PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 129, Number 3, Pages 913–919
S 0002-9939(00)05553-2
Article electronically published on September 19, 2000

LE DEGRÉ DE LINDELÖF EST l-INVARIANT

AHMED BOUZIAD

(Communicated by Alan Dow)

ABSTRACT. Two Tychonoff spaces X and Y are said to be l-equivalent if $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are linearly homeomorphic. It is shown that if X and Y are l-equivalent, then the Lindelöf numbers of X and Y are the same. The proof given is a strengthening of the one given by N.V. Velichko to show that the Lindelöf property is l-invariant.

0. INTRODUCTION

Deux espaces topologiques complétement réguliers X et Y sont dits t-équivalents (respectivement, l-équivalents) si $C_p(X)$ et $C_p(Y)$ sont homéomorphes (respectivement, linéairement homéomorphes). Ici $C_p(X)$ désigne l'ensemble des fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ continues, muni de la topologie de la convergence simple. L'objet de cet article est de montrer que deux espaces l-équivalents quelconques ont le même degré de Lindelöf, ce qui répond à une question de A.V. Arhangelskiĭ reprise dans [4]. Les premières suspicions à l'égard de l'invariance du degré de Lindelöf par l-équivalence, ont commencé dès la parution du travail de A.V. Arhangel'skiĭ [1] suivi de celui de E.G. Pytkeev [9], où il est montré, entre autres, que le maximum des degrés de Lindelöf des puissances finies d'un espace est un t-invariant. Depuis, plusieurs résultats se rapportant à cette question ont été établis. Un survol complet de l'historique des t-invariants et des l-invariants se trouve dans les articles [3], [4] de A.V. Arhangel'skiĭ, par conséquent nous en indiquons seulement quelques éléments. Parmi ces résultats, citons O.G. Okunev [7] qui a montré que la σ-compacité est un t-invariant et V.V. Tkachuk [10] qui a montré que le degré héréditaire de Lindelöf est un l-invariant. Ce résultat de Tkachuk a été ensuite généralisé par O.G. Okunev [8] en montrant que le degré héréditaire de Lindelöf est en fait un t-invariant. Une importante persée dans cette direction, comme l'a dit Arhangel'skiĭ dans [3], a été accomplie en 1990 par N.V. Velichko qui a montré que la classe des espaces de Lindelöf est stable par l-équivalence. Ce résultat de N.V. Velichko est paru récemment dans [12].

D'autres résultats concernant l'invariance du degré de Lindelöf par l-équivalence, dans des classes particulières d'espaces topologiques, sont connus. D'abord, il résulte immédiatement du résultat de Tkachuk cité ci-dessus que, dans la classe des espaces parfaits, le degré de Lindelöf est un l-invariant (et plus généralement,

Received by the editors January 20, 1999 and, in revised form, May 14, 1999.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54C35; Secondary 46E10.
Key words and phrases. Set-valued maps, Lindelöf degree, linear homeomorphism, function spaces.

©2000 American Mathematical Society

un t-invariant d'après Okunev [8]). J. Baars [5] a montré que c'est également le cas pour la classe des espaces qui sont paracompacts et qui vérifient le premier axiome de dénombrabilité. Le résultat de J. Baars a été étendu par V. Valov [11] à la classe des wq-espaces et à celle des espaces μ-complets.

Pour finir cette introduction, nous donnons une brève description de cette note. Le noyau de notre approche est la notion de ϕ-extracteur introduite et étudiée sous une forme abstraite dans la section 1. Étant donnée une multifonction $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ semi-continue inférieurement, un *ϕ-extracteur* est une application G définie sur la collection des ouverts de Y et à valeurs dans les parties de X et reliée à ϕ par des propriétés spécifiques. (La définition précise est donnée ci-dessous.) Une telle application G, quand elle existe, est connectée à ϕ de telle sorte que, sous des conditions convenables, le degré de Lindelöf $l(Y)$ de Y ne peut pas dépasser celui de X (Proposition 3 et Théorème 4). Dans la section 2, nous considérons un plongement linéaire $\psi : C_p(Y) \to C_p(X)$ et nous montrons, en empruntant notamment des idées à [12], que la multifonction $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ naturellement associée à ψ admet un ϕ-extracteur (Lemme 5). Le reste de la preuve (Lemme 6 et 7) consiste à montrer que ce ϕ-extracteur satisfait à toutes les conditions requises pour que les résultats de la section 1 s'appliquent. Le résultat le plus général (Théorème 8) obtenu par cette méthode s'énonce de la façon suivante: si la multifonction associée au plongement linéaire $\psi : C_p(Y) \to C_p(X)$ est à valeurs non vides, alors $l(Y) \le l(X)$. En particulier, si X et Y sont l-équivalents, alors $l(X) = l(Y)$.

1. Multifonctions et degré de Lindelöf

Soit $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ une multifonction, où X et Y sont deux espaces topologiques et où $\mathcal{P}(Y)$ désigne l'ensemble de toutes les parties de Y. L'espace Y est supposé de Hausdorff. Pour tout $A \subset Y$, on note $\phi^*(A) = \{x \in X : \phi(x) \subset A\}$ et $\phi(X) = \bigcup\{\phi(x) : x \in X\}$. On dira que ϕ est *surjective* si $Y = \phi(X)$.

Tout au long de cette note, les lettres $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers positifs non nuls et l'espace usuel des nombres réels. Le symbole $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A.

Rappelons que $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ est dite *semi-continue inférieurement* si pour tout ouvert $U \subset Y$, l'ensemble $\{x \in X : \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est un ouvert de X. L'espace Y étant de Hausdorff, le résultat suivant est immédiat.

Proposition 0. *Si ϕ est semi-continue inférieurement, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout ouvert $V \subset Y$, l'ensemble $\{x \in X : |\phi(x) \cap V| \ge n\}$ est un ouvert de X.*

Désignons par $\mathcal{T}$ la collection des ouverts de Y. On appelle *ϕ-extracteur* (ou simplement extracteur) toute application $G : \mathcal{T} \to \mathcal{P}(X)$ vérifiant les conditions suivantes.

S(1): $\phi^*(U) \subset G(U)$;

S(2): Si $U \subset V$ et $x \in G(V) \setminus G(U)$ alors $\phi(x) \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$;

S(3): Pour toute suite croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ telle que $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\ge n} G(U_m)$, on a $Y \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Pour tout $U \in \mathcal{T}$, on note $F(U) = X \setminus G(U)$.

Dans les lemmes 1, 2 et la proposition 3, G est un ϕ-extracteur fixé.

Lemme 1. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ une suite croissante et soit $x \in X$. Si $\phi(x)$ est fini, alors l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} : x \in G(U_n)\}$ est fini ou co-fini.*

Preuve. Supposons que I et I^c soient infinis. Alors il existe une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I^c$ telle que $n_{k+1} \geq n_k + 1$ et $n_k + 1 \in I$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, d'après S(2), pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\phi(x) \cap (U_{n_k+1} \setminus U_{n_k}) \neq \emptyset$. Comme les ensembles $U_{n_k+1} \setminus U_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints, il en résulte que $\phi(x)$ est infini. □

Dans le lemme suivant $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $|\phi(x)| \geq n - k$ pour tous $x \in \bigcap_{i=k}^{n} F(U_i)$ et $k \leq n$.

Lemme 2. *Si $\phi(x)$ est fini, alors il existe un entier n tel que $x \in G(U_m)$ pour tout $m \geq n$.*

Preuve. D'après le lemme 1, il suffit de montrer que l'ensemble $I = \{n \in \mathbb{N} : x \in G(U_n)\}$ est infini. Si I était fini, il existerait $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \bigcap_{i=k}^{n} F(U_i)$ pour tout $n \geq k$. On aurait alors $|\phi(x)| \geq n - k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible puisque $\phi(x)$ est fini. □

Le résultat suivant nécessite quelques notations (utilisées également dans la section 2). Pour toute collection $\mathcal{L}$ de sous-espaces de X, on note $l(\mathcal{L}) = \sup\{l(Z) : Z \in \mathcal{L}_f\}$, où $l(Z)$ désigne le degré de Lindelöf de Z et $\mathcal{L}_f$ la collection de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{L}$. Rappelons que le degré de Lindelöf d'un espace topologique Z est le plus petit cardinal infini τ tel que de tout recouvrement ouvert de Z on puisse extraire un sous-recouvrement de cardinal inférieur ou égal à τ.

Soit τ un cardinal infini. Pour toute collection $\mathcal{U}$ d'ensembles, on note $[\mathcal{U}]_\tau$ la collection constituée des réunions de toutes les sous-collections de $\mathcal{U}$ ayant un cardinal inférieur ou égal à τ. Un recouvrement $\mathcal{U}$ de Y sera dit *τ-trivial* si $Y \in [\mathcal{U}]_\tau$; i.e. $\mathcal{U}$ admet un sous-recouvrement ayant un cardinal inférieur ou égal à τ.

Désignons par $\mathbf{H}(\tau)$ l'énoncé suivant.

> "*Il existe une collection $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant $l(\mathcal{L}) \leq \tau$ et une base $\mathcal{B}$ de Y telle que, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ de Y non τ-trivial, chaque $U \in [\mathcal{U}]_\tau$ soit contenu dans au moins un $V \in [\mathcal{U}]_\tau$ tel que $F(V) \in \mathcal{L}$.*"

Si l'énoncé $\mathbf{H}(l(X))$ est satisfait, on dira que l'extracteur G est *synchronisé* avec le degré de Lindelöf de X.

Proposition 3. *Supposons que ϕ soit semi-continue inférieurement et à valeurs finies non vides. Si $\mathbf{H}(\tau)$ est satisfait et $l(X) \leq \tau$, alors $l(Y) \leq \tau$.*

Preuve. Nous supposons que $l(Y) > \tau$ pour aboutir à une contradiction. Fixons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ dont l'existence est guarantie par le fait que $\mathbf{H}(\tau)$ est vrai. Fixons un recouvrement ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ de Y non τ-trivial. Nous allons construire, par récurrence sur n, une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [\mathcal{U}]_\tau$ croissante telle que, en posant $F_{k,m} = \bigcap_{i=k}^{m} F(U_i)$ pour $k \leq m$, on ait la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante

(1) $F(U_i) \in \mathcal{L}$ pour tout $i \leq n$;
(2) $|\phi(x)| \geq m - k + 2$ pour tous $x \in F_{k,m}$ et $k \leq m \leq n$;
(3) $|\phi(x) \cap U_{m+1}| \geq m - k + 2$ pour tous $x \in F_{k,m}$ et $k \leq m < n$.

Comme $l(X) \leq \tau$, il existe une collection $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ ayant un cardinal inférieur ou égal à τ telle que $\phi(x) \cap \bigcup\mathcal{U}_1 \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Soit $U_1 \in [\mathcal{U}]_\tau$ tel que l'on ait à la fois $\bigcup\mathcal{U}_1 \subset U_1$ et $F(U_1) \subset \mathcal{L}$. Comme $\phi^*(U_1) \subset G(U_1)$ et $x \in \phi^*(U_1)$ pour tout $x \in X$ tel que $|\phi(x)| = 1$, on a $|\phi(x)| \geq 2$ pour tout $x \in F(U_1)$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $U_1 \subset \ldots \subset U_n$ vérifiant les conditions (1)-(3) aient été définis. Comme $l(\mathcal{L}) \leq \tau$, d'après (1) dans $\mathcal{P}_n$ on a $l(F_{k,n}) \leq \tau$ pour tout $k \leq n$. Donc, compte tenu de la Proposition 0 et de la condition (2) dans $\mathcal{P}_n$, il existe une collection $\mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}$ ayant un cardinal inférieur ou égal à τ telle que $|\phi(x) \cap \bigcup \mathcal{U}_{n+1}| \geq n-k+2$ pour tout $x \in F_{k,n}$ et pour tout $k \leq n$. Soit $U_{n+1} \in [\mathcal{U}]_\tau$ tel que l'on ait à la fois $U_n \cup \bigcup \mathcal{U}_{n+1} \subset U_{n+1}$ et $F(U_{n+1}) \in \mathcal{L}$. Puisque $l(\mathcal{L}) \leq \tau$, les conditions (1) et (3) de $\mathcal{P}_{n+1}$sont vérifiées. Montrons que (2) l'est aussi. Nous avons seulement à examiner le cas de $F_{k,n+1}$. Soit $x \in F_{k,n+1}$.

Si $k = n+1$, alors, puisque $|\phi(x) \cap U_1| \geq 1$ et $U_1 \subset U_{n+1}$, on a $|\phi(x) \cap U_{n+1}| \geq 1$. Comme $x \in F(U_{n+1})$, il résulte de S(1) que $|\phi(x)| \geq 2 = (n+1) - (n+1) + 2$.

Si $k < n+1$, alors $F_{k,n+1} \subset F_{k,n}$, donc $x \in F_{k,n}$. Par construction de U_{n+1}, on a $|\phi(x) \cap U_{n+1}| \geq n - k + 2$. Comme $x \in F(U_{n+1})$, il résulte de S(1) que $|\phi(x)| \geq n - k + 2 + 1$.

Ceci montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est entièrement vérifiée et termine la construction.

D'après la condition (2), le lemme 2 s'applique à la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} G(U_m)$. Par conséquent, d'après S(3), on a $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Comme $U_n \in [\mathcal{U}]_\tau$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le recouvrement $\mathcal{U}$ de Y est τ-trivial, ce qui est contradictoire. Donc $l(Y) \leq \tau$. □

La proposition 3 entraine le résultat suivant.

Théorème 4. *Si ϕ est à valeurs finies non vides et admet un extracteur synchronisé avec le degré de Lindelöf de X, alors $l(Y) \leq l(X)$.*

2. Application

Dans cette section, nous appliquons le théorème 4 de la section 1 pour établir le résultat annoncé dans le titre de cette note. Dans toute la suite, X et Y sont deux espaces complétement réguliers et $\psi : C_p(Y) \to C_p(X)$ est une application linéaire continue fixés. Rappelons d'abord quelques notions et propriétés de base prevenant de la C_p-théorie (on pourra consulter [2], [6], [8] pour les démonstrations). On associe de façon standard à ψ une multifonction semi-continue inférieurement $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ de la façon suivante. Pour tout $x \in X$, la forme linéaire $\psi_x : f \in C_p(Y) \to \psi(f)(x) \in \mathbb{R}$ appartient à $L(Y)$, le dual topologique de $C_p(Y)$. Comme les fonctions d'évaluations $f \in C_p(Y) \to f(y) \in \mathbb{R}$, $y \in Y$, forment une base de Hamel pour $L(Y)$, si $\psi_x \neq 0$ il existe un ensemble fini $\phi(x) \subset Y$ non vide et des nombres réels non nuls $\lambda_y(x)$, $y \in \phi(x)$, uniques, tels que pour tout $f \in C(Y)$ on ait

$$\psi(f)(x) = \sum_{y \in \phi(x)} \lambda_y(x) f(y).$$

Si $\psi_x = 0$, on pose $\phi(x) = \emptyset$ et on adopte la convention $\sum \emptyset = 0$. Ainsi, la multifonction ϕ est à valeurs non vides si et seulement si $\psi_x \neq 0$ pour tout $x \in X$.

Rappelons que si ψ est un *plongement* de $C_p(Y)$ dans $C_p(X)$, c'est-à-dire si $\psi : C_p(Y) \to \psi(C(Y)) \subset C_p(X)$ est un homémorphisme, alors ϕ est surjective.

Dans la suite, pour simplifer les notations, on posera $\psi(f) = \overline{f}$. En particulier, l'ensemble

$$\{x' \in X : |\overline{f}(x') - \overline{f}(x)| < 1\}$$

est un voisinage ouvert de x dans X.

Maintenant nous sommes prêt pour définir un extracteur pour la multifonction ϕ. Pour $V \subset Y$ et $x \in X$, on note $r_V(x) = \sum\{\lambda_y(x) : y \in \phi(x) \cap V^c\}$ et on pose

$G(V) = \{x \in X : r_V(x) = 0\}$. Le symbole r_V est emprunté à [12], où les points de $G(V)$ sont dits V*-spécifiques*.

Lemme 5. *Si $\psi : C_p(Y) \to C_p(X)$ est un plongement, alors G est un ϕ-extracteur.*

Preuve. Il est clair que $\phi^*(V) \subset G(V)$. D'autre part, pour tout $x \in G(V) \setminus G(U)$, avec $U \subset V$, il résulte de l'égalité

$$r_U(x) = r_V(x) + \sum_{y \in \phi(x) \cap (V \setminus U)} \lambda_y(x) \neq 0$$

et du fait que $r_V(x) = 0$, que $\phi(x) \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$. Les conditions S(1) et S(2) sont donc vérifiées par G (définie sur la collection $\mathcal{T}$ de tous les ouverts de Y).

Vérifions la condition S(3). Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ une suite croissante telle que $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n} G(U_m)$; posons $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et supposons qu'il existe $y \in Y \setminus U$. Posons $O = \{g \in C(Y) : |g(y)| < 1\}$; comme $\psi : C_p(Y) \to \psi(C(Y))$ est ouverte, il existe $x_1, \dots, x_l \in X$ tels que $g \in \psi(O)$ pour tout $g \in \psi(C(Y))$ vérifiant $g(x_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq l$. Posons $F = \bigcup_{i\leq l} \phi(x_i)$ et fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait à la fois $F \cap U \subset U_k$ et $\{x_1, \dots, x_l\} \subset G(U_k)$. Enfin, soit $f \in C(Y)$ telle que $f(F \cap U) \subset \{0\}$ et $f((F \cap U^c) \cup \{y\}) \subset \{1\}$. Pour tout $1 \leq i \leq l$, on a

$$\overline{f}(x_i) = \sum_{z \in \phi(x_i) \cap U} \lambda_z(x_i) f(z) + \sum_{z \in \phi(x_i) \cap U^c} \lambda_z(x_i) f(z) = r_U(x_i) = r_{U_k}(x_i) = 0.$$

Donc $\overline{f} \in \psi(O)$. Comme ψ est injective, on obtient $|f(y)| < 1$ ce qui est contradictoire. Donc $Y \subset U$. ☐

Désignons par $\mathcal{B}$ la collection des ouverts fonctionnels de Y et par $\mathcal{C}$ la collection de leurs complémentaires. Rappelons qu'un ouvert $V \subset Y$ est dit *fonctionnel* s'il existe une fonction continue $f : Y \to \mathbb{R}$ et un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tels que $V = f^{-1}(U)$. Tout ouvert fonctionnel V admet une *décomposition* de la forme $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ où $F_n \in \mathcal{C}$ et $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si de plus on peut trouver une telle décomposition vérifiant $\phi^*(V) \setminus \phi^*(F_n) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dira que V est *adéquat*.

Un ensemble $A \subset X$ est dit *de type F_τ dans X*, où τ est un cardinal, si A s'écrit comme réunion d'une collection ayant un cardinal inférieur ou égal à τ et constituée de fermés de X.

Lemme 6. *Soit S un ensemble infini et $(V_s)_{s\in S}$ une famille d'ouverts adéquats, stable pour la réunion finie. Alors $F(\bigcup_{s\in S} V_s)$ est de type F_τ dans X, où $\tau = |S|$.*

Preuve. Posons $V = \bigcup_{s\in S} V_s$. Pour tout $s \in S$, soit $(F_n^s)_{n\in\mathbb{N}}$ une décomposition de V_s et, pour tout $n \geq 1$, soit $f_n^s \in C(Y)$ telle que $f_n^s(x) = 0$ si $x \in F_n^s$ et $f_n^s(x) = n$ si $x \notin V_s$. Pour $x \in \phi^*(V_s)$ et $k \in \mathbb{N}$, désignons par $U_k^s(x)$ l'ensemble

$$\bigcap_{i\leq k} \{x' \in X : |\overline{f}^s_{i+n_x^s}(x')| < 1\},$$

où n_x^s est le premier entier m tel que $\phi(x) \subset F_m^s$. Alors, puisque $\overline{f}^s_{i+n_x^s}(x) = 0$, $U_k^s(x)$ est un ouvert de X contenant le point x. Posons

$$A_s = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{x\in\phi^*(V_s)} U_k^s(x)$$

et

$$B_s = \{x \in X : \phi(x) \cap (V \setminus V_s) \neq \emptyset\}$$

et soit $A = \bigcap_{s \in S}(A_s \cup B_s)$.

L'ensemble A_s est un G_δ de X. L'ensemble B_s est aussi un G_δ de X; en effet, comme ϕ est à valeurs finies, on a $B_s = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}\{x \in X : \phi(x) \cap (V \setminus F_n^s) \neq \emptyset\}$. Par conséquent, pour établir le lemme, il suffit de montrer que $G(V) = A$.

Montrons que $F(V) \subset X \setminus A$. Soit $y \in F(V)$. Comme $\phi(y)$ est fini et la famille $(V_s)_{s \in S}$ est stable pour la réunion finie, il existe $s \in S$ tel que $\phi(y) \cap V \subset V_s$, i.e. $y \notin B_s$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\phi(y) \cap V \subset F_k^s$. Comme $r_V(y) \neq 0$, on suppose sans perte de généralité que $k|r_V(y)| \geq 1$. Nous allons vérifier que

$$y \notin \bigcup_{x \in \phi^*(V_s)} U_k^s(x);$$

il en résultera que $y \notin A_s$ et donc $y \notin A$. Soit $x \in \phi^*(V_s)$; on a $\overline{f}^s_{k+n_x^s}(y) = (k + n_x^s)r_V(y)$, il résulte donc des inégalités $(k + n_x^s)|r_V(y)| \geq k|r_V(y)| \geq 1$ que $y \notin U_k^s(x)$.

Montrons que $X \setminus A \subset F(V)$. Comme les V_s, $s \in S$, sont adéquats, on peut supposer que la décomposition de chaque V_s est telle que $\phi^*(V_s) \setminus \phi^*(F_n^s) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $y \notin A$ et soit $s \in S$ tel que $y \notin A_s \cup B_s$. On a $\phi(y) \cap V \subset V_s$; soit $p \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\phi(y) \cap V \subset F_p^s$. Fixons $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \notin \bigcup_{x \in \phi^*(V_s)} U_k^s(x)$, et $x \in \phi^*(V_s)$ tel que $\phi(x) \cap (F_p^s)^c \neq \emptyset$; on a alors $n_x^s > p$ et il existe $i \leq k$ tel que $|\overline{f}^s_{i+n_x^s}(y)| \geq 1$. On a

$$\phi(y) \cap V = \phi(y) \cap V_s \subset F_p^s \subset F^s_{i+n_x^s},$$

donc $\overline{f}^s_{i+n_x^s}(y) = (i + n_x^s)r_V(y)$. Par conséquent, $(i + n_x^s)|r_V(y)| \geq 1$; en particulier $r_V(y) \neq 0$, donc $y \in F(V)$. □

Lemme 7. *Supposons que ϕ soit surjective. Soit τ un cardinal infini et $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ un recouvrement ouvert de Y non τ-trivial. Alors, pour toute famille $(V_s)_{s \in S} \subset \mathcal{U}$, où $|S| \leq \tau$, il existe une famille $(U_t)_{t \in T} \subset [\mathcal{U}]_{\aleph_0}$ stable pour la réunion finie telle que*

(1) *$|T| \leq \tau$;*
(2) *pour tout $t \in T$, U_t est adéquat;*
(3) *$\bigcup_{s \in S} V_s \subset \bigcup_{t \in T} U_t$.*

Preuve. Posons $V = \bigcup_{s \in S} V_s$ et notons que $[\mathcal{U}]_{\aleph_0} \subset \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{U}$ est non τ-trivial, on a $Y \setminus V \neq \emptyset$; soit $x_1 \in X$ tel que $\phi(x_1) \not\subset V$ et $U_1 \in [\mathcal{U}]_{\aleph_0}$ tel que $\phi(x_1) \subset U_1$. Supposons que $x_1, \ldots, x_n$ et $U_1, \ldots, U_n$ soient construits. L'ensemble $Y \setminus (V \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n)$ est non vide, donc il existe $x_{n+1} \in X$ tel que $\phi(x_{n+1}) \not\subset V \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$. Soit $U_{n+1} \in [\mathcal{U}]_{\aleph_0}$ tel que $\phi(x_{n+1}) \subset U_{n+1}$. Désignons par $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [\mathcal{U}]_{\aleph_0}$ les suites obtenues en poursuivant ce processus. Posons $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Soit $(W_t)_{t \in T}$ la famille de toutes les réunions finies d'éléments de $(V_s)_{s \in S}$ et pour $t \in T$ posons $U_t = W_t \cup U$. Il est clair que la famille $(U_t)_{t \in T} \subset [\mathcal{U}]_{\aleph_0}$ est stable pour la réunion finie, et que l'on a $|T| \leq \tau$ et $\bigcup_{s \in S} V_s \subset \bigcup_{t \in T} U_t$. Vérifions que chaque U_t est adéquat. Soit $t \in T$ et fixons une décomposition $(F_n^t)_{n \in \mathbb{N}}$ pour W_t et pour chaque $n \in \mathbb{N}$ une décomposition $(F_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ pour U_n. La suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $G_n = F_n^t \cup F_n^1 \cup \ldots \cup F_n^n$, est une décomposition de U_t; de plus, on a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \phi^*(U_t)$ et $x_{n+1} \notin \phi^*(G_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les résultats annoncés.

Théorème 8. *Supposons que* $\psi : C_p(Y) \to C_p(X)$ *soit un plongement linéaire et que pour tout* $x \in X$ *il existe* $f \in C(Y)$ *telle que* $\psi(f)(x) \neq 0$. *Alors* $l(Y) \leq l(X)$.

Preuve. L'hypothèse faite sur ψ assure que la multifonction ϕ est à valeurs non vides. D'après le lemme 5, G est un ϕ-extracteur. De plus, d'après les lemmes 6 et 7, l'énoncé $\mathbf{H}(l(X))$ est satisfait lorsque $\mathcal{L}$ est la collection des ensembles qui sont de type $F_{l(X)}$ dans X et $\mathcal{B}$ est la base de Y constituée des ouverts fonctionnels (notons que $\mathcal{L}$ est stable pour l'intersection finie et que $l(\mathcal{L}) \leq l(X)$). En d'autres termes, G est un ϕ-extracteur synchronisé avec $l(X)$. Donc, d'après le théorème 4, on a $l(Y) \leq l(X)$. ☐

Corollaire 9. *Si* X *et* Y *sont* l*-équivalents, alors* $l(X) = l(Y)$.

References

[1] A.V. Arhangel'skiĭ, *On some topological spaces occurring in functional analysis*, Uspehi Mat. Nauk **31, N 5** (1976), 17-32. (In Russian). MR **56:**16569

[2] A.V. Arhangel'skiĭ, *Topological Function Spaces*, (Kluwer, Dordrecht, 1992). MR **92i:**54022

[3] A.V. Arhangel'skiĭ, *C_p-theory*, in: M. Hušek and J. van Mill, eds., Recent Progress in General Topology (Elsevier Science Publishers B.V., 1992), 1-56. CMP 93:15

[4] A.V. Arhangel'skiĭ, *Embeddings in C_p-spaces*, Topology Appl. **85** (1998), 9-33. MR **99c:**54018

[5] J. Baars, *Function spaces on first countable paracompact spaces*, Bull. Pol. Acad. Sci. **42, 1** (1994), 29-35.

[6] M.M. Choban, *General theorems on functional equivalence of topological spaces*, Topol. Appl. **89** (1998), 223-239. CMP 99:01

[7] O.G. Okunev, *Weak topology of an associated space, and t-equivalence*, Math. Notes **46 (1-2)** (1990), 334-338. MR **91h:**46008

[8] O.G. Okunev, *Homeomorphisms of function spaces and hereditary cardinal invariants*, Topology Appl. **80** (1997), 177-188. MR **98i:**54006

[9] E.G. Pytkeev, *Tightness of spaces of continuous functions*, Uspekhi Mat. Nauk **37, N 1** (1982), 157-158. (In Russian). MR **83c:**54017

[10] V.V. Tkachuk, *Some non-multiplicative properties are l-invariant*, Comment. Math. Univ. Carolinae **38, N 1** (1997), 169-175. MR **98h:**54010

[11] V. Valov, *Function spaces*, Topol. Appl. **81** (1997), 1-22. MR **98j:**54030

[12] N.V. Velichko, *The Lindelöf property is l-invariant*, Topol. Appl. **89** (1998), 277-283. MR **99h:**54025

Département de Mathématiques, Université de Rouen, CNRS UPRES-A 6085, 76821 Mont Saint-Aignan, France

E-mail address: Ahmed.Bouziad@univ-rouen.fr