FORMENTHEORETISCHE ENTWICKELUNG DER IN HERRN WHITE'S ABHANDLUNG ÜBER CURVEN DRITTER ORDNUNG ENTHALTENEN SÄTZE*

VON

PAUL GORDAN

§1. *Covarianten und Invarianten einer ternären kubischen Form.*

Die einfachsten invarianten Bildungen einer ternären kubischen Form

$$f = a_x^3$$

sind diese 10 Formen:

$$\theta = \theta_x^2 u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x b_x\,; \quad \Delta = \Delta_x^3 = a_\vartheta^2 a_x \theta_x^2\,; \quad s = u_s^3 = (a\theta u)^2 a_\vartheta u_\vartheta\,;$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_x^2 u_\eta^2 = (a\Delta u)^2 a_x \Delta_x\,; \quad \mathrm{K} = \mathrm{K}_x^2 u_\kappa^2 = (\Delta\Delta_1 u)^2 \Delta_x \Delta_{1,x}\,; \quad t = u_t^3 = (a\mathrm{H}u)^2 a_\eta u_\eta\,;$$

$$S = a_s^3\,; \quad T = \Delta_s^3 = a_t^3\,; \quad \pi = u_\pi^3 = Ts - St\,; \quad R = T^2 - \tfrac{1}{6} S^3.$$

Von den zahlreichen zwischen ihnen bestehenden Relationen erwähne ich zunächst diese 4:

$$(1) \qquad a_s^2 a_x u_s = \tfrac{1}{3} S \cdot u_x\,; \quad a_t^2 u_t a_x = \tfrac{1}{3} T \cdot u_x\,; \quad \Delta_s^2 u_s \Delta_x = \tfrac{1}{3} T \cdot u_x\,;$$
$$\Delta_t^2 u_t \Delta_x = \tfrac{1}{18} S^2 \cdot u_x,$$

und die 4 aus ihnen folgenden:

$$(2) \qquad (\vartheta s x)^2 \theta_s \theta_x = \tfrac{2}{3} S \cdot f\,; \quad (\varkappa s x)^2 \mathrm{K}_s \mathrm{K}_x = \tfrac{2}{3} T \cdot s\,;$$
$$a_\pi^2 u_\pi a_x \equiv 0\,; \quad \Delta_\pi^2 \Delta_x u_\pi = R \cdot u_x.$$

§ 2. *Die Combinanten des Polarnetzes von f.*

Die Polaren $a_x^2 a_y$ von f bilden ein Kegelschnittnetz:

$$P(f).$$

Die Hauptcombinanten sind die Elementar-Covarianten von

$$(abc)\, a_x^2 b_y^2 c_z^2\,,$$

* Presented to the Society Oct. 28, 1899. Received for publication Oct. 15, 1899.

also nach der Formel

$$3(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2 = 2(xyz)\Delta_x \Delta_y \Delta_z - (sxy)(sxz)(syz)$$

die Hessische Form Δ und die Cayley'sche Form s; die anderen Combinanten von $P(f)$ sind die Formen des simultanen Systems von Δ und s. Die erste der Elementar-Covarianten von $(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2$ ist

$$(abc)(bcu)a_y^2 b_x c_x = a_\vartheta u_\vartheta a_y^2 \theta_x^2;$$

sie hat den Werth

$$a_\vartheta u_\vartheta a_y^2 \theta_x^2 = \tfrac{2}{3} u_y \Delta_x^2 \Delta_y - \tfrac{1}{3} u_x \Delta_x \Delta_y^2 + \tfrac{1}{3} u_s (sxy)^2. \tag{3}$$

§ 3. *Apolare Netze.*

In Folge der Formel

$$a_\pi^2 a_x u_\pi = 0$$

sind die Netze $P(f)$ und $P(\pi)$ apolar. Die Coefficienten-Matrices beider Netze sind korrespondirend und es besteht die Relation:

$$(\pi\pi_1\pi_2)(\pi xy)(\pi xz)(\pi_1 xz)(\pi_1 yz)(\pi_2 yz)(\pi_2 xy) = \rho (xyz)(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2;$$

sie sagt aus, f und π haben dieselben Haupt-Combinanten. Die Hessische Curve von f ist die Cayley'sche von π und die Hessische Curve von π die Cayley'sche von f. Die Untersuchung * des Herrn White geht dahin Curven zu finden, welche entweder die Cayley'sche oder die Hessische mit f gemein haben.

§ 4. *Relationen zwischen den invarianten Bildungen von f.*

Die Relationen zwischen den invarianten Bildungen von f folgen im Wesentlichen aus Formel (3); ich erwähne hier nur diese 10 einfachsten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_\vartheta^2 \theta_x^2 u_\eta^2 &= -\tfrac{1}{3}\mathrm{K} + \tfrac{1}{3}\Delta_s \Delta_x^2 u_s^2 + \tfrac{1}{9} T \cdot u_x^2; \\
a_s u_s^2 a_x^2 &= \mathrm{H} + \tfrac{1}{6} S \cdot u_x^2; \\
\theta_s^2 u_s u_\vartheta^2 &= t; \\
\Delta_s \Delta_x^2 u_s^2 &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{K} + \tfrac{1}{4} S \cdot \theta + \tfrac{1}{6} T \cdot u_x^2; \\
\mathrm{K}_s^2 u_\kappa^2 u_s &= \tfrac{1}{2} St - \tfrac{1}{3} Ts; \\
\theta_t^2 u_t u_\vartheta^2 &= \tfrac{1}{6} Ss; \\
\theta_s = (ss_1x)^2 u_s u_{s_1} &= \mathrm{K} + \tfrac{1}{2} S\theta; \\
\Delta_s = (ss_1s_2)^2 u_s u_{s_1} u_{s_2} &= St - \tfrac{1}{3} Ts = \tfrac{2}{3} Ts - \pi; \\
s_s = (ss_1s_2)(ss_1x)(ss_2x)(s_1s_2x) &= \tfrac{1}{3} S^2 f + \tfrac{2}{3} T\Delta; \\
S_s = (ss_1s_2)(ss_1s_3)(ss_2s_3)(s_1s_2s_3) &= \tfrac{1}{3} S^3 + \tfrac{2}{3} T^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

* S. pag. 1 dieses Heftes.

§ 5. *Der Aronhold'sche Prozess.*

Die invarianten Bildungen des Aggregates

$$\varkappa f + \lambda \Delta$$

werden mittelst des Aronhold'schen Prozesses

$$\delta f = \Delta$$

berechnet; wendet man ihn auf die einfachsten Formen an, so erhält man:

$$\delta\Delta = \tfrac{1}{2} S \cdot f; \qquad \delta s = 3t; \qquad \delta S = 4T; \qquad \delta t = \tfrac{5}{6} S \cdot s;$$
$$\delta T = S^2; \qquad \delta\theta = 2\mathrm{H}; \qquad \delta\mathrm{H} = \mathrm{K} + \tfrac{1}{2} S\theta; \qquad \delta\mathrm{K} = S\mathrm{H}; \qquad \delta R = 0.$$

§ 6. *Einige invariante Bildungen von*

$$\varkappa f + \lambda \Delta, \quad \varkappa s + \lambda t, \quad \varkappa\pi + \lambda s.$$

Die Werthe der Hessischen Form und der Cayley'schen Form von

$$\varkappa f + \lambda \Delta$$

sind bekanntlich:

$$\Delta_{\varkappa f+\lambda\Delta} = \frac{1}{2S}\lambda(S\varkappa + (T + \sqrt{R})\lambda)\,(S\varkappa + (T - \sqrt{R})\lambda) f + (\varkappa^3 - \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 - \tfrac{1}{3}T\lambda^3)\Delta; \tag{5}$$

$$s_{\varkappa f+\lambda\Delta} = 3\lambda(\varkappa - \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot\lambda)\,(\varkappa + \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot\lambda)t + (\varkappa^3 + \tfrac{1}{2}S\varkappa\lambda^2 + \tfrac{2}{3}T\cdot\lambda^3)s. \tag{6}$$

Analoge Formeln erhält man durch Anwendung des Aronhold'schen Prozesses auf die Formeln (4):

$$\theta_{\varkappa s+\lambda t} = (\varkappa^2 - \tfrac{1}{6}S\lambda^2)\mathrm{K} + (\tfrac{2}{3}S\varkappa\lambda + \tfrac{2}{3}T\lambda^2)\mathrm{H} + (\tfrac{1}{2}S\varkappa^2 + \tfrac{2}{3}T\varkappa\lambda + \tfrac{1}{36}S^2\lambda^2)\theta;$$
$$\theta_{\varkappa\pi+\lambda s} = (R\varkappa^2 + 2T\varkappa\lambda + \lambda^2)\mathrm{K} - \tfrac{2}{3}S^2\varkappa\lambda\cdot\mathrm{H} + (-\tfrac{1}{6}SR\varkappa^2 + \tfrac{1}{3}ST\varkappa\lambda + \tfrac{1}{2}S\lambda^2)\theta;$$

$$\Delta_{\varkappa s+\lambda t} = (S\varkappa + T\lambda)\,(\varkappa + \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot\lambda)\,(\varkappa - \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot\lambda)\,t + (-\tfrac{1}{3}T\varkappa^3 + \tfrac{1}{6}S^2\varkappa^2\lambda + \tfrac{1}{2}ST\varkappa\lambda^2 + (\tfrac{2}{9}T^2 + \tfrac{1}{108}S^3)\lambda^3)s; \tag{7}$$

$$\Delta_{\varkappa\pi+\lambda s} = (-\tfrac{1}{3}R^2\varkappa^3 + R\varkappa\lambda^2 + \tfrac{2}{3}T\lambda^3)s - (R\varkappa^2\lambda + 2T\varkappa\lambda^2 + \lambda^3)\pi; \tag{8}$$

$$s_{\varkappa\pi+\lambda s} = \tfrac{1}{3}S^2\lambda\,(\lambda - \sqrt{R}\cdot\varkappa)\,(\lambda + \sqrt{R}\cdot\varkappa) f + (\tfrac{2}{3}R^2\varkappa^3 + 2RT\varkappa^2\lambda + 2R\varkappa\lambda^2 + \tfrac{2}{3}T\lambda^3)\Delta; \tag{9}$$

$$\tfrac{3}{2}S_{\varkappa\pi+\lambda s} = R^3\varkappa^4 + 4R^2T\varkappa^3\lambda + 6R^2\varkappa^2\lambda^2 + 4RT\varkappa\lambda^3 + (\tfrac{1}{2}S^3 + T^2)\lambda^4. \tag{10}$$

§ 7. *Curven, welche dieselbe Hessische und welche dieselbe Cayley'sche Curve haben.*

Die Formeln (9) und (8)

$$s_\pi = \tfrac{2}{3}R^2\Delta, \quad \Delta_\pi = -\tfrac{1}{3}R^2 s$$

bestätigen die im § 3 gemachte Aussage, dass die Cayley'sche Curve von π die Hessische von f und dass die Hessische Curve von π die Cayley'sche von f ist.

Diejenigen Curven, welche mit f oder π die Cayley'sche oder die Hessische Curve gemein haben sind covariant zu f und gehören daher den Büscheln an

$$\varkappa f + \lambda\Delta, \quad \varkappa s + \lambda t \text{ resp. } \varkappa\pi + \lambda s.$$

Ihre Parameter erhält man durch das Verschwinden der Coefficienten von f, t, π in den Formeln (5) bis (9). Da dieselben kubisch sind, so giebt es von jeder Art 3 Curven, ein Curventripel. Zur Cayley'schen Curve s gehört das Tripel:

$$(11) \qquad f; \qquad \mathrm{A} = \Delta + \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot f; \qquad \mathrm{B} = \Delta - \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot f;$$

zur Hessischen Curve Δ das Tripel:

$$(12) \quad f; \qquad F = S\Delta + (\sqrt{R} - T)f; \qquad G = S\Delta - (\sqrt{R} + T)\,f;$$

zur Cayley'schen Curve Δ das Tripel:

$$(13) \qquad \pi; \qquad \Phi = \pi + \sqrt{R}\cdot s; \qquad \Psi = \pi - \sqrt{R}\cdot s;$$

und zur Hessischen Curve s das Tripel:

$$(14) \qquad \pi; \qquad \mathrm{A} = t + \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot s; \qquad \mathrm{B} = t - \sqrt{\tfrac{1}{6}S}\cdot s.$$

§ 8. *Die Formen Δ und s der Tripel.*

Die Cayley'schen Formen des Tripels:

$$f, \quad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}$$

haben die Werthe:

$$s_f = s; \qquad s_{\mathrm{A}} = \tfrac{2}{3}\,(T + \sqrt{\tfrac{1}{6}S^3})s; \qquad s_{\mathrm{B}} = \tfrac{2}{3}\,(T - \sqrt{\tfrac{1}{6}S^3})\,s;$$

die Cayley'schen des Tripels:

$$\pi, \quad \Phi, \quad \Psi$$

die Werthe:

$$s_\pi = \tfrac{2}{3}\,R^2\Delta; \qquad s_\phi = \tfrac{8}{3}\sqrt{R^3}\,(T - \sqrt{R})\,\Delta; \qquad s_\psi = -\tfrac{8}{3}\sqrt{R^3}\,(T + \sqrt{R})\,\Delta;$$

die Hessischen des Tripels:

$$f, \quad F, \quad G$$

die Werthe:

$$\Delta_f = \Delta; \qquad \Delta_F = -4R\,(T + \sqrt{R})\,\Delta; \qquad \Delta_G = -4R\,(T - \sqrt{R})\,\Delta;$$

und die Hessischen des Tripels:

$$\pi, \quad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}$$

die Werthe:

$$\Delta_\pi = -\tfrac{1}{3}\,R^2 s; \qquad \Delta_{\mathrm{A}} = \tfrac{2}{9}(T + \sqrt{\tfrac{1}{6}S^3})^2 s; \qquad \Delta_{\mathrm{B}} = \tfrac{2}{9}\,(T - \sqrt{\tfrac{1}{6}S^3})^2\,s.$$

§ 9. *Die Formen* $t, \quad T, \quad A, \quad B, \quad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}$ *von* π.

Die Formen

$$t, \quad T, \quad A, \quad B, \quad \mathrm{A}, \quad \mathrm{B}$$

gebildet für die Form π haben die Werthe:

$$t_\pi = -\tfrac{2}{9} R^3 (T\Delta - \tfrac{1}{6} S^2 f); \qquad T_\pi = -\tfrac{2}{9} R^4 T;$$

$$A_\pi = \tfrac{1}{3} \sqrt{R^3} \cdot \Psi; \qquad B_\pi = -\tfrac{1}{3} \sqrt{R^3}\, \Phi;$$

$$\mathrm{A}_\pi - = \frac{2}{9S} R^3 (T + \sqrt{R}) F; \qquad \mathrm{B}_\pi = -\frac{2}{9S} R^3 (T - \sqrt{R}) G.$$

§ 10. *Apolarität der Netze* $P(A)$ *und* $P(\mathrm{B})$.

In Folge der Formel

$$A_{\mathrm{B}}^2 A_x u_{\mathrm{B}} = 0$$

sind die Netze $P(A)$ und $P(\mathrm{B})$ apolar. Die einfachsten invarianten Bildungen der Form A haben die Werthe;

$$s_A = \tfrac{2}{3} (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3}) s; \qquad \theta_A = \tfrac{1}{6} S \theta + 2 \sqrt{\tfrac{1}{6} S} \cdot \mathrm{H} + \mathrm{K};$$

$$t_A = \tfrac{4}{9} S (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3}) t + \tfrac{2}{9} R s.$$

$$S_A = \tfrac{2}{3} (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3})^2; \quad T_A = \tfrac{4}{9} \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3} \cdot (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3})^2 - \tfrac{2}{9} R (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3});$$

$$\pi_A = -\tfrac{8}{27} S (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3})^3 \mathrm{B}.$$

Die letzte Formel bestätigt die Apolarität.

§ 11. *Die charakteristischen Relationen für das Tripel* $f, \quad A, \quad B$.

Die zwischen $f, A, B,$ bestehenden Relationen:

$$(abA)^2 a_x b_x A_y = \sqrt{\tfrac{1}{6} S} \cdot A_x^2 A_y;$$

$$(AA_1 a)^2 A_x A_{1,x} a_y = \tfrac{1}{3} (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3})\, a_x^2 a_y;$$

$$(AA_1 B)^2 A_x A_{1,x} B_y = -\tfrac{1}{3} (T + \sqrt{\tfrac{1}{6} S^3}) B_x^2 B_y$$

charakterisiren das Tripel f, A, B. Die Formel:

$$(abL)^2 a_x b_x = \sqrt{\tfrac{1}{6} S} \cdot L_x^2 \tag{15}$$

liefert 6 Relationen zwischen den Coefficienten des Kegelschnittes L; 3 derselben folgen nach der Formel:

$$(abL)^2 a_A b_A u_A = \sqrt{\tfrac{1}{6} S} \cdot L_A^2 u_A$$

aus den andern. Das durch Formel (15) charakterisirte Kegelschnittnetz ist $P(A)$.