PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 126, Number 1, January 1998, Pages 167–171
S 0002-9939(98)03996-3

UNE REMARQUE SUR L'ORTHOGONALITÉ DE L'IMAGE AU NOYAU D'UNE DÉRIVATION GÉNÉRALISÉE

M. BENLARBI DELAI, S. BOUALI, AND S. CHERKI

(Communicated by Palle E. T. Jorgensen)

Abstract. In this paper we introduce the notion of the pair (A, B) of operators having the Fuglede-Putnam property in a two-sided ideal of $L(H)$. The characterization of this class allows us to generalize the recent result of F. Kittaneh. We also give some applications of this result.

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert séparable complexe et $L(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires continus sur H ($L(H)$) est muni de sa norme usuelle d'opérateurs $\|\cdot\|$. Soit I un idéal bilatère propre de $L(H)$ muni d'une norme symétrique $\|\cdot\|_I$ [7, p. 68]. Pour A et $B \in L(H)$, nous définissons l'opérateur $\delta_{A,B}$ sur $L(H)$ comme suit: $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$ pour tout $X \in L(H)$. On désigne par $R(\delta_{A,B})$ et $\operatorname{Ker}(\delta_{A,B})$ l'image et le noyau de $\delta_{A,B}$. Nous désignons par C_p la classe de Von Neumann-Schatten et $\|\cdot\|_p$ sa norme. Dans [10, théorème 2], F. Kittaneh a montré que si A est dominant et B^* est M-hyponormal, alors pour tout $T \in \operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|_I)$ et pour tout $X \in I$,

$$\|\delta_{A,B}(X) + T\|_I \geq \|T\|_I. \tag{1}$$

Ceci signifie que $R(\delta_{A,B}|_I)$ est othogonal au $\operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|_I)$ au sens de la définition 1.2 [1]. Nous dirons que la paire d'opérateurs (A, B) admet la propriété $(F.P)_I$, si $AT = TB$ et $T \in I$, alors $A^\star T = TB^\star$. Dans ce travail nous généralisons le résultat principal de F. Kittaneh en utilisant la norme de Ky Fan et la caractérisation des paires d'opérateurs (A, B) ayant la propriété de Fuglede-Putnam dans un idéal bilatère propre de $L(H)$. Nous donnons aussi une très large classe de paire d'opérateurs A, B satisfaisant l'inégalité (1). Comme conséquence nous déduisons que la paire (A, B) admet la propriété $(\mathrm{F.P})_{C_2}$ si et seulement si pour tout $T \in \operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|_{C_2})$ et pour tout $X \in L(H)$

$$\|\delta_{A,B}(X) + T\|_2^2 = \|\delta_{A,B}(X)\|_2^2 + \|T\|_2^2. \tag{2}$$

Par ailleurs nous généralisons d'autres résultats de F. Kittaneh [8], en donnant une condition suffisante pour que la suite noyau, $\operatorname{Ker}(\delta_{A,B}^{(n)}|I)$, soit stationnaire.

Received by the editors June 26, 1996.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47B47, 47A30, 47B20; Secondary 47B10.
Key words and phrases. Generalized derivation, Fuglede-Putnam Theorems, norm ideal, orthogonality result for derivations, suites noyaux.

2. Le théorème de Fuglede-Putnam et l'image d'une dérivation généralisée

Définition 1. Soit I un idéal bialtère propre de $L(H)$. On appelle norme symétrique sur I, toute norme $\|\cdot\|_I$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) $\|SXK\|_I \leq \|S\|\|X\|_I\|K\|$ pour tous opérateurs S, $K \in L(H)$ et $X \in I$.
(ii) $\|X\|_I = \|X\|$ pour tout X de rang un.

Pour $1 \leq p < \infty$, la norme $\|\cdot\|_p$ est une norme symétrique sur C_p.

Définition 2. Soient A, $B \in L(H)$ et I est un idéal bilatèral de $L(H)$. Si $AT = TB$ et $T \in I$ implique $A^\star T = TB^\star$, alors on dit que la paire (A, B) admet la propriété $(FP)_I$.

Nous commencons par donner un lemme qui nous sera utile par la suite. Notons que ce lemme est une simple adaptation du théorème 1 dans [12].

Lemme 3. *Si A, $B \in L(H)$ et I un idéal bilatère de $L(H)$, alors on a l'équivalence suivante:*

(1) (A, B) admet la propriété $(FP)_I$;

(2) Si $T \in \mathrm{Ker}(\delta_{A,B}|I)$, alors $\overline{R(T)}$ réduit orthogonalement A, $\mathrm{Ker}(T)^\perp$ réduit orthogonalement B et les restrictions $A|_{\overline{R(T)}}$ et $B|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp}$ sont des opérateurs normaux.

Remarques et notations. (1) Dans le cas où $A = B$ et $I = C_1$, on retrouve une autre caractérisation des opérateurs P-symétriques étudiés dans [2] et [3].

(2) Si A est un opérateur compact de $L(H)$, on désignera alors par $s_1(A)$, $s_2(A), \ldots, s_n(A), \ldots$ les valeurs propres de $|A| = (A^\star A)^{\frac{1}{2}}$ ordonnées dans le sens décroissant et répétées avec leurs ordres de multiplicité. Soit $\|A\|_n$ la norme de Ky Fan définie par $\|A\|_n = \sum_{i=1}^n s_j(A)$ pour $n \geq 1$.

Théorème 4. *Soient I un idéal bilatère propre de $L(H)$ et A, $B \in L(H)$. Si la paire (A, B) admet la propriété $(FP)_I$, alors*

(1) $\|\delta_{A,B}(X) + T\|_I \geq \|T\|_I$ pour tout $X \in I$ et pour $T \in \mathrm{Ker}(\delta_{A,B}|I)$.

(2) Pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Ker}(\delta_{A,B}^{(n)}|I) = \mathrm{Ker}(\delta_{A,B}|I) = \bigcap_{i=2}^\infty \mathrm{Ker}(\delta_{A^i,B^i}|I)$.

Preuve. (1) **1ère étape**: supposons que A et B sont normaux. En vertu de [7, p. 82], il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\|(AX - XB) + T\|_n = \sum_{i=1}^n s_j(AX - XB + T) \geq \sum_{i=1}^n s_j(T) = \|T\|_n.$$

Soit $T = U|T|$ la dècomposition polaire de l'opérateur T avec U une isométrie partielle et $\mathrm{Ker}(U) = \mathrm{Ker}(|T|)$. Pour tout $j \geq 1$, on obtient d'après [7, p. 27], que

$$s_j(AX - XB + T) \geq s_j(U^\star[AX - XB + T]) = s_j[U^\star(AX - XB) + |T|].$$

Notons que si $\{g_n\}_{n\geq 1}$ est une base orthonormée de H, alors il s'ensuit de [7, p. 47] que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^n s_j[U^\star(AX - XB) + |T|] \geq \sum_{j=1}^n |\langle [U^\star(AX - XB) + |T|]g_j, g_j\rangle|.$$

En conséquence on obtient,

$$\sum_{i=1}^{n} s_j(AX - XB + T) \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle [U^\star(AX - XB) + |T|]g_j, g_j\rangle|.$$

Puisque $AT = TB$ et A, B sont normaux, alors $BT^\star = T^\star A$ et par conséquent $BT^\star T = T^\star TB$, i.e. $B|T| = |T|B$. Ceci montre l'existence d'une base orthonormée $\{e_k\} \cup \{f_m\}$ de H telle que $\{f_m\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Ker}(|T|)$ et $\{e_k\}$ est formée par des vecteurs propres communs à B et $|T|$. Si $\{g_n\} = \{e_k\} \cup \{f_m\}$ et puisque pour tout $m \geq 1$, $Uf_m = |T|f_m = 0$, alors il suit de l'inégalité précédente que,

$$\sum_{i=1}^{n} s_j(AX - XB + T) \geq \sum_{j=1}^{\inf(n,\mathrm{card}(e_k))} |\langle [U^\star(AX - XB) + |T|]e_j, e_j\rangle|.$$

Un calcul simle montre que,

$$\begin{aligned}\langle U^\star(AX - XB)e_j, |T|e_j\rangle &= \langle T^\star(AX - XB)e_j, e_j\rangle \\ &= \langle (B(T^\star X) - (T^\star X)B)e_j, e_j\rangle = 0\end{aligned}$$

il en découle

$$\langle U^\star(AX - XB)e_j, e_j\rangle = 0 \quad \forall j \geq 1$$

d'où $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} s_j(AX - XB + T) &\geq \sum_{j=1}^{\inf(n,\mathrm{card}(e_k))} |\langle |T|e_j, e_j\rangle| \\ &= \sum_{j=1}^{\inf(n,\mathrm{card}(e_k))} s_j(T) \geq \sum_{i=1}^{n} s_j(T).\end{aligned}$$

2éme étape: supposons que la paire (A, B) admet la propriété $(F.P)_I$. Selon la décomposition de H en

$$H_1 = H = \overline{R(T)}^\perp \oplus \overline{R(T)}, \qquad H_2 = H = \mathrm{Ker}(T)^\perp \oplus \mathrm{Ker}(T)$$

et par application du lemme 3 on peut écrire A, B comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque opérateur X, T de H_2 dans H_1 on obtient:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit de [7] que,

$$\|\delta_{A,B}(X) + T\|_I \geq \|\delta_{A_1,B_1}(X_1) + T_1\|_I.$$

Puisque A_1, B_1 sont normaux et $A_1T_1 = T_1B_1$, alors la première étape de la démonstration montre que

$$\|\delta_{A,B}(X) + T\|_I \geq \|\delta_{A_1,B_1}(X_1) + T_1\|_I \geq \|T_1\|_I = \|T\|_I.$$

(2) (a) Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker}(\delta_{A,B}^{(n)}|I) = \mathrm{Ker}(\delta_{A,B}|I)$ pour tout $n \geq 1$. Il s'ensuit du lemme 2.3 dans [4], que pour que la suite noyau, $\mathrm{Ker}(\delta_{A,B}^{(n)}|I)$, soit

stationnaire, il est nécessaire et suffisant que $R(\delta_{A,B}|I) \cap \operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|I) = \{0\}$. Ce quie achève la démonstration puisque $R(\delta_{A,B}|I)$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|I)$.

(b) Montrons que $\operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|I) = \bigcap_{i=2}^{\infty} \operatorname{Ker}(\delta_{A^i,B^i}|I)$. Notons que

$$\operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|I) \subset \bigcap_{i=2}^{\infty} \operatorname{Ker}(\delta_{A^i,B^i}|I).$$

Si $X \in \bigcap_{i=2}^{\infty} \operatorname{Ker}(\delta_{A^i,B^i}|I)$, alors $A^2XB = XB^3$ et $AXB^2 = A^3X$; en conséquence,

$$\delta_{A,B}^{(3)}(X) = A^3X - 3A^2XB + 3AXB^2 - XB^3 = 0.$$

En utilisant (a) on obtient que

$$\delta_{A,B}^{(3)}(X) = \delta_{A,B}(X) = 0.$$

Question. La condition suffisante de la proposition précédente est-elle nécéssaire? Dans le cas où $I = C_2$, le corollaire suivant (dont la démonstration est une simple conséquence du lemme 3 et d'un résultat de Duggal dans [5]) nous donne une réponse affirmative.

Corollaire 5. *Si A, $B \in L(H)$, alors on a l'équivalence suivante:*

(1) *(A, B) admet la propriété $(FP)_{C^2}$;*

(2) *Pour tout $X \in L(H)$ et pour tout $T \in \operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|C_2)$;*

$$\|\delta_{A,B}(X) + T\|_2^2 = \|\delta_{A,B}(X)\|_2^2 + \|T\|_2^2.$$

Proposition 6. *Soient A, $B \in L(H)$ et I un idéal bilatère propre de $L(H)$. Alors la paire (A, B) admet la propriété $(FP)_I$ sous l'une des conditions suivantes:*

(i) *$\|Ax\| \geq \|x\| \geq \|Bx\|$ pour tout $x \in H$.*

(ii) *A est inversible et B tel que $\|A^{-1}\|\|B\| \leq 1$.*

(iii) *$A = B$ est opérateur sous-normal cyclique.*

(iv) *A est dominant et $B^\star$ M-hyponormal* [15].

Preuve. (i) Il s'ensuit de [13, Lemme 1] que la condition $\|Ax\| \geq \|x\| \geq \|Bx\|$ pour tout $x \in H$, implique que pour chaque $T \in \operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|K(H))$, $\overline{R(T)}$ réduit A, $\operatorname{Ker}(T)^\perp$ réduit B et les restrictions $A|_{\overline{R(T)}}$ et $B|_{\operatorname{Ker}(T)^\perp}$ sont des opérateurs unitaires, où $K(H)$ désigne l'idéal des opérateurs compacts. Ainsi le lemme 3 montre que ceci équivaut à dire que la paire (A, B) admet la propriété $(FP)_{K(H)}$. Ce qui achève la démonstration puisque $I \subset K(H)$.

(ii) Si $A_1 = \|B\|^{-1}A$ et $B_1 = \|B\|^{-1}B$, alors $\|A_1x\| \geq \|x\| \geq \|B_1x\|$ pour tout $x \in H$. En utilisant (i) le résultat est immédiat.

(iii) Si $AT = TA$ et T est compact, alors un résultat de Yoshino [14] montre que T est necéssairement sous-normal. Or tout compact sous-normal est normal. Le théorème de Fuglede-Putnam [6] et la condition $AT = TA$ impliquent $AT^\star = T^\star A$.

Remarque 1. Dans [10], F. Kittaneh a fait remarquer que si la paire d'opérateurs (A, B) admet la propriété $(FP)_{L(H)}$, alors pour tout $T \in \operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|I)$ et pour tout $X \in I$

$$\|\delta_{A,B}(X) + T\|_I \geq \|T\|_I.$$

Notre résultat principal montre qu'il suffit que la paire (A, B) admet la propriété $(FP)_I$ pour que $R(\delta_{A,B}|I)$ soit orthogonal à $\operatorname{Ker}(\delta_{A,B}|I)$. Notons qu'en vertu du théorème 4, l'inégalité (2) est satisfaite pour toute paire d'opérateurs (A, B) vérifiant (i), (ii), (iii) ou (iv) de la proposition 6.

Remarque 2. Le théorème 4 généralise dans une autre direction un autre résultat de F. Kittaneh dans [8] selon lequel que, si A et $B^\star$ sont sous normaux, alors $A^2X = XB^2$ et $A^3X = XB^3$ implique $AX = XB$.

References

[1] Anderson, J. H., *On normal derivations*, Proc. Amer. Math Soc. **38** (1973), 135–140. MR **47:**875

[2] Bouali, S. & Charles, J., *Extention de la notion d'opérateur D-symétrique*, I, Acta Sci. Math. **58** (1993), 517–525. MR **95e:**47048

[3] Bouali, S. & Charles, J., *Extention de la notion d'opérateur D-symétrique* II, Linear Algebra and its Applications **225**: (1995), 175–185.

[4] Bouali, S. & Cherki, S., *Approximation by Generalized Commutators*, Acta. Sci. Math. **63** (1997), 15–20.

[5] Duggal, B. P., *A remark on normal derivations of Hilbert-Schmidt Type*, Monatsh. Math. **112**: (1991), 265–270. MR **92m:**47067

[6] Fuglede, B., *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. **36** (1950), 35–40. MR **11:**371c

[7] Gohberg & Krein, M. G., *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. monographs **18A** (1969). MR **39:**7447

[8] Kittaneh, F., *On the commutants modulo C_p of A^2 and A^3*, J. Austral. Math. **41** (1986), 47–50. MR **87k:**47047

[9] Kittaneh, F., *Normal derivations in Hilbert-Schmidt type*, Glasgow Math. J. **29** (1987), 245–248. MR **88k:**47049

[10] Kittaneh, F., *Normal derivations in norm ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. **123: n6** (1995), 1779–1785. MR **95g:**47054

[11] Maher, P. J., *Commutator approximants*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 115: n 4 (1992), 995–1000. MR **92j:**47059

[12] Takahashi, K., *On the converse of the Fuglede-Putnam Theorem*, Acta. Sci. Math. **43**: (1981), 123–125. MR **82g:**47018

[13] Tong, Y., *Kernels of generalized derivations*, Acta Sci. Math. **54** 1–2 (1990), 159–169. MR **92f:**47032

[14] Yoshino, T., *Subnormal operator with a cyclic vector*, Tohoku Math. J. **21**: (1969), 47–55. MR **39:**7450

[15] Yoshino, T., *Remark on the generalized Putnam-Fuglede Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **95 n 4**: (1985), 571–572. MR **87i:**47034

(M. Benlarbi Delai et S. Bouali) Université II, Place Eugène Bataillon, Département de Mathématiques, 34095 Montpellier Cedex 5, France

(Permanent address, M. Benlarbi Delai) Faculté des Sciences, Mohammed V, Département de Mathématiques et d'Informatique, Rabat, Morocco

(Permanent address, S. Bouali) Faculté des Sciences, Ibn Tofail, Département de Mathématiques et d'Informatique, Kenitra, Morocco

(S. Cherki) Faculté des Sciences et Techniques, Département de Mathématiques, Tanger, Maroc