CHAPITRE 1

OPÉRATEURS AUTOADJOINTS

On désigne par $H, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace de Hilbert complexe[(1)], séparable, par $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense dans H et par A un opérateur de $\mathcal{D}$ vers H. L'espace $\mathcal{D}$ est appelé le domaine de l'opérateur A et est noté $D(A)$. Contrairement à ce qui se passe pour les opérateurs bornés[(2)], en particulier en dimension finie, la simple considération de la symétrie des opérateurs ne conduit pas à un théorème de décomposition spectrale. Nous allons introduire la notion d'autoadjonction directement par des considérations spectrales suivant un exposé de P. Cartier à l'École polytechnique.

1.1. Opérateurs symétriques

Définition 1.1.1. — On dit que le nombre complexe λ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A, si $(\lambda \operatorname{Id} - A)$ est injectif, son image $(\lambda \operatorname{Id} - A)\mathcal{D}$ est dense dans H et si l'opérateur inverse $(\lambda \operatorname{Id} - A)^{-1}$ est borné de $(\lambda \operatorname{Id} - A)\mathcal{D}$ vers H, donc se prolonge en un opérateur R_λ de H dans lui-même, appelé opérateur résolvant.

On abrégera souvent $A - \lambda \operatorname{Id}$ par $A - \lambda$.

Proposition 1.1.2. — *Pour tous λ et μ dans l'ensemble résolvant on a :*

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda. \qquad \text{(équation résolvante)}$$

L'équation résolvante implique en particulier que les opérateurs résolvants commutent entre eux.

Définition 1.1.3. — On dit que A est fermé si $\mathcal{D}$ est complet pour la norme

$$\|\psi\|_A = \left(\|\psi\|^2 + \|A\psi\|^2\right)^{1/2}.$$

[(1)] Le produit scalaire sera linéaire à gauche et antilinéaire à droite.

[(2)] On rappelle qu'un opérateur B est borné s'il existe une constante M telle que $\|Bx\| \leqslant M\|x\|$ pour tout x dans $\mathcal{D}$; il est clair qu'alors on peut prolonger B en un opérateur sur $\overline{\mathcal{D}} = H$.

Considérons le graphe de A,

$$\mathcal{G}_A = \{(\psi, A\psi) \in H \times H \ : \ \psi \in \mathcal{D}\};$$

la projection est une isométrie du graphe muni de la norme hilbertienne produit sur $\mathcal{D}$ muni de $\|\cdot\|_A$. Ainsi il apparaît que A est un opérateur fermé si et seulement si le graphe $\mathcal{G}_A$ est une partie fermée de $H \times H$. Pour un opérateur fermé on exprime de manière plus simple l'ensemble résolvant.

Proposition 1.1.4. — *Soit A fermé. Pour que λ soit dans $\rho(A)$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soient réalisées :*

1° L'application $(\lambda - A)$ est une bijection de $\mathcal{D}$ sur H.

2° Il existe un opérateur borné R_λ de H tel que :

$$\begin{cases} R_\lambda \circ (\lambda - A) = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} \\ (\lambda - A) \circ R_\lambda = \mathrm{Id}_H \,. \end{cases} \tag{1}$$

Démonstration. — 1° Pour montrer la nécessité de la condition il reste à montrer que si $\lambda \in \rho(A)$ alors $\mathrm{Im}(\lambda - A) = H$. Comme cette image est dense on peut toujours trouver, pour $x \in H$ une suite y_n d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que $x = \lim(\lambda y_n - Ay_n)$. En appliquant l'opérateur borné R_λ, on en déduit que $y_n = R_\lambda(\lambda - A)y_n$ converge; comme à la fois y_n et Ay_n convergent, et que $\mathcal{G}_A$ est fermé, la limite y de y_n est dans $\mathcal{D}$ et $\lim(Ay_n) = Ay$ d'où l'on tire $\lambda y - Ay = x$. Comme x est arbitraire, on a obtenu $(\lambda - A)\mathcal{D} = H$.

Supposons maintenant que $\lambda - A$ soit une bijection. Elle est continue de l'espace de Hilbert $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_A)$ vers l'espace de Hilbert H. Par le théorème de l'application ouverte de Banach, l'application inverse est continue et reste évidemment continue si on munit $\mathcal{D}$ de la norme moins fine $\|\cdot\|_H$.
2° Ces conditions sont équivalentes à la définition initiale, compte tenu du fait que $\lambda - A$ est surjectif si son image est dense. □

Les opérateurs autoadjoints sont une classe d'opérateurs symétriques, un opérateur symétrique étant un opérateur A de domaine $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D} \quad \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

Ils sont souvent définis naturellement sur des domaines trop restreints pour que l'opérateur soit fermé, l'exemple de base étant le laplacien Δ défini au départ, disons sur $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Mais ces opérateurs sont facilement fermables, au sens suivant :

Proposition 1.1.5. — *L'adhérence dans $H \times H$ du graphe d'un opérateur symétrique A défini sur $\mathcal{D}$ est le graphe d'un opérateur $\overline{A}$ défini sur un domaine $\mathcal{D}' \supset \mathcal{D}$, la fermeture de A. Les ensembles résolvants et les opérateurs résolvants sont les mêmes pour l'opérateur et sa fermeture.*

Démonstration. — Montrons que $\overline{\mathcal{G}_A}$ est un graphe. Il faut montrer que l'hypothèse $(\varphi, \psi) \in \overline{\mathcal{G}_A}$ et $(\varphi, \psi') \in \overline{\mathcal{G}_A}$ implique $\psi = \psi'$. Il existe une suite $(\varphi_n, A\varphi_n)$ qui converge vers (φ, ψ) et de même une suite $(\varphi'_n, A\varphi'_n)$ qui converge vers (φ, ψ'). Soit w un élément quelconque de $\mathcal{D}$. Comme :

$$\langle w, \psi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle w, A\varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Aw, \varphi_n\rangle = \langle Aw, \varphi\rangle,$$

et que de même $\langle w, \psi'\rangle = \langle Aw, \varphi\rangle$ pour tout élément w de l'espace dense $\mathcal{D}$, on a nécessairement $\psi = \psi'$.

Il est immédiat par passage à la limite que l'opérateur de graphe $\overline{\mathcal{G}_A}$ reste symétrique et qu'il soit fermé est évident. On établit que $\rho(A) \subset \rho(\overline{A})$ comme suit : pour $\lambda \in \rho(A)$ la seule chose qui est à justifier est que $\lambda - \overline{A}$ est injectif; si $\varphi \in \ker(\lambda - \overline{A})$, en utilisant une suite φ_n qui converge vers φ et telle que $\psi_n = \lambda\varphi_n - A\varphi_n$ converge vers 0, on obtient $\varphi = \lim \varphi_n = \lim R_\lambda \psi_n = 0$.

Passons à l'inclusion inverse. Par construction, $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$ pour la norme $\|\cdot\|_{\overline{A}}$ et A est continu par rapport à cette norme; à l'aide de cela, la propriété $\overline{(\lambda - A)\mathcal{D}} = H$ résulte de $\overline{(\lambda - \overline{A})\mathcal{D}'} = H$; les autres propriétés caractérisant $\rho(A)$ découlent immédiatement de l'appartenance à $\rho(\overline{A})$. □

On peut étudier a priori l'ensemble résolvant et le spectre $\sigma(a)$ défini comme $\mathbb{C}\backslash\rho(a)$ d'un opérateur symétrique grâce au lemme suivant, dans lequel on désigne par $\|\cdot\|$ la norme uniforme des opérateurs bornés sur H :

Lemme 1.1.6. — *Soit A un opérateur fermé.*

1° *Si $\lambda \in \rho(A)$, alors le disque ouvert $D(\lambda, \|R_\lambda\|^{-1})$ dans $\mathbb{C}$ est inclus dans $\rho(A)$; en particulier $\rho(A)$ est ouvert.*

2° *Si A est symétrique et $\lambda \in \rho(A)$, le disque $D(\lambda, \Im(\lambda))$ est inclus dans $\rho(A)$.*

Démonstration. — 1° Si $|\mu - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$, la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^n R_\lambda^n$ converge dans l'algèbre des opérateurs bornés muni de la norme uniforme des opérateurs et $R_\lambda S$ est un opérateur borné R_μ qui satisfait les équations (1).
2° Si α et β sont deux nombres réels, on a :

$$\alpha + i\beta \in \rho(A) \text{ et } \beta \neq 0 \Rightarrow \|R_\lambda\| \leqslant \beta^{-1}. \tag{2}$$

Cela résulte de l'inégalité de coercivité :

$$\|(A - \alpha - i\beta)x\|^2 \geqslant \beta^2 \|x\|^2, \tag{3}$$

qui vient du calcul suivant : pour $x \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \|(A - \alpha - i\beta)x\|^2 &= \langle (A-\alpha)x, (A-\alpha)x\rangle + \langle \beta x, \beta x\rangle + \\ &\qquad i\langle \beta x, (A-\alpha)x\rangle - i\langle (A-\alpha)x, \beta x\rangle \\ &= \|(A-\alpha)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

□