PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 125, Number 9, September 1997, Pages 2711–2717
S 0002-9939(97)03912-9

$\mathbb{Q}$ MUNI DE L'ARITHMÉTIQUE FAIBLE DE PENZIN EST DÉCIDABLE

FRANÇOISE DELON

(Communicated by Andreas R. Blass)

Abstract. We prove the decidability of the additive ordered group $\mathbb{Q}$ equipped with a predicate for $2^{\mathbb{Z}}$, the multiplication restricted to $2^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Q}$ and the 2-adic valuation ranging in $2^{\mathbb{Z}}$.

1. Introduction

Julia Robinson a montré la définissabilité de $\mathbb{Z}$ dans l'anneau $\mathbb{Q}$, qui est donc indécidable. Penzin a montré que la réduite de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans le langage $\{P, \leq, +, f\}$ reste indécidable, où $\leq$ et $+$ ont leur interprétation usuelle, P est un symbole de prédicat unaire interprété par $2^{\mathbb{N}}$ et f un symbole de fonction binaire interprété par la restriction de la multiplication à $2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z}$; notons $\langle \mathbb{Z}, 2^{\mathbb{N}} \rangle$ cette structure. Nous montrons ici que la structure naturelle $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}} \rangle$ du même langage est décidable (elle le reste si on lui adjoint la valuation 2-adique à valeurs dans $2^{\mathbb{Z}}$). C'est à notre connaissance la première réduite naturelle de la structure d'anneau pour laquelle $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ se comportent de façon différente.

La structure $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}} \rangle$ se présente naturellement par plusiers biais. Ainsi elle est élémentairement équivalente à $\langle \mathbb{R}, 2^{\mathbb{Z}} \rangle$, dont van den Dries a montré la décidabilité [vdD2], mais en travaillant dans un langage plus lourd, incluant le langage d'anneau, pour lequel donc $\mathbb{Q}$ est indécidable. Ainsi notre travail revient à déterminer la trace sur $\{P, \leq, +, f\}$ de la théorie de van den Dries. Par ailleurs $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}} \rangle$ et le groupe ordonné $2^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Q}$, où 2^n, $n \in \mathbb{Z}$, agit sur $\mathbb{Q}$ par multiplication et l'ordre est lexicographique, sont biinterprétables (voir [S1]). La décidabilité du groupe ordonné $2^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Q}$ est donc une autre formulation du résultat annoncé ci-dessus. A titre de comparaison, le groupe $2^{\mathbb{Z}} \ltimes 2^{-\infty}\mathbb{Z}$ est indécidable. On donne également une axiomatisation du groupe $2^{\mathbb{Z}} \ltimes \mathbb{Q}$, ce qui répond à une question de Zilber et reprouve quelques résultats de Grünenwald et Haug [GH]. Une étude plus générale de ce genre de groupes est maintenant faite dans [S2] et [DS].

2. Décidabilité de $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}} \rangle$, indécidabilité de $\langle 2^{-\infty}\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}} \rangle$

Théorème 1. *La théorie T ci-dessous du langage $L = \{P, \leq, +, -, f, 0, 1\}$ est complète. C'est la théorie de $\langle K, 2^{\mathbb{Z}}, \leq, +, -, f, 0, 1 \rangle$ pour tout sous-corps K de*

Received by the editors September 20, 1995 and, in revised form, April 4, 1996.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 03C60; Secondary 12L05.
Key words and phrases. Penzin arithmetic, decidability, field of rational numbers, p-adic valuation.

$\mathbb{R}$, où f est définie sur $P \times K$ et vérifie $f(2^n, x) = 2^n.x$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in K$. Les axiomes de T sont les suivants: $G = \langle G, P, \leq, +, -, f, 0, 1\rangle \vDash T$ *ssi*

T1. $\langle G, \leq, +, -, 0\rangle$ *est un groupe abélien ordonné;*
T2. $P(1), P(x) \leftrightarrow P(2x)$ *où $2x$ signifie $x + x$;*
T3. $[P(x) \wedge x < y < 2x] \rightarrow \neg P(y)$*;*
T4. $P \subseteq G^{>0}$*;*
T5. $\forall x > 0\ \exists p \in P\ p \leq x \wedge \neg(\exists q \in P\ p < q \leq x)$*; ce p définissable est noté $\lambda(x)$;*
T6. *f est définie sur $P \times G$ et, pour tous $y_1, \ldots, y_n \in P$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, $[\sum y_i \varepsilon_i > 0] \rightarrow [$ la correspondance $x \rightarrow \sum \varepsilon_i f(y_i, x)$ est un automorphisme de $\langle G, \leq, +\rangle$;*
T7. *$\langle P, f \restriction P^2, 1\rangle$ est un groupe; f définit une action de ce groupe sur G; si $2 := 1 + 1$, $f(2, x) = 2x$ pour tout $x \in G$;*
T8. *pour tout $x > 0$, la correspondance $y \rightarrow f(y, x)$ est une application strictement croissante de $\langle P, \leq\rangle$ vers $\langle G, \leq\rangle$;*
T9. *$\langle P, f \restriction P^2, <, 1, 2\rangle$ est un $\mathbb{Z}$-groupe.*

Remarques. 1. Dans un modèle, la structure de groupe de G définit une action de $\mathbb{Z}$ sur G. En la combinant avec l'action de P, on obtient sur G une structure de $\mathbb{Z}[P]$-module. Par T7, l'idéal $I := (1_{\mathbb{Z}}.2_P - 2_{\mathbb{Z}}.1_P)$ annule G, qui est donc aussi un $(\mathbb{Z}[P]/I)$-module (nous notons multiplicativement toutes ces actions). Tout terme $\sum z_i.p_i \in \mathbb{Z}[P]$, $z_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \in P$, est égal modulo I à 0 ou à un terme $\sum_1^m \varepsilon_i q_i$, avec $m \geq 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $q_i \in P$ et les q_i tous distincts. De plus les axiomes T1, T3 et T4 imposent, si $m \geq 2$ et si les q_i sont rangés par ordre croissant, $|\sum_1^{m-1} \varepsilon_i.q_i| < q_m$. D'après ceci et T6, les termes $\sum^m \varepsilon_i.q_i$ avec $m \geq 1$ agissent sur $\langle G, +\rangle$ comme des automorphismes, croissants si $\varepsilon_m = 1$, décroissants si $\varepsilon_m = -1$. Cela prouve que I est premier, et aussi permet d'étendre l'action de $\mathbb{Z}[P]/I$ à son corps de quotients, que nous noterons $k(P)$. Ce corps est plongé dans G en tant qu'orbite de 1, et ainsi ordonné. Alors la théorie T impose à G d'avoir une structure de $k(P)$-espace vectoriel ordonné (en plus des axiomes d'espace vectoriel: pour $\alpha \in k(P)$ et $g, h \in G$, $\alpha > 0$ et $g, h > 0$ impliquent $g + h$, $\alpha.g > 0$). Réciproquement, si $\langle G, P\rangle$ satisfait T1 à T5, T7, T9 et est tel que l'action de P s'étende en une action de $k(P)$ qui fait de G un $k(P)$-espace vectoriel ordonné, alors $\langle G, P\rangle \vDash T$.

2. Tous les axiomes de T sauf T5, T6, T9 et le fragment de T7 exprimant l'existence de l'inverse, sont universels. Considérons, pour $n \in \mathbb{N}^{>0}$, les fonctions définissables $\varphi_n : P \rightarrow P$ exprimant que P est un $\mathbb{Z}$-groupe: si $x \in P$, $\varphi_n(x)$ est l'unique $y \in P$ vérifiant $\bigvee_{i=0}^{n-1} y^n = 2^{-i}.x$. Alors l'extension par définition de T obtenue en ajoutant au langage λ, les φ_n et les $f_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}$, $n \in \omega$, $\varepsilon_i = \pm 1$, qui, à $(x, p_1, \ldots, p_n) \in G \times P^n$ tels que $\bigwedge P(p_i) \wedge (\sum \varepsilon_i p_i \neq 0)$, associent y tel que $x = \sum \varepsilon_i f(p_i, y)$, est universelle (on ajoute en particulier le passage à l'inverse dans P puisque $f_1(1, p) = p^{-1}$). En conséquence, au-dessus de tout ensemble de paramètres A, la clôture $\langle A\rangle$ de A par $\lambda, +, -, f$, les $(\varphi_n)_{n \in \omega}$, et les $(f_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n})_{n \in \omega, \varepsilon_1 = \pm 1}$, est un modèle minimal. Pour $G \leq H \vDash T$, $A \subseteq H$ et $x \in H$, $G\langle A\rangle$ et $G\langle x\rangle$ désignent respectivement $\langle G \cup A\rangle$ et $\langle G \cup \{x\}\rangle$.

Démonstration du théorème 1. Seule la complétude de T n'est pas évidente. Elle se prouve par va-et-vient entre deux modèles ω_1-saturés G et H, les isomorphismes se faisant entre les sous-modèles dénombrables G_0 de G et H_0 de H vérifiant de plus $P(G_0) \prec P(G)$ et $P(H_0) \prec P(H)$. Le va-et-vient est amorcé grâce au modèle minimal $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, \leq, +, \times\rangle$. Soient maintenant $G_0 \subseteq G_1 \subseteq G$, tous modèles de T. Pour décrire G_1 au-dessus de G_0, il suffit de savoir décrire $G_0\langle P(G_1)\rangle$ au-dessus de

G_0, puis G_1 au-dessus de $G_0\langle P(G_1)\rangle$. Cela signifie que dans le va-et-vient, il suffit de savoir adjoindre un point de P, ou bien un point $x \in G$ tel que $P(G_0) = P(G_0\langle x\rangle)$. Notons $P_0 := P(G_0)$.

Premier cas: $P_0 = P(G_0\langle x\rangle)$, $x \notin G_0$.

Montrons qu'alors le type d'isomorphisme de $G_0\langle x\rangle$ au-dessus de G_0 est entièrement déterminé par la coupure $\Sigma := \{g \in G_0; g < x\}$, ce qui permettra d'étendre à $G_0\langle x\rangle$ l'isomorphisme partiel entre G_0 et H_0. En effet, $G_0\langle x\rangle$ est isomorphe au $k(P_0)$-espace vectoriel $G_0 \oplus k(P_0).x$ avec l'ordre imposé par Σ; grâce à la condition $P_0 = P(G_0\langle x\rangle)$, pour $\alpha \in k(P_0)$ et $g \in G_0$ tels que $\alpha x + g > 0$, il existe $g_1 \in P_0$ vérifiant $g_1 \leq \alpha x + g < 2g_1$, ou de façon équivalente $g_1 \in \alpha\Sigma + g < 2g_1$, ce qui impose $\lambda(g + \alpha x) = g_1$, et $P(g + \alpha x)$ ssi $\alpha = 0$ et $P(g)$.

Deuxième cas: $x \in P(G) \setminus G_0$.

Soit P_1, $P_0 \prec P_1 \prec P$. Alors $G_0\langle P_1\rangle$ ne dépend que du type de P_1 au-dessus de P_0 en tant que $\mathbb{Z}$-groupe. L'ensemble sous-jacent est en effet composé des éléments $\alpha^{-1}\sum p_i g_i$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}[P_1] \setminus \{0\}$, $p_i \in P_1$, $g_i \in G_0$, où on peut de plus prendre les p_i distincts modulo P_0. L'égalité et l'ordre sont imposés par le fait que les termes $p_i g_i$ ont alors des valuations archimédiennes différentes. Cela détermine également P sur $k(P_1)$, donc sur $G_0\langle P_1\rangle$, et aussi la fonction λ. L'action de $k(P)$ est l'action évidente. □

Théorème 2. *L'extension par définition de T dans le langage $L \cup \{(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \lambda\}$, avec les axiomes*:

$$\lambda \textit{ est définie sur } G^{>0},$$
$$\lambda(x) = y \leftrightarrow P(y) \wedge y \leq x < 2y,$$
$$\textit{et pour } n \in \mathbb{N}^*,\ R_n(x) \leftrightarrow [P(x) \wedge \exists y(y \in P \wedge y^n = x)]$$

élimine les quantificateurs.

Démonstration. La preuve du theorème 1 montre aussi qu'il y a une seule façon de construire $\langle A\rangle$ en respectant les R_n, au-dessus d'une L-structure A stable par λ. □

Proposition. $\langle 2^{-\infty}\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, +, -, f, 0, 1\rangle$ *est indécidable.*

Démonstration. Penzin a énoncé le résultat avec $\mathbb{Z}$ au lieu de $2^{-\infty}\mathbb{Z}$ et avec l'ordre dans le langage, mais la même preuve fonctionne ici. On définit l'arithmétique $\langle \mathbb{Z}, |, +\rangle$, qui permet de redéfinir la multiplication (voir [Rr], page 152). Le support est $2^{\mathbb{Z}}$, $2^{x+y} = 2^x.2^y$ et $x|y$ ssi notre structure satisfait $\exists u\ 2^x.u - u = 2^y - 1$. □

Remarque. La preuve utilise fondamentalement le fait que P est discret et admet des modèles premiers. Dans le cas où P est dense, il y a de nombreuses façons de compléter la théorie T1 + T2 + T4 + T6 + T7 + T8, même une fois fixée celle du groupe ordonné P. Supposons par exemple que K est un corps ordonné et P un sous-groupe multiplicatif positif. Si l'on impose que P soit dense dans K, la multiplication de K est définissable dans $\langle K, P\rangle$.

3. Interprétabilités relatives

On connaît la subtilité des résultats d'interprétabilité concernant les structures proches de "$\langle \mathbb{N}, +, V_2\rangle$", ou plutôt $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, V_2\rangle$ pour rester dans un cadre analogue au précédent: si v_2 est la valuation 2-adique (considérons par exemple qu'elle n'est pas définie en 0) et $V_2(x) = 2^{v_2(x)}$, alors $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, 2^{\mathbb{N}}\rangle$ est une réduite propre de

$\langle \mathbb{Z}, +, \leq, V_2\rangle$ et de $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, 2^x\rangle$, qui sont réduites propres de leur composée $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, V_2, 2^x\rangle$. Cette dernière est interdéfinissable avec $\langle \mathbb{Z}, +, \leq, v_2\rangle$ et $\langle \mathbb{Z}, +, .\rangle$, donc indécidable. Les autres structures sont décidables (d'après des travaux, entre autres, de Semenov et van den Dries, voir [CP] et [BHMV]). C'est en pensant à ces résultats que nous énonçons la proposition ci-dessous. Nous utilisons pour la montrer une version adaptée à notre contexte du théorème de Stone d'approximation simultanée, qui demande qu'on réfléchisse un peu sur la notion de groupe agissant sur un groupe abélien, ce que nous ferons dans la section 4.

Proposition. *$\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, \leq\restriction 2^{\mathbb{Z}}\rangle$ est une réduite propre de $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, V_2, \leq\restriction 2^{\mathbb{Z}}\rangle$ et de $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, \leq\rangle$, chacune de ces deux structures est une réduite propre de $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, V_2, \leq\rangle$. Toutes ces structures sont décidables, et la réduite $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f\rangle$ est superstable.*

Remarque. Si l'on adjoint la fonction partielle $x \to 2^x$ définie sur $\mathbb{Z}$ à $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, \leq\rangle$, la structure devient indécidable à cause du résultat de Penzin. De même si l'on adjoint v_2 ou le logarithme de base 2 (défini sur $2^{\mathbb{Z}}$), chacun permettant de définir $\mathbb{Z}$.

Démonstration. 1. *Décidabilité de la structure la plus riche.* Tout abord, grâce à [DS] (où l'on travaille avec un langage à deux sortes, mais il est ici indifférent de considérer P comme extérieur à G ou de l'identifier à une orbite), on sait que $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, V_2, \leq\restriction 2^{\mathbb{Z}}\rangle$ est décidable, sa théorie T' (de langage $L' = L \setminus \{\leq\} \cup \{\leq\restriction 2^{\mathbb{Z}}, V_2\}$) exprimant: c'est un P-groupe valué dans le $\mathbb{Z}$-groupe P, de type $(\mathbb{Z}, V_2)$, de groupe résiduel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et P-divisible. Au-dessus d'un modèle, un élément ne peut être que valuationnel ou immédiat. Le type d'un élément immédiat est déterminé par une suite de Cauchy maximale l'approchant. Le type d'un élément de P est déterminé par son type au sens du groupe ordonné P.

On peut alors superposer la structure ordonnée et la structure valuée, comme fait van den Dries dans sa thèse ([vdD1]). C'est ici beaucoup plus facile, pour les raisons suivantes: on considère des structures divisibles, c'est-à-dire closes dans l'absolu et non pas relativement à une valuation d'un type particulier, ou à un ordre: nous travaillons dans l'équivalent des corps algébriquement clos. Comme en plus il n'y a pas de conjugaison (les modèles premiers sont définissables point par point), ça devient trivial.

Soit T'' la théorie du langage

$$L'' := L \cup \{V_2\} = L \cup L'$$

obtenue en ajoutant à T les axiomes suivants

V_2 n'est pas défini en 0,
$P(x) \leftrightarrow V_2(x) = x$,
$V_2(-x) = V_2(x)$,
$V_2(x + y) \geq \min(V_2(x), V_2(y))$,
$P(x) \to V(x.y) = x.V_2(y)$,
$V_2(x) = 1 \to V_2(x - 1) > 1$.

(Alors $T'' \vdash T'$.) La complétude de T'' se montre comme précédemment par va-et-vient entre deux modèles ω_1-saturés M et N, les isomorphismes partiels se faisant entre sous-modèles dénombrables M_0 et N_0 de T'' vérifiant $P(M_0) \prec P(M)$ et

$P(N_0) \prec P(N)$. Les axiomes supplémentaires adjoints à T étant universels, il suffit à M_0 d'être modèle de T pour être modèle de T''. Le va-et-vient s'amorce avec $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, V_2, \leq \rangle$ et, pour le prolongement, il suffit comme précédemment de considérer les deux cas suivants.

Premier cas: P est inchangé. Alors x ne peut être que limite au sens de V_2. Son type au sens de T est déterminé par sa coupure au sens de l'ordre, et son type au sens de T' par une suite pseudo-convergente l'approchant au sens de V_2. Les deux sont réalisables simultanément grâce au théorème de Stone de la section 4.

Deuxième cas: $x \in P$. Alors le type au sens de P de x détermine son type au sens de T et au sens de T'.

2. *Aucune des deux structures intermédiaires n'interprète l'autre.* Prenons une extension élémentaire ω_1-saturée $\mathbb{Q}^*$ de $\mathbb{Q}$ au sens de L''. D'après le théorème de Stone, pour q arbitraire dans $\mathbb{Q}_2 \backslash \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}_2$ est le corps des nombres 2-adiques), il existe $x \in \mathbb{Q}^*$ réalisant sur $\mathbb{Q}$ à la fois le type de $\sqrt{2}$, par exemple, pour l'ordre et de q pour V_2. Autrement dit il y a dans $\mathbb{Q}^*$ beaucoup de L-automorphismes partiels qui ne respectent pas V_2. Le même argument montre que V_2 n'interprète pas l'ordre. Par voie de conséquence, $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, \leq\restriction 2^{\mathbb{Z}} \rangle$, réduite commune à $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, V_2, \leq\restriction 2^{\mathbb{Z}} \rangle$ et $\langle \mathbb{Q}, 2^{\mathbb{Z}}, +, f, \leq \rangle$ en est une réduite propre.

3. *La structure* $\langle \mathbb{Q}, 0, +, 2^{\mathbb{Z}}, 1, 2, f \rangle$ *est axiomatisée par*

- t1. $\langle G, +, 0 \rangle$ est un groupe sans torsion divisible,
- t2. $P(1), P(2)$ et $\langle P, f \restriction P^2, 1, 2 \rangle \equiv \langle \mathbb{Z}, +, 0, 1 \rangle$,
- t3. ce groupe P agit par automorphismes sur G par f, $f(2, x) = x + x =: 2x$ et $P(x) \leftrightarrow P(2x)$,
- t4. pour tout entier n et toute suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de -1 ou de 1,

$$\forall y_1, \ldots, y_n \in P \left[\bigwedge\!\!\!\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} y_i \neq y_j \right] \Rightarrow [\forall t\ \exists! x\ \sum \varepsilon_i f(y_i, x) = t].$$

Une preuve directe de la complétude est aisée (voir [S2]), la preuve d'origine consiste à remarquer que tout modèle dénombrable $\langle G, P \rangle$ de $\mathrm{t1} + \mathrm{t2} + \mathrm{t3} + \mathrm{t4}$ peut s'enrichir en un modèle de T'. Commençons par ordonner P de façon à ce que

$$\langle P, f \restriction P^2, 1, 2, < \rangle \equiv \langle \mathbb{Z}, +, 0, 1, < \rangle$$

(ce qui est possible puisque P est une extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe divisible), puis considérons, plongé dans G, le P-groupe G_1 de type $(\mathbb{Z}, V_2)$ premier sur P (G_1 est isomomorphe à $k(P)$). On voit que G, en tant que groupe sur lequel P agit, c'est-à-dire en tant que $k(P)$-espaces vectoriel, est somme directe de au plus $\aleph_0$ copies de G_1. On étend la valuation de G_1 à tout G en plongeant chaque autre copie de G_1 dans la clôture immédiate maximale de G_1, en respectant bien sûr la structure de $k(P)$-espace vectoriel. La superstabilité vient alors de ce que, comme précédemment, on peut obtenir toute extension en ajoutant d'une part des éléments de P, dont le type est le type au sens de P, qui est superstable, et des éléments n'augmentant pas P, qui ont tous le même type (si non réalisé). $\square$

4. Théorème de Stone pour certains groupes agissant sur un groupe abélien

Soit un groupe B agissant par automorphismes sur un groupe abélien G. Cette action confère à G une structure de $\mathbb{Z}[B]$-module. Une *valuation* sur G *compatible avec l'action de* B consiste en (cette définition est plus générale que celle de [DS]):
- un sous-groupe normal $B_0 \triangleleft B$,
- un ordre sur $B/B_0 =: \overline{B}$,
- une application $v : G \to \overline{B}u\{\infty\}$ vérifiant

1. $v(x) = \infty$ ssi $x = 0$,
2. $v(x) = v(-x)$,
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,
4. $v(b.x) = \overline{b}.v(x)$.

Par 4, $vG = \overline{B} \cup \{\infty\}$. La valuation est dite *triviale* si $\overline{B} = \{1\}$. Une valuation non triviale définit une topologie non triviale sur G, en prenant les ensembles $\{x \in G; v(x) \geq \overline{b}\}$, $b \in B$, comme base de voisinages de 0. Pour cette topologie l'action de chaque élément de $\mathbb{Z}[B]$ est continue.

Nous nous plaçons maintenant dans la situation suivante (pour plus de détails, voir [S2] et [DS]): aucun $b \in B$, $b \neq 1$, n'agit trivialement sur G, et, si I_G est l'idéal de $\mathbb{Z}[B]$ des éléments annulant G, tout $\alpha \in \mathbb{Z}[B] \setminus I_G$ est bijectif. De plus $\mathbb{Z}[B]/I_G$ est de Ore. Alors l'action de B sur G se prolonge en une action du corps de quotients $k_{\langle G,B\rangle}$ de $\mathbb{Z}[B]/I_G$. Si de plus v n'est pas triviale et, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}[B]$, $v(\alpha.x).v(x)^{-1}$ est indépendant de $x \in G \setminus \{0\}$, alors v induit une valuation sur $k_{\langle G,B\rangle}$. Nous dirons alors que v est *bien compatible avec l'action de* B. De la même façon, si G est ordonné et que B agit sur G par automorphismes croissants de façon à vérifier: $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}[B]$, $(\exists x \in G^{>0}\ \alpha.x > \alpha'.x) \Leftrightarrow (\forall x \in G^{>0}\ \alpha.x > \alpha'.x)$, on peut ordonner $k_{\langle G,B\rangle}$ en posant alors $\overline{\alpha} > \overline{\alpha}'$ ($^{-}$ désigne ici la classe modulo I_G). Si on suppose de plus que cet ordre vérifie $\forall x, y \in G^{>0}\ \exists b \in B\ b.x < y$, on dira que *l'ordre est bien compatible avec l'action de* B.

Sur un corps gauche k, le théorème d'approximation de Stone est vrai: un nombre fini d'ordres et de valuations définissant des topologies deux à deux distinctes définissent des topologies indépendantes (le cas des valuations est traité dans [G]; pour les ordres il suffit de remarquer que la propriété à prouver est du premier ordre et que, sur tout modèle un peu saturé, à tout ordre est associée une valuation définissant la même topologie). Cette propriété se transfère aussitôt à G pour donner le

Théorème de Stone. *Soit un nombre fini d'ordres et de valuations sur G bien compatibles avec l'action de B, et telles que les ordres et les valuations induites sur $k_{\langle G,B\rangle}$ définissent des topologies deux à deux distinctes. Ces ordres et valuations définissent alors des topologies indépendantes sur G, c'est-à-dire vérifiant* (*s'il y a n ordres et m valuations*): $\forall \varepsilon_i \in G$, $\varepsilon_i >_i 0$, *pour* $1 \leq i \leq n$, $\forall g_1, \ldots, g_m \in B$, $\forall x_1, \ldots, x_{n+m} \in G$, $\exists x \in G$ *vérifiant* $|x - x_i|_i <_i \varepsilon_i$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *et* $v_i(x - x_{i+n}) \geq \overline{g}_i$ *pour* $1 \leq i \leq m$.

Démonstration. On choisit des $\zeta_i \in B$, $1 \leq i \leq n + m$, vérifiant $\zeta_i. \sum_{1 \leq l \leq n+m} |x_l|_i <_i \varepsilon_i$, pour $1 \leq i \leq n$, et $v_j(\zeta_j.x_l) \geq \overline{g}_j$ pour $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq l \leq n + m$. Puis, en appliquant le théorème de Stone dans $k_{\langle G,B\rangle}$, on trouve des $h_i \in k\langle G, B\rangle$, pour $1 \leq i \leq n + m$, vérifiant $|h_i - 1|_i <_i \zeta_i$, $|h_l|_i <_i \zeta_i$ pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq n + m$,

$i \neq l$, et $v_j(h_{j+n} - 1) \geq v_j(\zeta_j)$, $v_j(h_l) \geq v_j(\zeta_j)$, pour $1 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq m+n$, $n + j \neq l$; alors $x = \sum h_i.x_i$ convient. □

Remarque. Dans les structures étudiées dans la section 3, les topologies induites sur $k_{\langle G,B\rangle}$ respectivement par l'ordre et V_2 sont distinctes puisque B se plonge dans $k_{\langle G,B\rangle}$ et qu'une suite de B tendant vers l'infini au sens de l'ordre tend vers 0 au sens de V_2.

Bibliographie

[BHMV] V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, et R. Villemaire, *Logic and p-recognizable sets of integers*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **1** (1994), 191–238. MR **96a:**11022a

[CP] G. Cherlin et F. Point, *On extensions of Presburger arithmetic*, Seminarbericht 86 der Humboldt-Universität zu Berlin (Mathematik), Berlin, 1986, pp. 17–34. MR **87k:**03002

[DS] F. Delon et P. Simonetta, *Un principe d'Ax-Kochen-Ershov pour des structures intermédiaires entre groupes et corps valués*, JSL, à paraître.

[G] J. Gräter, *Lokalinvariante Bewertungen*, Math. Z. **192** (1986), 183–194. MR **87i:**12021

[GH] C. Grünenwald et F. Haug, *On stable groups in some soluble group classes*, Seminarbericht 93-1 der Humboldt-Universität zu Berlin (Mathematik), Berlin, 1993, pp. 46–59.

[P] Y. Penzin, *Solvability of the theory of integers with addition, order, and multiplication by an arbitrary number*, Math Notes Academy of Sciences USSR (1973), 401–405.

[Ra] Abraham Robinson, *Solution of a problem of Tarski*, Fund Math XLVII (1959), 179–204. MR **22:**3690

[Rj] Julia Robinson, *Definability and decision problems in arithmetic*, JSL **14** (1949), 98–114. MR **11:**151f

[Rr] Raphael Robinson, *Undecidable rings*, TAMS **70** (1951), 137–159. MR **12:**791b

[S1] P. Simonetta, *Une correspondance entre anneaux partiels et groupes*, J.S.L., à paraître.

[S2] P. Simonetta, Décidabilité et équivalence élémentaire pour des structures du type groupe agissant sur un groupe, JSL, à paraître.

[vdD1] L. van den Dries, *Model Theory of Fields*, Thèse, Utrecht, 1978.

[vdD2] L. van den Dries, *The field of reals with a predicate for the powers of two*, Manuscripta Math. **54** (1985), 187–195. MR **87d:**03098

CNRS-Université Paris 7, UFR de Mathématiques, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France

E-mail address: `delon@logique.jussieu.fr`