Kapitel 1

Riemann'sche Flächen

1.1 Riemann'sche Flächen

Wir führen zunächst den Begriff einer topologischen Mannigfaltigkeit ein.

Definition Eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* M ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, die zu einer offenen Umgebung V von $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

Ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$, $U \subset M$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt *Karte*.

Eine Familie $\mathfrak{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ von Karten heißt *Atlas* von M, wenn $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

Es seien $\varphi_1 : U_1 \to V_1$, $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann heißt die Abbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

der zugehörige *Kartenwechsel* (vgl. Bild 1.1).

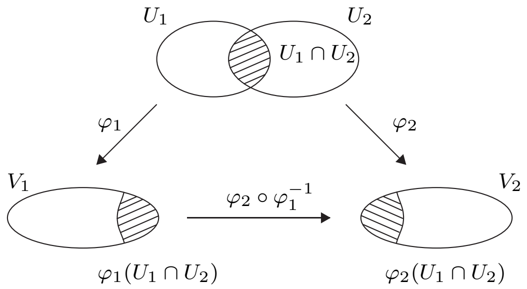

Bild 1.1: Kartenwechsel

Eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit heißt auch eine (topologische) *Fläche*.

Definition Es sei X eine Fläche. Im Folgenden identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ auf natürliche Weise mit $\mathbb{C}$.

Ein Atlas von X heißt *komplex* (oder *holomorph*), wenn alle seine Kartenwechsel holomorph sind.

Zwei komplexe Atlanten $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ heißen *äquivalent*, genau dann, wenn $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ auch ein komplexer Atlas ist.

Eine *komplexe Struktur* auf X ist eine Äquivalenzklasse von komplexen Atlanten auf X.

Eine (abstrakte) *Riemann'sche Fläche* ist eine zusammenhängende Fläche mit einer komplexen Struktur.

Bemerkung 1.1 Jede komplexe Struktur enthält einen eindeutig bestimmten maximalen Atlas $\mathfrak{A}^*$: Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiger Atlas aus der entsprechenden Äquivalenzklasse, so ist

$$\mathfrak{A}^* := \left\{ \varphi : U \longrightarrow V \text{ Karte} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Kartenwechsel von } \varphi \\ \text{mit allen Karten von } \mathfrak{A} \text{ ist holomorph} \end{array} \right\}$$

ein maximaler Atlas.

Vereinbarung Ist X eine Riemann'sche Fläche, so ist eine Karte von X immer eine Karte des maximalen Atlas der komplexen Struktur.

Beispiel 1.1 Die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ ist eine Riemann'sche Fläche. Ein komplexer Atlas ist $\{\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$.

Beispiel 1.2 Jedes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist eine Riemann'sche Fläche. Ein Atlas ist $\{\mathrm{id}|_G : G \to G\}$. Allgemeiner gilt: Ist X eine Riemann'sche Fläche und $Y \subset X$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge von X, so ist auch Y eine Riemann'sche Fläche. Ein Atlas besteht aus den Karten $\varphi : U \to V$ von X, wobei $U \subset Y$.

Beispiel 1.3 Die Riemann'sche Zahlensphäre $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist eine Riemann'sche Fläche. Wir setzen

$$U_1 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}, \quad \varphi_1 = \mathrm{id} : U_1 \to \mathbb{C},$$

$$U_2 := \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \quad \varphi_2 : \begin{array}{l} U_2 \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{für } z = \infty. \end{cases} \end{array}$$

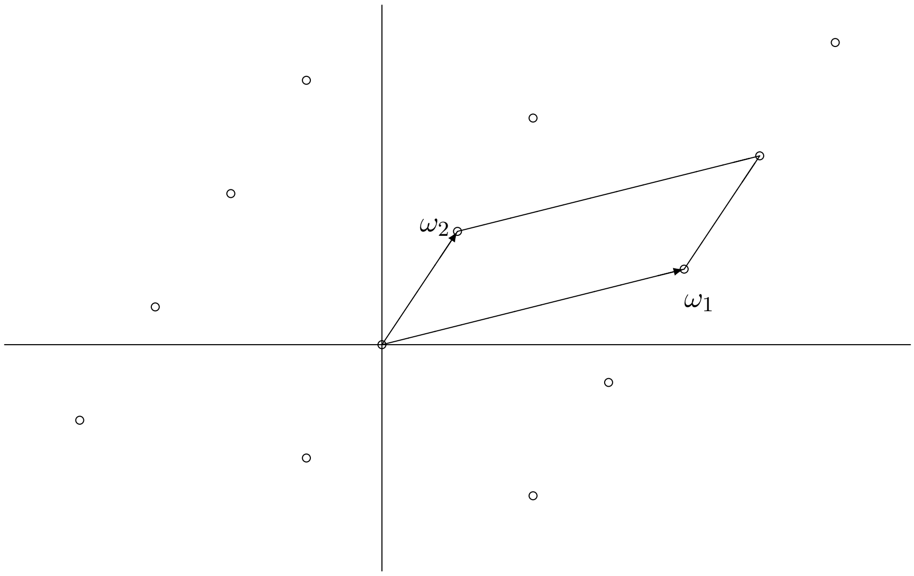

Bild 1.2: Gitter L und Parallelogramm P

Hierbei ist $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{C} \mid i = 1, 2\}$ ein Atlas auf $\hat{\mathbb{C}}$. Dieser Atlas ist komplex: Es ist $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto 1/z$, biholomorph.

Beispiel 1.4 Es seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Elemente. Wir definieren

$$L := \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Eine solche Teilmenge $L \subset \mathbb{C}$ nennt man ein *Gitter* in $\mathbb{C}$. Ein Gitter L ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}$, die als abelsche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist. Ein Gitter L definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$: Zwei komplexe Zahlen $z, z' \in \mathbb{C}$ heißen äquivalent modulo L (in Zeichen $z \equiv z' \pmod{L}$) genau dann, wenn $z - z' \in L$. Die Menge aller Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{C}/L$ bezeichnet. Jede Äquivalenzklasse hat einen Repräsentanten im Parallelogramm

$$P := \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid 0 \le \lambda_1 \le 1, 0 \le \lambda_2 \le 1\}.$$

Für P gilt außerdem: keine zwei inneren Punkte sind äquivalent und kein Randpunkt ist äquivalent zu einem inneren Punkt. Außerdem ist P kompakt. Einen solchen Bereich nennt man auch einen *Fundamentalbereich* und P heißt auch *Fundamentalparallelogramm*. Man erhält $\mathbb{C}/L$ $(= \mathbb{R}^2/L)$ aus P durch Identifikation gegenüberliegender Seiten:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \alpha + \omega_2 \pmod{L}, & \alpha &= \lambda_1\omega_1 \, (0 \le \lambda_1 \le 1), \\ \beta &\equiv \beta + \omega_1 \pmod{L}, & \beta &= \lambda_2\omega_2 \, (0 \le \lambda_2 \le 1). \end{aligned}$$

Anschaulich bedeutet dies, dass man zunächst zwei gegenüberliegende Seiten identifiziert und einen Zylinder erhält, dessen beide Enden noch identifiziert werden müssen: Man bekommt einen *Torus*.

Auf $\mathbb{C}/L$ können wir nun eine Topologie wie folgt erklären. Es sei

$$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$$

die Restklassenabbildung. Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}/L$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Mit dieser Topologie ist $\mathbb{C}/L$ ein Hausdorff-Raum und die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/L$ ist stetig. Da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist, ist auch $\mathbb{C}/L$ zusammenhängend. Da $\mathbb{C}/L$ durch Identifikation gegenüberliegender Seiten von P entsteht und P kompakt ist, ist auch $\mathbb{C}/L$ kompakt.

Wir führen nun auf $\mathbb{C}/L$ eine komplexe Struktur ein. Es sei $a \in \mathbb{C}/L$. Wir wählen ein Urbild $z \in \pi^{-1}(a)$ und eine kleine offene Kreisscheibe V um z, die nur paarweise nicht modulo L äquivalente Punkte enthält. Nach Definition der Topologie auf $\mathbb{C}/L$ ist dann $U := \pi(V) \subset \mathbb{C}/L$ offen und $\pi|_V : V \to U$ ist ein Homöomorphismus. Seine Umkehrabbildung $\varphi : U \to V$ ist eine Karte auf $\mathbb{C}/L$ um a.

Es sei $\mathfrak{U}$ die Menge aller solchen Karten. Es seien $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ zwei Karten aus $\mathfrak{U}$. Dann ist der Kartenwechsel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ die Translation um einen Gittervektor, also holomorph.

Also ist $\mathbb{C}/L$ mit der durch den Atlas $\mathfrak{U}$ definierten komplexen Struktur eine kompakte Riemann'sche Fläche.

Wir wollen nun holomorphe Abbildungen zwischen Riemann'schen Flächen definieren.

Definition Es sei X eine Riemann'sche Fläche und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, wenn für jede Karte $\varphi : U \to V$ auf X die Funktion $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Mit $\mathcal{O}(Y)$ bezeichnen wir die Menge aller auf Y holomorphen Funktionen.

Bemerkung 1.2 (i) $\mathcal{O}(Y)$ ist eine $\mathbb{C}$-Algebra.

(ii) Die Bedingung braucht nur für eine Familie von Karten nachgeprüft zu werden, die Y überdecken.

(iii) Eine Karte $\varphi : U \to V$ ist holomorph. Die durch φ eingeführte Koordinate auf X heißt *lokale Koordinate* oder *Ortsuniformisierende* von X, (U, φ) heißt *Koordinatenumgebung* von $a \in U$. Statt φ schreibt man oft z.

Definition Es sei X eine Riemann'sche Fläche, $a \in X$, $f : X \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Der Punkt a heißt *isolierte Singularität von* f, wenn es eine offene Umgebung U von a gibt, so dass f holomorph in $U \setminus \{a\}$ ist.