

FONCTIONS QUI OPERENT SUR LES ESPACES DE BESOV

DJALIL KATEB

(Communicated by Christopher D. Sogge)

ABSTRACT. Soient s, p et q trois réels tels que $1 < p < \infty$, $1 < s < 1 + 1/p$, et $1 \leq q \leq \infty$ et soit f une fonction appartenant à l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Nous montrons que si F est une fonction, de la variable réelle, nulle à l'origine, lipschitzienne et appartenant à l'espace $\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}$ on a alors $F(f) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. La preuve est essentiellement basée sur des résultats d'approximation par des fonctions splines de degré 1.

INTRODUCTION

On se propose de poursuivre l'exploration du calcul fonctionnel dans l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Il s'agit de décrire la classe des fonctions F , de la variable réelle, telle que $F(f) \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, pour tout $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ où s, p et q sont trois réels tels que $1 < p < \infty$, $1 < s < 1 + 1/p$, et $1 \leq q \leq \infty$. Ce travail se situe dans une suite logique à celui accompli par Y.Meyer et G.Bourdaud [5] et indépendamment par P.Oswald [7] qui montrent que la fonction

$$F(t) = |t|$$

opère, dans ce cas précis, sur $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Il s'ensuit alors que deux classes U et V de fonctions "raisonnables" opèrent aussi: U est l'ensemble des fonctions F telles que

$$F(0) = 0, F' \in L^\infty, \sup_{t \neq 0} |t| |F''(t)| < \infty$$

tandis que V est l'ensemble des fonctions F telles que $F(0) = 0$ et que F'' est une mesure bornée. Dans un travail en collaboration avec G.Bourdaud [4], nous décidions d'aller chercher des fonctions F lipschitziennes, vérifiant $F(0) = 0$, dans un espace de Besov homogène tel que $\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}$; il nous fallut cependant nous contenter d'un "pseudo" espace de Besov inclus dans $\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}$ mais suffisamment grand pour contenir les espaces U et V .

Dans ce travail, on se propose d'améliorer ce résultat pour montrer que l'espace de Besov homogène $\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}$ est un bon candidat. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant

Théorème. *Soient s, p et q trois réels tels que $1 < p < \infty, 1 < s < 1 + 1/p$ et $1 \leq q \leq \infty$. Toute fonction F lipschitzienne, nulle à l'origine et appartenant à $\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}$ envoie par composition à gauche $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. De plus, il*

Received by the editors April 17, 1998.

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46E35, 47H30.

©1999 American Mathematical Society

existe une constante $C > 0$ (dépendant de n, s, p et de q) telle que pour toute fonction $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, à valeurs réelles, on ait

$$\|F(f)\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \text{Max} \left(\|F'\|_\infty, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s+1/p}} \right) \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

1. ESPACES DE BESOV

Soient $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $0 < s < 1$. On définit l'espace de Besov $B_{p,q}^s = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ comme suit:

Définition 1.1. Une fonction f appartient à $B_{p,q}^s$ si et seulement si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et si:

$$(1.1) \quad \omega(h) = \|f(x+h) - f(x)\|_p$$

le module de continuité de f en norme L^p satisfait:

$$(1.2) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega^q(h)}{|h|^{n+sq}} dh \right)^{1/q} < \infty$$

(avec la modification classique quand $p = \infty$ et/ou $q = \infty$). Si $s > 1$, et $s \notin \mathbb{N}$ on écrit $s = m + r$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 1$. Alors $f \in B_{p,q}^s$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$ on ait $\partial^\alpha f \in B_{p,q}^r$.

On note $\dot{B}_{p,q}^s$ l'espace homogène défini par

$$f \in \dot{B}_{p,q}^s \Leftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega^q(h)}{|h|^{n+sq}} dh \right)^{1/q} < \infty.$$

2. ESPACES DE BESOV ET FONCTIONS SPLINES

Plaçons nous dans le cas unidimensionnel $n = 1$. Nous allons décrire une suite de résultats essentiels pour la preuve de notre théorème.

Soient s, p, q trois réels tels que $1 \leq p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ et $1 < s < 1 + 1/p$. Etant donnée une fonction f appartenant à $B_{p,q}^s(\mathbb{R})$ nous notons par f_j le spline de degré 1 ayant pour noeuds les points $x_k^{(j)} = 2^{-j}k, k \in \mathbb{Z}$ et coïncidant avec f en ces points (ceci a un sens car f est continue). On sait que si l'on note $\varphi = \chi * \chi, \chi$ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, 1)$, il existe des constantes c_{jk} telles que

$$f_j(x) = \sum_k c_{jk} \varphi(2^j x - k).$$

L'espace $B_{p,q}^s$ se caractérise d'une manière équivalente à l'aide des fonctions splines comme le montre le résultat suivant la

Proposition 2.1 ([4]). Si $1 \leq p < \infty, 1 < s < 1 + 1/p$, on a alors

$$(2.1) \quad \|f\|_{B_{p,p}^s} \approx \|f\|_p + \|(2^{js} \|f - f_j\|_p)_{j \geq 0}\|_{l^p}.$$

Nous utiliserons, par la suite, aussi un résultat fort utile d'Oswald [7] on pose $\Delta f(k2^{-j}) = f((k+1)2^{-j}) - f(k2^{-j})$. On considère un sous-ensemble qu'on note Λ (au lieu de Λ^j) du type $\Lambda = \{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{N}$ ou $\Lambda = \mathbb{Z}$ et la série $\sum_{p \in \Lambda} |\Delta f(k_p 2^{-j})|^p$ dont les termes ont la propriété

$$\Delta f(k_p 2^{-j}) \cdot \Delta f(k_{p+1} 2^{-j}) \leq 0.$$

Précisons que les entiers k_p sont tels que $k_p < k_{p+1}$. Oswald montre le

Lemme 2.1 ([7]). *Soient p, q, s des réels tels que $1 \leq p < \infty, 1 < s < 1+1/p$ et $1 \leq q \leq \infty$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f appartenant à $B_{p,q}^s$ et pour toute suite d'entiers $(k_p)_{p \in \Lambda}$ vérifiant $\Delta f(k_p 2^{-j}) \cdot \Delta f(k_{p+1} 2^{-j}) \leq 0$ on ait*

$$(2.2) \quad \left\| \left(2^{j(s-1/p)} \cdot \left(\sum_{p \in \Lambda} |\Delta f(k_p 2^{-j})|^p \right)^{1/p} \right)_{j \geq 0} \right\|_{l^q} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}.$$

La signification du lemme d'Oswald est la suivante: (2.1) montre que l'on a

$$\|f\|_{B_{p,p}^s} \approx \|f\|_p + \left\| \left(2^{j(s-1/p)} \cdot \left(\sum_k |\Delta^2 f(k 2^{-j})|^p \right)^{1/p} \right)_{j \geq 0} \right\|_{l^q},$$

où Δ^2 est la différence divisée seconde. Le lemme d'Oswald est puissant dans la mesure où il nous autorise à remplacer la différence seconde par une différence divisée première évaluée en des points dyadiques $(k_p 2^{-j})$ tels que la propriété "d'oscillations" $\Delta f(k_p 2^{-j}) \Delta f(k_{p+1} 2^{-j}) \leq 0$ soit vérifiée.

Lemmes préparatoires. Signalons que la structure de ce travail est très voisine de celle présentée dans [4]. Nous présentons les deux lemmes essentiels directement liés à notre problème et l'amélioration —considérable— repose sur la preuve du second lemme.

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne nulle en 0 appartenant à $\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}$. Nous désignerons par t un réel tel que $1 < s < t < 1 + 1/p$ et on posera $\sigma = t - 1$. On a

Lemme 2.2. *On a*

i)

$$(2.3) \quad \int |F'(f_{j+1}(x))|^p \int \frac{|f'_{j+1}(x) - f'_j(x) - (f'_{j+1}(y) - f'_j(y))|^p}{|x - y|^{p\sigma+1}} dy dx \leq \|F'\|_\infty^p \varepsilon_j^p 2^{jp(t-s)}$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \|f\|_{B_{p,p}^s}^p$.

ii)

$$(2.4) \quad \int |f'_{j+1}(x) - f'_j(x)|^p \int \frac{|F'(f_{j+1}(x)) - F'(f_{j+1}(y))|^p}{|x - y|^{p\sigma+1}} dy dx \leq \text{Max}(\|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}}^p, \|F'\|_\infty^p) \varepsilon_j^p 2^{jp(t-s)}$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \|f\|_{B_{p,p}^s}^p$.

Preuve. (Cf. [4].) □

L'amélioration de notre résultat par rapport à celui exposé dans [4] réside dans le lemme suivant

Lemme 2.3. *On a*

$$(2.5) \quad \int |f'_j(x)|^p |F'(f_{j+1}(x)) - F'(f_j(x))|^p dx \leq C \text{Max}(\|F'\|_\infty^p, (\|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}})^p) \varepsilon_j^p 2^{jp(1-s)}$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \|f\|_{B_{p,p}^s}^p$.

Preuve. Considérons la partition suivante:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \Lambda} I_m$$

où Λ est du type $\{1, 2, \dots, m\} \subset \mathbb{N}$ ou $\Lambda = \mathbb{Z}$ et où les I_m sont tels que si f_j est croissante sur I_m alors f_j est strictement décroissante sur I_{m+1} . Soit K_m l'ensemble des entiers k tels que l'intervalle $(k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ soit inclus dans I_m . On a:

$$\begin{aligned} & \int |f'_j(x)|^p |F'(f_{j+1}(x)) - F'(f_j(x))|^p dx \\ &= \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} \int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} |f'_j(x)|^p |F'(f_{j+1}(x)) - F'(f_j(x))|^p dx \\ &\leq C(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

où on a posé

$$I_1 = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} \int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} |F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x) - F'(f_j(x))f'_j(x)|^p dx$$

et

$$I_2 = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} \int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} |F'(f_j(x))|^p |f'_{j+1}(x) - f'_j(x)|^p dx.$$

Seule la majoration de I_1 nous intéresse vu que celle de I_2 , conséquence immédiate du lemme 2.1, est donnée par

$$(2.6) \quad I_2 \leq C \|F'\|_\infty^p \varepsilon_j^p 2^{jp(1-s)}$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \|f\|_{B_{p,p}^s}$. \square

Majoration de I_1 . Si

$$g(x) = F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x) - F'(f_j(x))f'_j(x),$$

on a $\int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} g(x) dx = 0$. Notons $\Omega_{jh}^k = \{x \in (k2^{-j}, (k+1)2^{-j})/x + h \in (k2^{-j}, (k+1)2^{-j})\}$, $|h| \leq 2^{-j}$, on a d'après l'inégalité de Holder

$$\int_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} |g(x)|^p dx \leq 2^j \int_{|h| \leq 2^{-j}} \int_{x \in \Omega_{jh}^k} |g(x+h) - g(x)|^p dx dh.$$

On a ainsi $I_1 \leq C(I_3 + I_4)$ où on a posé

$$I_3 = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \int_{x \in \Omega_{jh}^k} |F'(f_j(x+h))f'_j(x+h) - F'(f_j(x))f'_j(x)|^p dx$$

et où

$$\begin{aligned} I_4 = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} 2^j \int_{|h| \leq 2^{-j}} \int_{x \in \Omega_{jh}^k} & |F'(f_{j+1}(x+h))f'_{j+1}(x+h) \\ & - F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x)|^p dx. \end{aligned}$$

On commence par majorer I_3 . L' estimation de I_3 est assez simple. En effet, si on note J_k l'image de $(k2^{-j}, (k + 1)2^{-j})$ par f_j , on a via un changement de variables:

$$I_3 \leq C \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} 2^{j(p-1)} |\Delta f(k2^{-j})|^{p-1} \sup_h \int_{x \in J_k} |F'(x+h) - F'(x)|^p dx$$

(le sup étant pris pour $|h| \leq |f(k2^{-j}) - f((k + 1)2^{-j})|$). Les intervalles J_k étant deux à deux disjoints, on a alors

$$(2.7) \quad I_3 \leq C 2^{jp} \sum_{m \in \Lambda} 2^{-j} |\Delta f(l_m 2^{-j})|^p \|F\|_{B_{p,\infty}^{1+1/p}}^p$$

où l_m est l'indice tel que $|\Delta f(l_m 2^{-j})| = \sup_{k \in K_m} |\Delta f(k 2^{-j})|$. Le lemme d'Oswald nous permet alors de conclure que

$$(2.8) \quad I_3 \leq \|F\|_{B_{p,\infty}^{1+1/p}}^p \varepsilon_j^p 2^{jp(1-s)},$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \|f\|_{B_{p,p}^s}^p$.

La clé de la preuve du lemme repose essentiellement sur l'estimation assez compliquée de I_4 . Pour $|h| \leq 2^{-j-1}$, on note

$$\begin{aligned} \Omega_{h,k}^{(1)} &= \left\{ x \in \left((k2^{-j}, (k + 1/2)2^{-j}) \right) / x + h \in \left(k2^{-j}, (k + 1/2)2^{-j} \right) \right\}, \\ \Omega_{h,k}^{(2)} &= \left\{ x \in \left((k + 1/2)2^{-j}, (k + 1)2^{-j} \right) / x + h \in \left((k + 1/2)2^{-j}, (k + 1)2^{-j} \right) \right\}, \\ \Omega_{h,k}^{(3)} &= \left\{ x \in \left(k2^{-j}, (k + 1/2)2^{-j} \right) / x + h \in \left((k + 1/2)2^{-j}, (k + 1)2^{-j} \right) \right\}, \\ \Omega_{h,k}^{(4)} &= \left\{ x \in \left((k + 1/2)2^{-j}, (k + 1)2^{-j} \right) / x + h \in \left(k2^j, (k + 1/2)2^{-j} \right) \right\}. \end{aligned}$$

On décompose $I_4 \leq C(I_4^{(1)} + I_4^{(2)} + I_4^{(3)} + I_4^{(4)})$ où

$$I_4^{(1)} = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} \sup_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(1)}} |F'(f_{j+1}(x+h))f'_{j+1}(x+h) - F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x)|^p dx,$$

où

$$I_4^{(2)} = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} \sup_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(2)}} |F'(f_{j+1}(x+h))f'_{j+1}(x+h) - F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x)|^p dx,$$

où

$$I_4^{(3)} = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} 2^j \int_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(3)}} |F'(f_{j+1}(x+h))f'_{j+1}(x+h) - F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x)|^p dx dh,$$

et où

$$I_4^{(4)} = \sum_{m \in \Lambda} \sum_{k \in K_m} 2^j \int_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(4)}} |F'(f_{j+1}(x+h))f'_{j+1}(x+h) - F'(f_{j+1}(x))f'_{j+1}(x)|^p dx dh.$$

Les majorations de $I_4^{(1)}$ et de $I_4^{(2)}$ sont directes. En effet, remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} & |f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) - f(k2^{-j})| \\ & \leq |f((k + 1)2^{-j}) - f(k2^{-j})| + \frac{1}{2} |f(k2^{-j}) - 2f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) + f((k + 1)2^{-j})|; \end{aligned}$$

par changement de variable on obtient alors

$$(2.9) \quad I_4^{(1)} \leq CMa x \left(\|F'\|_\infty^p, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}}^p \right) \left(\sum_{m \in \Lambda} 2^{j(p-1)} |\Delta f(2^{-j}l_m)|^p + 2^{j(p-1)} \sum_{m \in \Lambda} |\Delta f(2^{-j}l_m)|^{p-1} \delta_{l_m} \right)$$

où on a noté $\delta_k = \frac{1}{2} |f((k + 1)2^{-j}) - 2f((k + \frac{1}{2})2^{-j}) + f(k2^{-j})|$ et où $\delta_{l_m} = \sup_{k \in K_m} \delta_k$. En appliquant l'inégalité de Holder et le lemme d'Oswald aidant, on alors:

$$(2.10) \quad I_4^{(1)} \leq CMa x (\|F'\|_\infty^p, (\|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}})^p) 2^{jp(1-s)} \varepsilon_j^p.$$

En ce qui concerne $I_4^{(2)}$, on suit exactement la même démarche pour avoir

$$(2.11) \quad I_4^{(2)} \leq CMa x (\|F'\|_\infty^p, (\|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}})^p) 2^{jp(1-s)} \varepsilon_j^p.$$

Reste à étudier de près $I_4^{(3)}$ et $I_4^{(4)}$. Tout d'abord, on s'intéressera aux intervalles $(k2^{-j}, (k + 1/2)2^{-j})$, $k \in K_m$, sur lesquels $f_{j+1}(x)$ a la même monotonie que $f_j(x)$; en effet dans le cas contraire, on a $|f'_{j+1}| \leq |f'_j|$.

On majore tout d'abord, quand $k \in K_m$:

$$2^j \int_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(3)}} |F'(f_{j+1}(x+h)) - F'(f_{j+1}(x))|^p |f'_{j+1}(x)|^p dx dh.$$

On peut toujours supposer, quitte à utiliser l'inégalité triangulaire, que l'on a $|f'_{j+1}(x)| \leq |f'_{j+1}(x+h)|$, quand $x \in \Omega_{h,k}^{(3)}$, $|h| \leq 2^{-j-1}$. On a alors si on note $d_{jk} = f'_{j+1}(x)$ quand $x \in (k2^j, (k + 1/2)2^{-j})$

$$\begin{aligned} & 2^j \int_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(3)}} |F'(f_{j+1}(x+h)) - F'(f_{j+1}(x))|^p |f'_{j+1}(x)|^p dx dh \\ & \leq C 2^j d_{jk}^{p-2} \int_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(3)}} |F'(f_{j+1}(x+h)) - F'(f_{j+1}(x))|^p \\ & \quad \times |f'_{j+1}(x)| |f'_{j+1}(x+h)| dx dh. \end{aligned}$$

Notons $J_k^{(3)}$ l'image par f_{j+1} de $\Omega_{h,k}^{(3)}$. Par un changement de variables on a alors

$$\begin{aligned} & \int_{|h| \leq 2^{-j-1}} \int_{x \in \Omega_{h,k}^{(3)}} |F'(f_{j+1}(x+h)) - F'(f_{j+1}(x))|^p |f'_{j+1}(x)|^p dx dh \\ & \leq C 2^{j(p-1)} |f((k + 1/2)2^{-j}) - f(k2^{-j})|^p \\ & \quad \times \sup_{|h| \leq |f((k+1/2)2^j) - f(k2^{-j})|} \frac{1}{h} \int_{J_k^{(3)}} |F'(u+h) - F'(u)|^p du. \end{aligned}$$

En utilisant le même argument que pour (2.9), on déduit alors grâce à la lemme 2.1 et l'inégalité triangulaire que l'on a

$$(2.12) \quad I_4^{(3)} \leq C \text{Max}(\| F' \|_\infty^p, (\| F \|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}})^p) \left(2^{-j} \sum_{m \in \Lambda} 2^{j(p-1)} | f((k_m + 1/2)2^{-j}) - f(k_m 2^{-j}) |^p + 2^{jp(1-s)} \varepsilon_j^p \right)$$

et le lemme d'Oswald permet alors de conclure que

$$(2.13) \quad I_4^{(3)} \leq C \text{Max}(\| F' \|_\infty^p, (\| F \|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}})^p) 2^{jp(1-s)} \varepsilon_j^p.$$

La majoration de $I_4^{(4)}$ est identique. En rassemblant l'ensemble des inégalités obtenues, on a alors la majoration désirée.

On déduit ainsi le résultat suivant

Corollaire 2.1. *On a*

$$(2.14) \quad \int \int \frac{| F'(f_{j+1}(x))[f'_{j+1}(x) - f'_j(x)] - F'(f_{j+1}(y))[f'_{j+1}(y) - f'_j(y)] |^p}{| x - y |^{p\sigma+1}} dy dx \leq \text{Max}(\| F' \|_\infty^p, \| F \|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}}^p) \varepsilon_j^p 2^{jp(t-s)}$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \| f \|_{B_{p,p}^s}^p$.

Nous avons aussi besoin du lemme suivant

Lemme 2.4 ([4]). *On a*

$$\int \int \frac{| f'_j(x)[F'(f_{j+1}(x)) - F'(f_j(x))] - f'_j(y)[F'(f_{j+1}(y)) - F'(f_j(y))] |^p}{| x - y |^{p\sigma+1}} dy dx \leq \text{Max}(\| F \|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}}^p, \| F' \|_\infty^p) \varepsilon_j^p 2^{jp(t-s)}$$

où (ε_j) est une suite appartenant à $l^p(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \approx \| f \|_{B_{p,p}^s}^p$.

Après cette préparation, nous sommes en mesure de prouver le théorème principal.

3. PREUVE DU RÉSULTAT PRINCIPAL

Le fait que F soit lipschitzienne et nulle en 0 implique l'appartenance de $F(f)$ à \mathbf{L}^p . Plus précisément, on a

$$(3.1) \quad \| F(f) - F(f_j) \|_p \leq \| F' \|_\infty \varepsilon_j 2^{-js}.$$

Soit t un réel tel que $s < t < 1 + 1/p$. Montrons qu'il existe une constante $C > 0$ (dépendant de s, t et de p) et une suite $(\varepsilon_j)_{j \geq 0}$ appartenant à l^p telle que l'on ait

$$(3.2) \quad \| F(f_j) \|_{\dot{B}_{p,p}^t} \leq C \text{Max}(\| F' \|_\infty, \| F \|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}}) 2^{j(t-s)} \varepsilon_j.$$

Soit $g_j = F(f_{j+1}) - F(f_j)$; on a

$$\| F(f_{j+1}) - F(f_j) \|_{\dot{B}_{p,p}^t}^p \leq C (A_1 + A_2)$$

où

$$A_1 = \int \int \frac{| F'(f_{j+1}(x))[f'_{j+1}(x) - f'_j(x)] - F'(f_{j+1}(y))[f'_{j+1}(y) - f'_j(y)] |^p}{| x - y |^{p\sigma+1}} dy dx$$

et

$$A_2 = \int \int \frac{|f'_j(x)[F'(f_{j+1}(x)) - F'(f_j(x))] - f'_j(y)[F'(f_{j+1}(y)) - F'(f_j(y))]|^p}{|x - y|^{p\sigma+1}} dy dx.$$

Le corollaire 2.1 et le lemme 2.4 permettent de déduire que

$$(3.3) \quad \|F(f_{j+1}) - F(f_j)\|_{\dot{B}_{p,p}^t} \leq \text{Max} \left(\|F'\|_\infty, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}} \right) 2^{j(t-s)} \varepsilon_j,$$

tandis que l'inégalité triangulaire et (3.3) impliquent

$$(3.4) \quad \|F(f_j)\|_{\dot{B}_{p,p}^t} \leq \|F(f_0)\|_{\dot{B}_{p,p}^t} + C \text{Max} \left(\|F'\|_\infty, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}} \right) \left(\sum_{k=0}^{j-1} \varepsilon_k 2^{k(t-s)} \right).$$

L'injection $l^1 * l^p \hookrightarrow l^p$, nous apprend que la suite $(\eta_j)_{j>0}$ définie par

$$\eta_j = 2^{-j(t-s)} \sum_{k=0}^{j-1} \varepsilon_k 2^{k(t-s)}$$

appartient à l^p avec l'estimation

$$(3.5) \quad \|(\eta_j)_{j>0}\|_{l^p} \leq C \|(\varepsilon_j)_{j>0}\|_{l^p},$$

et on en déduit ainsi qu'il existe une constante positive $C = C(s, p, t)$ telle que l'on ait

$$\|F(f_j)\|_{\dot{B}_{p,p}^t} \leq C \text{Max} \left(\|F'\|_\infty, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}} \right) \left(\|f_0\|_p + 2^{j(t-s)} \eta_j \right).$$

Reste le terme en f_0 . On a

$$\begin{aligned} \|f_0\|_p &\leq \|f - f_0\|_p + \|f\|_p \leq c \|f\|_{B_{p,p}^s} \\ &\leq c 2^{j(t-s)} 2^{-j(t-s)} \|f\|_{B_{p,p}^s}. \end{aligned}$$

En rassemblant les inégalités, on déduit alors qu'il existe une constante positive $C = C(s, t, p)$ telle que l'on ait

$$\|F(f_j)\|_{\dot{B}_{p,p}^t} \leq C \text{Max} \left(\|F'\|_\infty, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}} \right) \left(2^{j(t-s)} 2^{-j(t-s)} \|f\|_{B_{p,p}^s} + 2^{j(t-s)} \eta_j \right),$$

grâce aux estimations (3.5) et $\sum_{j \geq 0} \varepsilon_j^p \leq C \|f\|_{B_{p,p}^s}^p$, on a alors

$$(3.6) \quad \|F(f)\|_{B_{p,p}^s} \leq C \text{Max} \left(\|F'\|_\infty, \|F\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{1+1/p}} \right) \|f\|_{B_{p,p}^s}.$$

Ceci achève la preuve du théorème principal dans le cas $n = 1$ et $p = q$.

La preuve du théorème principal dans le cas $n > 1, p \neq q$ se fait en deux étapes:

1 ère étape: On étend le résultat à $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$ grâce à la propriété de Fubini. Ceci prouve alors le théorème principal quand $p = q$.

2ème étape: on étend au cas $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ en suivant la démarche de Bourdaud-Meyer ([5], p 356-357 / [4], p673-675).

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourdaud, G., *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev*, Sem. Anal. Harm. Orsay, (1980-81), 6–17. MR **84c**:46031
2. Bourdaud, G., Kateb, Dalila, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*, Proc. Amer. Math. Soc., **116** (1991), 1067–1076. MR **91j**:46040
3. Bourdaud, G. Kateb, Djalil, *Le calcul fonctionnel dans l' espace de Sobolev fractionnaire*, Math.Z., **210** (1992), 607–613. MR **93i**:46058
4. Bourdaud, G. Kateb, Djalil, *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov*, Math. Ann, **330** (1995), 653–675. MR **96k**:47118
5. Bourdaud, G. Meyer, Y., *Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev*, J. Functional Anal., **97** (1991), 351–360. MR **92e**:46062
6. Dahlberg, B. J., *A note on Sobolev spaces*, Proc. Symp. Pure Math., **35, 1** (1979), 183–185. MR **81h**:46030
7. Oswald, P., *On the boundedness of the mapping $f \rightarrow |f|$ in Besov spaces*, Comment. Univ. Carolinae, **33** (1992), 57–66. MR **93c**:46052

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE, CENTRE DE RECHERCHES DE ROYALLIEU, B. P. 20529, 60205 COMPIÈGNE CEDEX, FRANCE

E-mail address: `dkateb@dma.utc.fr`