konvergent, und im folgenden kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$w_n(t) \Rightarrow w(t) \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{11}$$

vorausgesetzt werden. (Das Symbol $\Rightarrow$ bezeichnet gleichmässige Konvergenz; w: $[0, T] \to S_F(w_0; \rho)$ ist eine stetige Funktion.)

Jetzt wird in E das Anfangswertproblem

$$v' = \Phi(v, w(t)), \qquad v(0) = v_0, \tag{12}$$

betrachtet. Wegen (1) gilt für die rechte Seite der Differentialgleichung die Abschätzung

$$m_-[x - y, \Phi(x, w(t)) - \Phi(y, w(t))] \leq l\|x - y\| \qquad (0 \leq t \leq T;\ x, y \in S_E(v_0; \rho)),$$

also ist (12) nach bekannten Existenzsätzen (vgl. z.B. Deimling [1]) lokal lösbar.

Wegen (4) existiert sogar eine Lösung

$$v\colon [0, T] \to S_E(v_0; \rho).$$

Im folgenden wird die gleichmässige Konvergenz

$$v_n(t) \rightrightarrows v(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{13}$$

gezeigt. Daraus folgt dann mit (11) leicht, dass die Funktionen $v\colon [0, T] \to E$, $w\colon [0, T] \to F$ Lösungen des ursprünglichen Problems (2), (3) sind. (Man vollziehe den Grenzübergang $n \to \infty$ in den zu (7) gehörigen Integralgleichungen.) Zum Beweise von (13) sei zunächst bemerkt, dass (11) die Beziehung

$$\Phi(v(t), w_n(t)) \rightrightarrows \Phi(v(t), w(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

zur Folge hat. Man hat also

$$\|\Phi(v(t), w_n(t)) - \Phi(v(t), w(t))\| \leqslant \varepsilon_n \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{14}$$

mit $\varepsilon_n \to 0$. Nun wird ähnlich wie in [1] verfahren: Sei (bei zunächst fixiertem n)

$$\sigma(t) = \|v_n(t) - v(t)\| \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{15}$$

Für $t > 0$ und $-t \leqslant h < 0$ ist dann auf Grund von (7), (12)

$$\sigma(t+h) = \|v_n(t) - v(t) + h[\Phi_n(v_n(t), w_n(t)) - \Phi(v(t), w(t))]\| + o(h).$$

Ersetzt man hier $\Phi_n(v_n(t), w_n(t))$ durch $\Phi(v_n(t), w_n(t))$ und $\Phi(v(t), w(t))$ durch $\Phi(v(t), w_n(t))$, so folgt mit (6), (14)

$$\sigma(t+h) \geqslant \|v_n(t) - v(t) + h[\Phi(v_n(t), w_n(t)) - \Phi(v(t), w_n(t))]\| + h\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right) + o(h),$$

also ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\{\sigma(t+h) - \sigma(t)\} \\
&\quad \leqslant \frac{1}{h}\{\|v_n(t) - v(t) + h[\Phi(v_n(t), w_n(t)) - \Phi(v(t), w_n(t))]\| - \|v_n(t) - v(t)\|\} \\
&\qquad + \frac{1}{n} + \varepsilon_n + o(1).
\end{aligned}$$

Grenzübergang $h \nearrow 0$ liefert für die linksseitige Ableitung $D_-\sigma(t)$ der Funktion σ die Abschätzung

$$D_-\sigma(t) \leqslant m_-[v_n(t) - v(t), \Phi(v_n(t), w_n(t)) - \Phi(v(t), w_n(t))] + \frac{1}{n} + \varepsilon_n,$$

und damit ist nach (1), (15)

$$D_-\sigma(t) \leqslant l\sigma(t) + \frac{1}{n} + \varepsilon_n \qquad (0 < t \leqslant T).$$

Da $\sigma(0) = 0$ ist, führt die Integration dieser Differentialungleichung auf

$$\|v_n(t) - v(t)\| = \sigma(t) \leqslant \frac{1}{l}\left(\frac{1}{n} + \varepsilon_n\right)e^{lT} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

(ohne Einschränkung sei $l > 0$), und das beweist (13).

SATZ 2. *Sei E ein reeller Banachraum, $\Delta \subseteq E$, u_0 ein innerer Punkt von Δ und $a > 0$. Für die stetigen Funktionen f, g: $[0, a] \times \Delta \to E$ werde die Ungleichung*

$$m_-[x - y, f(t, x) - f(t, y)] \leqslant l\|x - y\| \qquad (0 \leqslant t \leqslant a;\ x, y \in \Delta)$$

und die Existenz einer kompakten Menge $\Gamma \subseteq E$ mit $g([0, a] \times \Delta) \subseteq \Gamma$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein $T > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$u(0) = u_0, \qquad u'(t) = f(t, u(t)) + g(t, u(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{16}$$

lösbar ist.

BEWEIS. Ohne Einschränkung kann f, g: $(-\infty, +\infty) \times \Delta \to E$ vorausgesetzt werden; anderenfalls setze man f zu

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(0, x) & (t < 0) \\ f(t, x) & (0 \leqslant t \leqslant a) \\ f(a, x) & (t > a) \end{cases} \qquad (x \in \Delta)$$

und entsprechend g zu $\tilde{g}$ fort. Ausser E betrachte man noch den Banachraum

$$F = (-\infty, +\infty) \times E = \{(\xi, y) | \xi \text{ reell}, y \in E\},$$

und man bestimme in $E \times F$ die Teilmenge

$$D = \{(x, \xi, y) | x, y \in E, \xi \text{ reell}, x + y \in \Delta\}.$$

Nun seien Φ: $D \to E$, Ψ: $D \to F$ definiert durch

$$\Phi(x, \xi, y) = f(\xi, x + y), \qquad \Psi(x, \xi, y) = (1, g(\xi, x + y)).$$

Dann erfüllen Φ, Ψ die Voraussetzungen des Satzes 1, und $(u_0, 0, \theta_E)$ ist ein innerer Punkt von D. Nach Satz 1 lässt sich also ein $T > 0$ finden, so dass (2), (3) mit den Anfangswerten $v_0 = u_0$, $w_0 = (0, \theta_E)$ lösbar ist. Schreibt man die Funktion w: $[0, T] \to F$ in der Form

$$w(t) = (\xi(t), y(t)) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

mit reellem $\xi(t)$ und $y(t) \in E$, so hat man demnach (für $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$v'(t) = f(\xi(t), v(t) + y(t)), \quad v(0) = u_0, \tag{17}$$

$$\xi'(t) = 1, \quad \xi(0) = 0, \tag{18}$$

$$y'(t) = g(\xi(t), v(t) + y(t)), \quad y(0) = \theta_E. \tag{19}$$

Aus (18) folgt $\xi(t) = t$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, und mit (17), (19) ergibt sich dann $u(t) = v(t) + y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ als Lösung von (16), falls noch $T \leqslant a$ gewählt wird.

BIBLIOGRAPHY

1. K. Deimling, *On existence and uniqueness for differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **106** (1975), 1–10.

2. ______, *Ordinary differential equations in Banach spaces*, Lecture Notes in Math., Vol. 596, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

3. A. Lasota and J. A. Yorke, *The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach space*, J. Differential Equations **13** (1973), 1–12.

4. R. H. Martin, Jr., *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, Wiley, New York, 1976.

5. S. Szufla, *Some remarks on ordinary differential equations in Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **16** (1968), 795–800.

MATHEMATISCHES INSTITUT I, UNIVERSITÄT KARLSRUHE, POSTFACH 6380, 7500 KARLSRUHE 1, WEST GERMANY