

SUR LES p -CORPS

M. N'KANZA

(Communicated by Lance W. Small)

ABSTRACT. Here we give new examples of fields in characteristic 2 whose u -invariant and \hat{u} -invariant are different: $u(K) = 2$, $\hat{u}(K) = 2^m$ or ∞ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$). These fields are also p -fields.

RÉSUMÉ. Nous donnons ici de nouveaux exemples de corps K en caractéristique 2 dont le u -invariant et le \hat{u} -invariant diffèrent. Plus précisément: $u(K) = 2$ et $\hat{u}(K) = 2^m$ ou ∞ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$). Ces corps sont aussi des p -corps.

1. INTRODUCTION

Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique des rationnels et $a \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$. Soit encore E le sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ maximal pour la propriété de ne pas contenir a (l'existence de E est assurée par le lemme de Zorn). Ce corps E a la propriété remarquable que toute extension finie est cyclique, c.à.d si $[M : E] < \infty$ alors M est une extension galoisienne de E et $Gal(M/E)$ est cyclique. Moresi s'est inspiré de cette construction (voir [M]), qui est due à Artin (voir [L, p.230, ex.3]), pour fournir les premiers exemples de corps K de caractéristique 2 tels que $u(K) = 2$ et $\hat{u}(K) = 2^m$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$) ou $\hat{u}(K) = \infty$. Rappelons que par définition:

$$(1) \quad u(K) = \max\{\dim q : q \text{ forme quadratique non singulière anisotrope sur } K\}$$

et

$$(2) \quad \hat{u}(K) = \max\{\dim q : q \text{ forme quadratique anistrophe sur } K\}.$$

Dans le paragraphe 2 nous généralisons encore cette construction pour fournir de nouveaux exemples de corps de caractéristique 2 ayant la propriété précédente. D'autre part cette généralisation donne aussi des exemples de p -corps. Cette notion de p -corps a été introduite par Pfister. On dit qu'un corps K est un p -corps, p étant premier, si $[L : K]$ est une puissance de p pour toute extension finie L de K . Pfister a montré (voir [P]) que ces p -corps ont des propriétés arithmétiques intéressantes et a énoncé la conjecture suivante: Si tout système de formes quadratiques q_1, \dots, q_r définies sur K en n variables, $n > r$, a une solution non triviale sur K alors K est un p -corps. Cette conjecture a été récemment résolue par D. Leep en caractéristique 0 (voir [Le]) et est toujours ouverte en caractéristique > 0 .

Received by the editors April 2, 1997 and, in revised form, November 18, 1997.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 11Exx.

Je remercie le Professeur P. Mammone pour les nombreux entretiens que nous avons eus ensemble lors de la préparation de ce travail-ci de ma thèse annexe (présentée le 26 Juin 1991 à l'Université de Mons).

2. RÉSULTATS SUR LES CORPS (a_1, \dots, a_n) -MAXIMAUX

2.1. **Notions.** Soit K un corps de caractéristique p . Notons par \wp le morphisme additif de K dans K qui envoie x sur $\wp(x) := x^p - x$. L'ensemble $\wp(K)$ est non seulement un sous-groupe additif de K mais puisque pour $b \in F_p$, le corps premier, et $x \in K$ on a $b.(x^p - x) = (bx)^p - bx \in \wp(K)$, le sous-groupe additif $\wp(K)$ est aussi un espace vectoriel sur F_p . On peut donc considérer le quotient $K/\wp(K)$ comme un espace vectoriel sur F_p . Si $a_1, \dots, a_n \in K$, on notera $\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_K$ le sous-espace vectoriel de $K/\wp(K)$ engendré par les éléments $a_1 + \wp(K), \dots, a_n + \wp(K)$.

Définition. Soit K un corps de caractéristique p et $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$. On dit que K est (a_1, a_2, \dots, a_n) -maximal si pour toute extension séparable finie L de K on a:

$$(3) \quad \dim_{F_p} \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_K = n \text{ et } \dim_{F_p} \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_L < n$$

pour toute extension séparable finie L de K . Bien-entendu $\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_L$ désigne le sous-espace vectoriel de $L/\wp(L)$ engendré par $a_1 + \wp(L), \dots, a_n + \wp(L)$. Dans [M] Moresi avait considéré le cas $n = 1$ et pour $a \in K \setminus \wp(K)$ avait défini le corps K comme a -maximal si pour toute extension séparable finie L de K , $\wp^{-1}(a) \in L$. La définition ci-dessus généralise donc celle de Moresi.

Le lemme suivant sera utilisé pour démontrer que si K est (a_1, \dots, a_n) -maximal alors $K/\wp(K) = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_K$.

2.2. **Résultat préliminaire.**

Lemme 1. Soit K un corps de caractéristique p et $a, b \in K$. Si $\dim_{F_p} \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_K = 2$ alors $a \notin \wp(K(\wp^{-1}(b)))$.

Démonstration. Posons $T := \wp^{-1}(b)$. Un élément quelconque de $\wp(K(T))$ s'écrit (*)

$$(\wp(l_0) + r(0)) + (\wp(l_1) + r(1))T + \dots + (\wp(l_{p-2}) + r(p-2))T^{p-2} + \wp(l_{p-1})T^{p-1}$$

pour certains $l_0, l_1, \dots, l_{p-1} \in K$ et où la fonction r_p est définie par la formule

$$(4) \quad r(i) = \sum_{j=i+1}^{p-1} \binom{j}{i} l_j^p b^{j-i} \text{ avec } i = 0, 1, \dots, p-2,$$

et où

$$(5) \quad \binom{j}{i} = \frac{j!}{i!(j-i)!}$$

Supposons maintenant que $a \in \wp(K(T))$. L'élément a est donc de la forme (*) pour certains l_1, l_2, \dots, l_{p-1} dans K . En particulier ceci nous dit que tous les coefficients de $T^i, i = 1, \dots, p-1$, sont nuls. On a donc $\wp(l_{p-1}) = 0$ et par suite $l_{p-1} \in F_p$. On a aussi

$$\wp(l_{p-2}) + (p-1)l_{p-1}^p b = 0,$$

c-à-d $\wp(l_{p-2}) = l_{p-1} b$.

Puisque $b \notin \wp(K)$ on voit que $l_{p-1} = 0$ et par conséquent $l_{p-2} \in F_p$. En continuant de cette manière on arrive à:

$$l_{p-1} = l_{p-2} = \dots = l_2 = 0 \text{ et } l_1 \in F_p.$$

On a donc: $a = l_0^p - l_0 + l_1 b$. Ce qui contredit l'hypothèse: $\dim_{F_p} \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_K = 2$. \square

Théorème 2. Soit K un corps de caractéristique p et $a_1, \dots, a_n \in K$. Si K est (a_1, \dots, a_n) -maximal alors

- (a) $K/\wp(K) = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_K$; en particulier $K/\wp(K)$ est de dimension finie.
- (b) $Br_p(K) = 0$, la partie de p -torsion du groupe de Brauer de K est triviale, c.à.d. $Br_p = 0$.
- (c) Pour $p = 2$, $u(K) = 2$.

Démonstration. Pour (a): soient $b \in K \setminus \wp(K)$ et $L = K(\wp^{-1}(b))$. Comme K est (a_1, \dots, a_n) -maximal $\dim_{F_p} \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_L < n$. En d'autres termes, il existe $i_1, i_2, \dots, i_n \in F_p$ tels que $a := i_1 a_1 + \dots + i_n a_n \in \wp(L)$. Par le lemme 1 on déduit alors que $\dim_{F_p} \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle_K = 1$ ou encore $b + \wp(K) \in \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle_K$.

(b) est une conséquence immédiate d'un théorème de Saltman qui dit que si $\dim_{F_p} K/\wp(K) < \infty$ alors $Br_p(K) = 0$ (voir [S]). On conclut alors par (a).

Pour (c): comme $Br_2(K) = 0$, on a en particulier que toute algèbre de quaternions $[a, b]_K$ (c-à-d l'algèbre engendrée par i, j tels que $i^2 + i = a$, $j^2 = b$ et $ji = ij + j$) est isomorphe à $M_2(K)$. Puisque ceci vaut pour tout $a \in K$ et tout $b \in K^*$ on en déduit que la forme quadratique norme $X^2 + XY + aY^2$ représente tout élément de K^* . Car une forme quadratique non singulière de dimension 4 est du type $b(X^2 + XY + aY^2) + c(Z^2 + ZT + dT^2)$; celle-ci est clairement isotrope. \square

Avant de construire des corps maximaux K avec $u(K) = 2$ et $\hat{u}(K) = 2^m$ ou ∞ , voici un lemme, d'un intérêt indépendant, que l'on utilisera dans la construction.

Lemme 3. Soit K un corps de caractéristique 2 tel que $[K : K^2] > 1$. Si $u(K) = 2$ alors $\hat{u}(K) = [K : K^2]$.

Démonstration. Si $[K : K^2] = n$ et si c_1, c_2, \dots, c_n est une base de K sur K^2 on voit facilement que la forme quadratique $c_1 X_1^2 + c_2 X_2^2 + \dots + c_n X_n^2$ est anisotrope. D'où: $\hat{u}(K) \geq [K : K^2]$. En fait puisque les seules formes quadratiques non singulières et anisotropes sont de dimension deux, c-à-d du type $a(X^2 + XY + bY^2)$, on en déduit que les seules formes quadratiques anisotropes de dimension strictement plus grande que $n = [K : K^2]$ ne peuvent être que du type

$$(**) \quad a(X^2 + XY + bY^2) + c_1 X_1^2 + c_2 X_2^2 + \dots + c_{n-1} X_{n-1}^2.$$

En utilisant la proposition 1.ii) page 5 de [MMW] on voit que ceci ne peut jamais se produire. En effet s'il existait une forme quadratique anisotrope du type (**) la proposition citée impliquerait que $u(K) = 2[K : K^2] > 2$. Ce qui contredirait l'hypothèse $u(K) = 2$. \square

2.3. Construction des corps maximaux. Soient X_1, \dots, X_m des indéterminées sur F_2 et $K = F_2(X_1, \dots, X_m)$. On a: $[K : K^2] = 2^m$. Fixons $n \leq m$. On a bien: $\dim_{F_2} \langle \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n \rangle_K = n$. On peut donc considérer L une clôture (X_1, \dots, X_n) -maximale dans la clôture séparable de K .

Proposition 4. $u(K) = 2$ et $\hat{u}(K) = 2^m$.

Démonstration. Puisque L est (X_1, \dots, X_m) -maximal, $u(L) = 2$ par le théorème 2. Donc par le lemme 3 on sait aussi que $\hat{u}(L) = [L : L^2]$. Mais puisque L est une extension séparable de K on a: $[L : L^2] = [K : K^2] = 2^m$, voir par exemple [B, lemme 1.3]. \square

Nous terminons en faisant remarquer que si K est de caractéristique p et est (a_1, \dots, a_n) -maximal pour certains $a_1, \dots, a_n \in K$ alors K est un p -corps.

Proposition 5. *Soit K un corps de caractéristique p et $a_1, \dots, a_n \in K$. Si K est (a_1, \dots, a_n) -maximal, alors K est un p -corps.*

Démonstration. Par [K, particulièrement le théorème 57] il suffit de démontrer que si M est une extension finie de K alors p divise $[M : K]$. On peut évidemment supposer que M est une extension séparable de K . Dans ce cas par maximalité on sait qu'il existe $a \in K \setminus \wp(K)$ tel que $K(\wp^{-1}(K)) \subset M$. D'où la thèse. \square

3. QUESTIONS OUVERTES (EN CARACTÉRISTIQUE 2)

1. Si $u(K) = 4$, alors qu'en est-il de $\hat{u}(K)$? Atteint-il la borne inférieure $[K : K^2]$ ou la borne supérieure $2[K : K^2]$?

2. Dans ce travail la séparation entre $u(K)$ et $\hat{u}(K)$ a lieu avec $\hat{u}(K)$ atteignant sa borne inférieure. Existe-t-il des corps K pour lesquels $u(K)$ et $\hat{u}(K)$ sont différents avec

a) $u(K)$ atteignant sa borne supérieure, c.à.d $u(K) < \hat{u}(K) = 2[K : K^2]$?

b) $[K : K^2] < \hat{u}(K) < 2[K : K^2]$

(e.g. $2 < n = [K : K^2] < \hat{u}(K) = n + 2 < 2[K : K^2]$)?

REFERENCES

- [B] R. Baeza: Comparing u -invariants of characteristic 2 Bol.Soc.Bras.Mat. 13(1992) p. 105 – 114. MR **84f**:10027
- [Bl] A. Blanchard: Les corps non commutatifs, Coll. Sup., P.U.F., 1972. MR **50**:7242
- [K] I. Kaplanski: Fields and Rings, Univ. Chicago Press, 1972. MR **50**:2139; MR **96a**:12001
- [L] S. Lang: Algebra, Addison-Wesley, 1970. MR **86j**:00003 (second edition)
- [Le] D. Leep: Pfister conjectures on quadratic co-fields, Journal für die reine und angewandte Mathematik 404(1990), 209 – 220. MR **91d**:11036
- [MMW] P. Mammone, R. Moresi, A. Wadsworth: u -invariants of fields of characteristic 2, Math. Z. 208(1991), 335 – 347. MR **92m**:11033
- [M] R. Moresi: On a class of fields admitting only cyclic extensions of prime power degree. Bol. Soc. Bras. Mat. Vol 15(1984), p. 101 – 107. MR **87g**:12003
- [P] Pfister: Systems of quadratic forms, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 59(1979), p. 115 – 123. MR **80j**:10033
- [S] D. Saltman: Splittings of cyclic p -algebras, Proc. Am. Math. Soc. 62(1977), p. 223 – 228. MR **55**:8006

UNIVERSITÉ DE MONS, FACULTÉ DES SCIENCES, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, AVENUE V. MAISTRIAU, 15, B- 7000 MONS, BELGIQUE