# List of errata and afterthoughts for “DGTRH”

August 28, 2020

The indication “line - 3” means “third line from the bottom of the page”, not taking in account footnotes if any.

## 1 Errata for chapter 1

- Page 11, line -3: in the matrix, $p$ should be replaced by $-p$ at position $(2, 2)$.
- Page 13: in the right part if figure 1.2, the common origin and end of all the pathes should not be $a$ and $b$ but $x$ and $y$.

## 2 Errata for chapter 2

- Page 26, line 2: $|1 - z_0|$ should be replaced by $1 - |z_0|$.

## 3 Errata for chapter 3

- This is not an erratum but an afterthought. After corollary 3.16, one should add the following remark (with the appropriate numbering !).

  **Remark 1** Near an essential singularity, the absence of moderate growth does not necessarily mean that the function explodes, it rather means a wild behaviour: see **[Ahl78]**, theorem 9 of chapter §3; or **[Rud87]**, section 16.21.

- This is also an afterthought. On page 34, before the first mention of primitives, one should add the following:

  Remembering that the length of a path $\gamma$ of class $\mathcal{C}^1$ is given by the formula:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt,$$

one deduces the useful bound:

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma) \max_{\mathrm{Im}\gamma} |f|$$

- Page 35, at the end of Remark 3.26, add the following two sentences: "The sum is indeed finite. For instance, if $\gamma$ is a simple contour, its inside (including the boundary $\mathrm{Im}\gamma$) is homeomorphic to a closed disk, so the singularities there, which are isolated, are finite in number (his is related to Jordan's theorem, see 12.2 or the book by Fulton in the bibliography)."
- Page 37, exercise (2): this exercise has no sensible meaning, apologies for that. It is due to a confusion about two different kinds of formulas involving powers of $\pi$: on the one hand, the volume of hyperspheres and hyperballs in $\mathbf{R}^n$ (but this, as far as I know, has nothing to do with Bernoulli numbers); on the other hand, values of the zeta function at even integers, which mix powers of $\pi$ with Bernoulli numbers (see solution to exercise (3) on the same page).
- Page 37, exercise (3): the condition on $R$ (meant to avoid singularities on the path) should be: $R > 0$, $R \notin 2\pi\mathbf{N}$.
- Page 37, exercise (4): we should read the domain $\Omega := \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$.
- Page 37, exercises (5) and (6): at this stage of the book, it is understood thet $\Omega \subset \mathbf{C}$. On the Riemann sphere (appearing in chapter 7), some properties would fail.

# 4 Errata for chapter 4

No errata.

# 5 Errata for chapter 5

No errata.

# 6 Errata for chapter 6

- Page 58, exercise 6.1 (i): the first factor of the right hand side in the rule should be $(z_1^\alpha)$.

# 7 Errata for chapter 7

- This again is not an erratum but an afterthought. Top of the page, in the middle of (3) (thus just before "Our last requirement ..."), insert the following diagrams:

$$
\begin{tikzcd}
 & U & \\
U_i \arrow[ur] & & U_j \arrow[ul] \\
 & U_i \cap U_j \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(U) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{F}(U_i) \arrow[dr] & & \mathcal{F}(U_j) \arrow[dl] \\
 & \mathcal{F}(U_i \cap U_j) &
\end{tikzcd}
$$

- Page 93 line 1, the first sentence of the remark should read:
  "The similarity with Galois Theory of algebraic equations is as follows."

- Page 93, corollaries 7.38 and 7.39: the proof of 7.39 should be suppressed as superfluous and a very short proof should be given to 7.38:
  "This follows directly from the theorem."

# 8 Errata for chapter 8

- Page 105, line 2 should read:
  "... from $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ to $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ ..."

- Page 106, footnote 4: this footnote is redundant with the first three lines of the paragraph entitled "Local systems on $\Omega$", so the footnote should be omitted.

- Page 106, line -3: instead of "neighborhood" one should read "open set". An alternative formulation (instead of covering by trivializing open sets) would be that each point of $\Omega$ admits a connected neighborhood $D$ such that, etc; and then that such a neighborhood is said, etc.

- Page 113, exercise 3: the example hinted at does not work (see the solutions), rather try with the forgetful functor from topological spaces to sets.

- Page 113, exercise 4, (ii): this is false for the same reasons. See the solutions. (But only after having tried !)

# 9 Errata for chapter 9

- Page 119, line -9: "puntured" $\leftarrow$ "punctured"

- Page 124: Exercise 9.16 is actually an example.

- Page 124, at the very end of section 9.3, some remarks should be added to state and prove a fact that is used many times in the sequel but justified nowhere (the numberings here have no meaning):

  **Corollary 1** *If $\mathcal{X}$ is a fundamental matricial solution of a RS system $X' = AX$, then all the coefficients of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{X}^{-1}$ have moderate growth in sectors.*

  **Proof.** As for the coefficients of $\mathcal{X}$, this is already contained in the theorem. For $\mathcal{X}^{-1}$, we proceed as follows. Differentiating the relation $\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X} = I_n$, we find that:

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X}\right)' = 0 &\Longrightarrow \left(\mathcal{X}^{-1}\right)'\mathcal{X} + \mathcal{X}^{-1}\mathcal{X}' = 0 \\
&\Longrightarrow \left(\mathcal{X}^{-1}\right)'\mathcal{X} + \mathcal{X}^{-1}A\mathcal{X} = 0 \\
&\Longrightarrow \left(\mathcal{X}^{-1}\right)' + \mathcal{X}^{-1}A = 0 \\
&\Longrightarrow \left({}^t\mathcal{X}^{-1}\right)' = -{}^tA\left({}^t\mathcal{X}^{-1}\right),
\end{aligned}$$

  *i.e.* ${}^t\mathcal{X}^{-1}$ is a fundamental matricial solution of the RS system $X' = -{}^tAX$. Obviously, if $A$ is RS, so is $-{}^tA$. Therefore ${}^t\mathcal{X}^{-1}$ has moderate growth in sectors and so has $\mathcal{X}^{-1}$. □

  **Exercise 1** Find a different proof based on the fact that $\mathcal{X}^{-1} = \dfrac{1}{w}\,{}^t\mathrm{com}(\mathcal{X})$, where $w := \det\mathcal{X}$ is solution of $w' = (\mathrm{Tr}A)w$.

  **Remark 2** One can wonder if the inverse of a function which has moderate growth in sectors shares the same property. This is not so, as shows the example (communicated to me by Changgui Zhang) of $f(z) = e^{(\log z)^2}$. Indeed, if $z = re^{\imath\theta}$, then $|f(z)| = e^{-\theta'^2}r^{\ln r}$, where the argument $\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$ is bounded; thus $f$ clearly has moderate growth in sectors. Yet $|f(z)^{-1}| = e^{\theta'^2}r^{-\ln r}$ and the exponent $-\ln r$ of $r = |z|$ being unbounded when $r \to 0^+$, this function does not share the property.

- Page 130, line -1: it is not $g_1$ but $\dfrac{1}{c}\,g_1$ which is a solution of the form required.

- Page 133, last paragraph of Example 9.35: in $A$ the coefficient in position $(2,1)$ should be $+z$ and not $-z$. Calling $F := \mathrm{Diag}(1,z)$ the shearing transform, $B$ is defined by $z^{-1}B = F[z^{-1}A]$, so that $B = (\delta F)F^{-1} + FAF^{-1}$; and its coefficient in position $(2,1)$ should be $+1$ and not $-1$.

## 10 Errata for chapter 10

- Page 142, the calculation on lines 2 and 3 is better written as follows:

$$(\rho_B([\lambda]) \circ \phi)(\mathcal{X}) = \left(F^\lambda \rho_A([\lambda])\right)(\mathcal{X})$$
$$\Longrightarrow (\phi \circ \rho_A([\lambda]))(\mathcal{X}) = F^\lambda \rho_A([\lambda])(\mathcal{X}) \Longrightarrow \phi = F^\lambda,$$

## 11 Errata for chapter 11

No errata.

## 12 Errata for chapter 12

No errata.

## 13 Errata for chapter 13

- Page 170, middle of the page: one should read "... each $y_{i,j} = \sum x_{i,k} p_{k,j}$ ..."
- Page 170, line -6, the right definition is: $D^{-1}(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{A} \mid D(f) \in \mathcal{A}\}$.
- Page 174, line 12: one should read "... the map $\lambda \mapsto (f(z^\alpha) \mapsto \lambda f(z^\alpha))$ ..."
- Page 175, lines 10 and 14: $\mathrm{Gal}(B, z_0)$ should of course be replaced by $\mathrm{Gal}(A, z_1)$.

## 14 Errata for chapter 14

- Page 185, line -12: not $\Gamma$ but Gal.
- Page 187, line -9: in the penultimate term of the right hand side of the equality, replace $f_m$ by $mf_m$.

## 15 Errata for chapter 15

- Page 198, lines 14-15: the given URL is no longer valid. Use instead: `http://www.cantoperdic.fr/PAPIERS/dea08-09.pdf`

## 16 Errata for chapter 16

- Page 201, lines -9 and -7: here and in other places, one should read Im for the image (here of $\hat{\rho}_A$), and not the symbol for the imaginary part.
- Page 203, lines 4 and 7 of 16.2: same remark.
- Page 204, line 1: same remark.
- Page 204, Exercise 16.5: there has been an interversion within the sentence. One shoud read:
  "...the fuchsian matrix $A$ such that $\forall k \in \mathbf{Z}\ ,\ \rho_A(k) = M^k$ satisfies $\hat{\rho}_A = \rho_s \rho_u$."
- Page 205, line 8: two occurences of $E$ should be replaced by $F$.
- Pages 212 (alinea (1) at the bottom) and 213 (alinea (2) at the top): the definition given there of a morphism of proalgebraic groups is not right. We reformulate it as follows.
  1. Let $G$ a proalgebraic group with structural data $(G_i, f_i^j)$ and $(f_j)$ and let $G'$ an algebraic group. Then a group morphism $\phi : G \to G'$ is said to be rational if its factors as $\phi = \psi \circ f_i$ for some $i$ and some rational $\psi : G_i \to G'$ (the latter makes sense since both $G_i$ and $G'$ are algebraic).
  2. Let $G$ and $G'$ two proalgebraic groups, with respective structural data $(G_i, f_i^j)$ and $(f_j)$, resp. $(G'_k, {f'}_k^l)$ and $(f'_k)$. Then a group morphism $\phi : G \to G'$ is said to be rational if all morphisms $\phi_k := f'_k \circ \phi : G \to G'_k$ are in the sense of the previous definition.
- Page 214, line -5: same remark as for pages 201, 203, 204.

## 17 Errata for chapter 17

No errata.

## 18 Errata for appendix A

No errata.

## 19 Errata for appendix B

No errata.

## 20 Errata for appendix C

No errata.

## 21 Errata for appendix D

No errata.

## 22 Errata for appendix E

No errata.

## 23 Errata for appendix F

The following text comes from an examination to recruit mathematics teachers[1] for high schools in France. It is strongly related to some of the themes of this book. I did not bother to translate it, because I think that it can give you a good motivation to learn french ! It can be freely reproduced under the only condition to mention explicitly where it comes from (*i.e.* the national french Ministery of Education, the MENRT). So you should consider it as section F.4 of appendix F.

[1]Not all math teachers go through that exam, called "Agrégation externe"; this is meant to select (hopefully) the most qualified ones.

**Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.**

**La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.**

**Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.**

# Notations

— Toutes les $\mathbf{C}$-algèbres considérées dans ce problème seront unitaires et l'on conviendra que les morphismes de $\mathbf{C}$-algèbres respecteront les éléments unités. La $\mathbf{C}$-algèbre des polynômes à coefficients complexes en une indéterminée $X$ sera notée $\mathbf{C}[X]$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$ formé des polynômes $P$ de degré $\deg P \leq n$ sera noté $\mathbf{C}_n[X]$.

— On notera $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes à $n$ lignes et $p$ colonnes, $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ l'algèbre $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ le groupe linéaire (groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$). Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on notera $\mathbf{C}[A] := \{P(A) \mid P \in \mathbf{C}[X]\}$ la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par $A$.

— Le polynôme caractéristique de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sera noté $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$ et son spectre $\mathrm{Sp}\, A$. Ce dernier sera le plus souvent considéré comme un *multiensemble*, c'est-à-dire que ses éléments peuvent avoir des multiplicités. Par exemple, le spectre de la matrice identité $I_n$ est $\mathrm{Sp}\, I_n = \{\{1, 1, \ldots, 1\}\}$ ($n$ fois). Pour une matrice nilpotente $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire telle qu'une puissance de $N$ soit nulle), on a donc $\mathrm{Sp}\, N = \{\{0, 0, \ldots, 0\}\}$ ; et pour une matrice unipotente $U \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire telle que $U - I_n$ soit nilpotente), $\mathrm{Sp}\, U = \{\{1, 1, \ldots, 1\}\}$.

— On notera $[A,B] := AB - BA$ le commutateur de $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (l'application $(A,B) \mapsto [A,B]$ est donc bilinéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$). On notera $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\alpha_i \in \mathbf{C}$ ; de même, si $A_i \in \mathrm{M}_{r_i}(\mathbf{C})$ pour $i = 1, \ldots, k$, avec $r_1 + \cdots + r_k = n$, on écrira $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_k) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice diagonale par blocs correspondante.

— On rappelle le théorème suivant (*décomposition de* DUNFORD *d'une matrice, respectivement d'un endomorphisme*) :
• *Pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$, il existe un unique couple $(S,N) \in M_n(\mathbf{C})^2$ de matrices telles que $A = S + N$, $[S,N] = 0$, $S$ est diagonalisable et $N$ est nilpotente. On a alors : $\chi_A = \chi_S$ et $Sp\, A = Sp\, S$. De plus, $S, N \in \mathbf{C}[A]$, autrement dit, on peut écrire $S = P(A)$ et $N = Q(A)$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.*
• *Soit $V$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout endomorphisme $\phi$ de $V$, il existe un unique couple $(\phi_s, \phi_n)$ d'endomorphismes de $V$ tels que $\phi = \phi_s + \phi_n$, $[\phi_s, \phi_n] = 0$, $\phi_s$ est diagonalisable et $\phi_n$ est nilpotent. On a alors : $\chi_\phi = \chi_{\phi_s}$ et $Sp\, \phi = Sp\, \phi_s$. De plus, $\phi_s, \phi_n \in \mathbf{C}[\phi]$, autrement dit, on peut écrire $\phi_s = P(\phi)$ et $\phi_n = Q(\phi)$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.*

— On rappelle que l'exponentielle de matrices est l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ définie par la formule :

$$\exp A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k,$$

et que c'est une application $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace vectoriel normé $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même, telle que, si $[A,B] = 0$, on ait $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B)$.

— On pourra noter $|||A|||$ la norme matricielle subordonnée à une norme $||\cdot||$ quelconque sur $\mathbf{C}^n$ : on a donc $|||I_n||| = 1$ et, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $Y \in \mathbf{C}^n$, $||AY|| \leq |||A|||\;||Y||$ et $|||AB||| \leq |||A|||\;|||B|||$.

Dans le problème, les textes placés entre les symboles ☛ ... ☚ précisent des notations et définitions qui sont utilisées dans la suite de l'énoncé.

# I Exercices préliminaires

1. Donner une décomposition de DUNFORD de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ (on discutera en fonction de $a \in \mathbf{C}$).
2. Justifier la relation $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$, où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
3. Soient $n$ un entier, $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ des complexes. Déterminer le noyau de l'application linéaire $P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}^n$ et en déduire que, si les $a_i$ sont deux à deux distincts :
$$\forall (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{C}^n\ ,\ \exists! P \in \mathbf{C}_{n-1}[X]\ :\ P(a_1) = b_1, \ldots, P(a_n) = b_n.$$
On ne cherchera pas à donner une forme explicite au *polynôme d'interpolation P*.
4. Montrer que toute représentation $\rho : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est de la forme $k \mapsto M^k$ pour une certaine matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. À quelles conditions deux telles représentations sont-elles équivalentes ?
5. Soit $G$ un groupe abélien noté additivement. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de $G$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$, *i.e.* des applications $f : G \to \mathbf{C}^*$ telles que $\forall x, y \in G\ ,\ f(x+y) = f(x)f(y)$. Pour tout $(f_1, f_2) \in \widehat{G}^2$, on note $f_1 f_2 : G \to \mathbf{C}^*$ l'application $x \mapsto f_1(x) f_2(x)$. Montrer qu'on munit ainsi $\widehat{G}$ d'une structure de groupe abélien.

# II La décomposition de DUNFORD

**Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier fixé avec $n \geq 2$.**

1. Soient $A_1 = S_1 + N_1, A_2 = S_2 + N_2$ deux décompositions de DUNFORD. Démontrer l'équivalence logique :
$$[S_1, S_2] = [S_1, N_2] = [N_1, S_2] = [N_1, N_2] = 0 \Longleftrightarrow [A_1, A_2] = 0.$$
[*Indication : on pourra, pour l'implication directe, utiliser la bilinéarité du commutateur ; pour l'implication réciproque, le fait que $S_i, N_i \in \mathbf{C}[A_i]$*.]
2. (a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. On note $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sa partie diagonale (obtenue en remplaçant par 0 tous les coefficients au dessus de la diagonale) et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sa partie triangulaire supérieure stricte (obtenue en remplaçant par 0 tous les coefficients diagonaux), de sorte que $A = S + N$. À quelles conditions est-ce une décomposition de DUNFORD ?
   (b) On suppose de plus que $S$ est de la forme $\mathrm{Diag}(\alpha_1 I_{r_1}, \ldots, \alpha_k I_{r_k})$, où $r_1 + \cdots + r_k = n$ et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ sont deux à deux distincts. Que deviennent les conditions ci-dessus ?
   [*Indication : on exprimera $N$ sous forme de matrice par blocs de tailles $r_i \times r_j$*.]
3. (a) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer l'existence d'un unique couple $(T, U) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^2$ de matrices telles que $B = TU$, $[T, U] = 0$, $T$ est diagonalisable et $U$ est unipotente.
   (b) Vérifier que l'on a alors les propriétés suivantes : $\chi_B = \chi_T$, $\mathrm{Sp}\, B = \mathrm{Sp}\, T$ et $T, U \in \mathbf{C}[B]$.
   (c) Soient $B_1 = T_1 U_1, B_2 = T_2 U_2$ deux telles décompositions. Démontrer l'équivalence logique :
$$[B_1, B_2] = 0 \Longleftrightarrow [T_1, T_2] = [T_1, U_2] = [U_1, T_2] = [U_1, U_2] = 0.$$
4. (a) Soit $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $S = PDP^{-1} = P'D'P'^{-1}$, où $P, P' \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et où $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D' = \mathrm{Diag}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, de sorte que :
$$\mathrm{Sp}\, S = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\} = \{\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}\}.$$

(On rappelle que, dans cette notation de multiensembles, les éléments sont présents avec une multiplicité.) Soient $\Omega$ un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ contenant $\operatorname{Sp} S$ et $f$ une application définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. Démontrer l'égalité :

$$P\operatorname{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1} = P'\operatorname{Diag}(f(\alpha'_1),\dots,f(\alpha'_n))P'^{-1}.$$

[*Indication : on pourra introduire un polynôme $F \in \mathbf{C}[X]$ interpolant $f$ sur Sp $S$ et calculer $F(S)$ de deux manières différentes.*]

(b) Dans le cas où $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est la fonction définie par la série entière de rayon de convergence infini $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$, vérifier que la matrice ci-dessus est égale à $\sum_{k\geq 0} a_k S^k$. On précisera soigneusement le sens donné à cette somme infinie de matrices.

☛ Indépendamment de la nature de $f$, la matrice $P\operatorname{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1}$ sera dorénavant notée $f(S)$. D'après la question ci-dessus, dans le cas de la fonction exponentielle $f = \exp$, cette notation est cohérente avec la définition de l'exponentielle de matrices rappelée en introduction.☚

## III L'exponentielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective

1. (a) Soient $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbf{C}^*$ des complexes non nuls. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{C}$ tels que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\exp(\alpha_i) = \beta_i$. Soit enfin $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Notant $T := P\operatorname{Diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}$ et $S := P\operatorname{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}$, vérifier que $\exp S = T$.

   (b) On suppose de plus que, pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$, on ait $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$. Montrer que $S \in \mathbf{C}[T]$.

   [*Indication : on pourra utiliser un polynôme $F \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ , $F(\beta_i) = \alpha_i$.*]

   (c) Montrer que, si $T$, $P$ et les $\beta_i$ sont donnés, on peut toujours choisir des $\alpha_i$ de sorte que soit vérifiée l'hypothèse de la question précédente.

   (d) Montrer que, si l'on ne fait pas cette hypothèse sur les $\alpha_i$, la conclusion $S \in \mathbf{C}[T]$ peut être en défaut.

   [*Indication : on pourra prendre $T = P = I_2$.*]

2. Pour tout entier naturel non nul $n$, on définit les polynômes suivants dans $\mathbf{C}[X]$ :

$$E_n(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k \text{ et } L_n(X) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (X-1)^k.$$

   Par convention, $L_1(X) = 0$. Soient $P,Q,R \in \mathbf{C}[X]$ ; on notera $P \equiv Q \pmod{R}$ la congruence modulo $R$ dans l'anneau $\mathbf{C}[X]$.

   (a) Montrer que $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$ et $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$.

   [*Indication : on pourra utiliser les développements de* TAYLOR *des fonctions usuelles $x \mapsto \exp x$ en $0$ et $x \mapsto \ln(x)$ en $1$.*]

   (b) À l'aide de ces formules, justifier très soigneusement le fait que les applications $N \mapsto \exp N$ et $U \mapsto L_n(U)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

3. Déduire des questions précédentes que l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective.

# IV La fonction matricielle $z^A$ et sa monodromie

On note $\mathscr{O}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\Omega := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \subset \mathbf{C}^*$ (où $\mathbf{R}_-$ désigne la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$) ; cet anneau est commutatif et intègre.
On rappelle qu'il existe une unique fonction continue log sur $\Omega$ (détermination principale du logarithme sur $\Omega$) telle que, notant $\mathrm{Id}_\Omega$ la fonction identité de $\Omega$ :

$$\exp \circ \log = \mathrm{Id}_\Omega \quad \text{et} \quad \log 1 = 0;$$

de plus, $\log \in \mathscr{O}$, et la restriction de log à $\mathbf{R}_+^* = ]0, +\infty[$ est le logarithme népérien. Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, on note :

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Pour $\alpha \in \mathbf{Z}$, on retrouve les puissances usuelles. Plus généralement, on a $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$. On s'autorise l'abus usuel de notation qui permet de noter $z^\alpha$ l'application $z \mapsto z^\alpha$. Avec cette convention, $z^\alpha \in \mathscr{O}$.
On note $\delta : f \mapsto z\dfrac{df}{dz}$ la « dérivation d'Euler » ; c'est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathscr{O}$ dans lui-même vérifiant la *règle de* Leibniz :

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g.$$

1. Calculer $\delta(\log)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $\delta(z^\alpha)$.
2. Vérifier que les déterminations du logarithme sur $\Omega$ (*i.e.* les fonctions continues $f : \Omega \to \mathbf{C}$ telles que $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$) sont les fonctions $Log^{(k)} : z \mapsto \log z + 2ki\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

☛ Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $z \in \Omega$, on pose $z^A := \exp((\log z)A)$. ☚

3. (a) Soit $A = S + N$ une décomposition de Dunford, avec $S = P\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P^{-1}$. Démontrer les égalités :

$$z^S = P\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})P^{-1}, \quad z^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k \quad \text{et} \quad z^A = z^S z^N = z^N z^S.$$

   (b) Calculer le déterminant de $z^A$.

☛ Les matrices dont les coefficients sont des fonctions sur $\Omega$ seront dénotées par des majuscules "script" $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$,... On identifiera une telle matrice $\mathscr{X} = (f_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathscr{O})$ à la fonction à valeurs matricielles de $\Omega$ dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ qui, à $z \in \Omega$, associe $\mathscr{X}(z) := (f_{i,j}(z))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$. ☚

4. Montrer que les coefficients de la fonction matricielle $z \mapsto z^A$ sont des combinaisons linéaires de fonctions $z^\alpha(\log z)^k$, où $\alpha \in \mathrm{Sp}\,A$ et où $k \in \mathbf{N}$, $k < d$, l'entier $d$ désignant l'ordre de nilpotence de $N$.

On notera abusivement $z^A$ la fonction $z \mapsto z^A$. On a donc $z^A \in \mathrm{M}_n(\mathscr{O})$.

☛ L'application $\delta$ s'étend naturellement aux matrices de fonctions : si $\mathscr{X} = (f_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, alors on pose : $\delta(\mathscr{X}) := (\delta(f_{i,j}))_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$. Ce prolongement est $\mathbf{C}$-linéaire et vérifie encore la règle de Leibniz pour le produit matriciel usuel :

$$\delta(\mathscr{X}\mathscr{Y}) = \mathscr{X}\delta(\mathscr{Y}) + \delta(\mathscr{X})\mathscr{Y}. \quad ☚$$

5. Soient $f \in \mathscr{O}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Calculer $\delta(\exp(f(z)A))$. Vérifier en particulier que :

$$\delta(z^A) = Az^A = z^A A.$$

6. Soient $\mathscr{X} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathscr{O})$ une matrice de fonctions holomorphes sur $\Omega$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $\delta(\mathscr{X}) = A\mathscr{X}$. Montrer qu'il existe une matrice constante $C \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ telle que $\mathscr{X} = z^A C$.
[*Indication : on commencera par montrer qu'il existe un tel* $C \in M_{n,p}(\mathscr{O})$*, puis que* $\delta(C) = 0$*.*]
7. On introduit d'autres « déterminations de $z^A$ » en posant, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ (avec la notation introduite question 2) :
$$\left[z^A\right]_k := \exp(Log^{(k)}(z)A).$$
   (a) À l'aide de la question 5, montrer que $\delta\left[z^A\right]_k = A\left[z^A\right]_k = \left[z^A\right]_k A$ et en déduire, à l'aide de la question 6, l'existence d'une unique matrice $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\left[z^A\right]_k = z^A M_k$.
   (b) Calculer $M_k$ et montrer que l'application $k \mapsto M_k$ est une représentation de $\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On notera $\rho_A : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ cette représentation.
8. Que peut-on déduire de l'exercice préliminaire n° 4 à propos des représentations introduites ci-dessus ?

# V Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

Dans cette partie et la suivante, on fixe une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et l'on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) : on a donc $\mathrm{Sp}\, A = \{\!\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\!\}$. On note $\mathcal{A} := \mathbf{C}[z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}]$ la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{O}$ engendrée par les fonctions $z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}$ et l'on pose :

$$L := \{m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \mid m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{N}\}.$$

1. (a) Vérifier que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$ est engendré par la famille des fonctions $z^l$ avec $l \in L$, autrement dit :
$$\mathcal{A} = \sum_{l \in L} \mathbf{C} z^l.$$
   (b) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par la dérivation $\delta$.
   (c) Montrer que les fonctions $z^l$ avec $l \in L$, forment une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}$.
   [*Indication : soit* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{l_i} = 0$ *une relation linéaire entre des éléments de la famille des* $z^l$*,* $l \in L$*, les* $l_i \in L$ *étant distincts ; on pourra appliquer itérativement* $\delta$ *à cette relation.*]
   (d) Soient $l \in L$ et $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $\delta v = lv$ et $\delta u - lu = v$. Montrer que $v = 0$ et $u \in \mathbf{C}z^l$.

☛ On note $\mathcal{A}' := \mathcal{A}[\log] = \mathbf{C}[z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n}, \log]$ la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{O}$ engendrée par $\mathcal{A}$ et par la fonction log. ☚

2. (a) On note $\log^k$ la puissance $k$-ème de la fonction log, *i.e.* la fonction $z \mapsto (\log z)^k$. Montrer que $\mathcal{A}' = \left\{ \sum_{k \geq 0} f_k \log^k \mid \text{ les } f_k \in \mathcal{A} \text{ étant presque tous nuls} \right\}.$
   (b) Montrer que $\mathcal{A}'$ est stable par la dérivation $\delta$. Pour cela, on explicitera des $g_k \in \mathcal{A}$ tels que $\delta(\sum f_k \log^k) = \sum g_k \log^k$.
3. On pourra admettre les résultats de cette question dans un premier temps.

(a) Soient $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u + v\log = 0$. Montrer que $u = v = 0$.

[*Indication : par l'absurde, choisir u et v tels que l'écriture* $v = \lambda_1 z^{l_1} + \cdots + \lambda_p z^{l_p}$ *avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{C}^*$ *et* $l_1, \ldots, l_p \in L$ *deux à deux distincts ait une « longueur » p minimale et généraliser les techniques développées à la question 1.*]

(b) Montrer que l'écriture $\sum f_k \log^k$ d'un élément de $\mathcal{A}'$ est unique.

[*Indication : d'une relation* $\sum_{k=0}^{p} f_k \log^k = 0$ *avec* $f_p \neq 0$ *et p minimal, déduire par application de* $\delta$ *une relation plus courte donc triviale, puis que* $\delta(f_{p-1}/f_p) = -p$*, et se ramener à la question précédente.*]

☛ Pour toute sous-$\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$, on note $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ le groupe des automorphismes de $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathcal{B}$ (la loi interne sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ étant la composition). Si de plus $\mathcal{B}$ est stable par $\delta$, on note :

$$\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B}) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}) \mid \sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma\}.$$ ☚

4. Soit $\mathcal{B}$ une sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathcal{O}$ stable par $\delta$. Vérifier que $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$.

☛ Pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$, on étend son action aux matrices sur $\mathcal{B}$ en posant :

$$\text{pour tout } \mathcal{X} := (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathcal{B}),\ \sigma(\mathcal{X}) := (\sigma(m_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathcal{B}).$$

On a alors les règles suivantes, que l'on admet : l'action de $\sigma$ est $\mathbf{C}$-linéaire et $\sigma(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{X})\sigma(\mathcal{Y})$. ☚

5. (a) Montrer que les coefficients de la matrice $z^A \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ sont éléments de $\mathcal{A}'$.

   (b) Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ et notons $\mathcal{X} := \sigma(z^A)$. Vérifier que $\delta\mathcal{X} = A\mathcal{X}$ et en déduire l'existence d'une unique matrice $M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathcal{X} = z^A M_\sigma$.

   (c) Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ est une représentation du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Cette représentation sera notée $\rho'_A$.

# VI Groupes et représentations de PICARD-VESSIOT

**Les notations $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $L$ de la partie précédente restent en vigueur dans cette partie.**

1. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$.

   (a) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\sigma(\log) = \log + \lambda$. On le notera $\lambda_\sigma$.

   (b) Montrer que, pour tout $l \in L$, il existe un unique $c_l \in \mathbf{C}^*$ tel que $\sigma(z^l) = c_l z^l$. Vérifier que, pour tous $l, l' \in L$, on a $c_{l+l'} = c_l c_{l'}$.

   (c) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par $\sigma$ et que la restriction $\sigma_{|\mathcal{A}}$ appartient à $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

2. (a) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'application $\psi : \sigma \mapsto (\sigma_{|\mathcal{A}}, \lambda_\sigma)$ est un morphisme de groupes injectif de $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ dans le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}) \times \mathbf{C}$, produit direct du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ et du groupe additif $\mathbf{C}$.

   (b) Soient $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. À l'aide de la question 3 de la partie V, montrer qu'il existe un unique automorphisme $\sigma$ de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{A}'$ tel que $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$.

(c) Montrer que $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ et en déduire que le morphisme de la question 2(a) est un isomorphisme.

☛ On note $G$ le sous-groupe du groupe additif $\mathbf{C}$ engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On a donc (et on l'admet) :

$$G = \mathbf{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbf{Z}\alpha_n = \{m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}\} \quad \text{et} \quad G = L - L = \{l_1 - l_2 \mid l_1, l_2 \in L\}.$$

On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes du groupe $G$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ (exercice préliminaire n° 5). ☚

3. Démontrer qu'il existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que $G \simeq \mathbf{Z}^m$ et en déduire que $\widehat{G} \simeq (\mathbf{C}^*)^m$.
4. (a) Soit $f \in \widehat{G}$. Montrer l'existence d'un unique $\sigma_f \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ tel que :

$$\forall l \in L\,,\ \sigma_f(z^l) = f(l) z^l.$$

[*Indication : on pourra commencer par définir un automorphisme d'espace vectoriel puis démontrer qu'il respecte la multiplication et l'unité et qu'il commute avec* $\delta$.]

(b) Montrer que l'application $f \mapsto \sigma_f$ est un isomorphisme du groupe $\widehat{G}$ sur le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

☛ Des questions 2 et 4, on déduit l'existence d'un isomorphisme du groupe produit $\widehat{G} \times \mathbf{C}$ sur le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$, que l'on notera $\phi_A : (f, \lambda) \mapsto \sigma_{f,\lambda}$. ☚

5. Décrire explicitement la représentation $\rho''_A := \rho'_A \circ \phi_A$ de $\widehat{G} \times \mathbf{C}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (la représentation $\rho'_A$ a été définie à la fin de la partie V).
6. Définir un morphisme de groupes $\varphi : \mathbf{Z} \to \widehat{G} \times \mathbf{C}$ tel que $\rho''_A \circ \varphi = \rho_A$ (la représentation $\rho_A$ a été définie à la question 7 de la partie IV).