SUR L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES DE PFAFF COMPLETS

PAR
MENDEL HAIMOVICI

On doit à A. Mayer [4] la méthode d'intégration—qui porte son nom—des systèmes de Pfaff (S) (voir plus loin, §1) complètement intégrables. Des démonstrations rigoureuses de théorèmes d'existence et d'unicité ont été données par W. Nikliborc [5], C. Carathéodory [2] (théorèmes locaux) et T. Y. Thomas [10]. Dans ces théorèmes, on suppose que les fonctions $a_{\alpha i}$ sont bornées et continues, ainsi que leurs dérivées, dans un domaine D des variables x, z et qu'on a, dans D,

$$\frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial x_k} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial a_{\alpha j}}{\partial z_\beta} a_{\beta k} = \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_j} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta} a_{\beta j} \qquad (j \neq k). \tag{1}$$

Dans cette hypothèse, il existe s fonctions $z_\alpha = f_\alpha(x)$, vérifiant le système et les conditions initiales

$$z_\alpha^0 = f_\alpha(x_0)$$

où le point x^0, z^0 est contenu dans D.

L'étude de ces systèmes a été reprise ensuite par divers auteurs [1; 6; 7], toujours dans le cas où les coefficients admettent des dérivées continues(1). Dans ce cas, les théorèmes assurent l'existence et l'unicité des solutions.

Récemment, A. Haimovici [3] a repris le problème dans des conditions plus générales, où on ne suppose plus la dérivabilité des coefficients, et a démontré l'existence des solutions dans ces conditions, l'unicité n'étant plus, en général assurée. Les conditions d'intégrabilité établies par A. Haimovici sont nécessaires et suffisantes, mais elles paraissent être d'un maniement difficile, puisqu'elles supposent des connaissances étendues sur les courbes intégrales du système(2).

Ce travail a pour but de donner un théorème d'existence dans des conditions plus étendues que celles des auteurs cités plus haut. On ne suppose pas l'existence des dérivées des fonctions, on ne suppose même pas l'existence de dérivées géné-

---

Received by the editors May 9, 1962.

(1) Dans le théorème de Bruwier, on suppose seulement l'existence des dérivées qui entrent dans les formules (1).

(2) M. A. Haimovici suppose, notamment, que les fonctions $a_{\alpha i}$ sont bornées et continues et que, étant donné un parallélogramme *abcd*, dans l'espace des variables x, à chaque intégrale de (S) le long de *abc*, ayant les extrémités A et C, il correspond une intégrale le long de *adc*, ayant les mêmes extrémités.

ralisées [9] ou de différentielles extérieures généralisées [8]. Les hypothèses sont moins générales que celles de A. Haimovici, mais elles portent seulement sur les coefficients et non sur les courbes intégrales.

L'énoncé du théorème, qui fait l'objet principal de ce travail, se trouve dans le 1er paragraphe (Théorème I); le §2 en contient la démonstration, dont la marche générale peut être suivie, en lisant les titres des sous-paragraphes.

Le §3 contient des applications au cas où il y a unicité de la solution. Dans ce cas, on voit qu'on peut prolonger celle-ci, comme on le fait pour les équations différentielles ordinaires. On voit que les cas éxaminés plus haut, sont contenus dans le Théorème I.

1. **Notations. Énoncé du théorème d'existence.**

1. Soit le système de Pfaff

$$\text{(S)} \qquad \theta_\alpha = dz_\alpha - \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} dx_i = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,s;\ i = 1,2,\cdots,n),$$

où $a_{\alpha i}$ sont des fonctions continues des variables x, z, définies dans un domaine D^* de l'espace R_{s+n} de ces variables. Dans un domaine D contenu avec sa frontière dans D^* les fonctions $a_{\alpha i}$ sont donc bornées et uniformément continues. Soit

$$|a_{\alpha i}| < A \quad \text{dans } D. \tag{1.1}$$

Considérons, en un point P_0 de D, le plan π_0 à n dimensions,

$$z_\alpha - z_\alpha^0 - \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(P_0)(x_i - x_i^0) = 0, \tag{1.2}$$

que nous désignons par "plan tangent en P_0"; soit, dans le plan X_n des variables x, le carré de sommets

$$p_0(x_i^0); \quad p_k(x_i^{(k)} = x_i^0 + \lambda_i); \quad p_l(x_i^{(l)} = x_i^0 + \mu_i); \quad p_{kl}(x^{(kl)} = x_i^0 + \lambda_i + \mu_i);$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ h & \text{si } i = k, \end{cases} \qquad \mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq l, \\ \bar{h} & \text{si } i = l, \end{cases}$$

$$l \neq k, \qquad \bar{h} = \pm h,$$

et, dans R_{s+n}, les points correspondants

$$P_0(x_i^0, z_\alpha^0); \qquad P_k(x_i^{(k)}, z_\alpha^{(k)} = z_\alpha^0 + v_\alpha^{(k)})$$

$$P_l(x_i^{(l)}, z_\alpha^{(l)} = z_\alpha^0 + v_\alpha^{(l)}); \qquad P_{kl}(x_i^{(kl)}, z_\alpha^{(kl)} = z_\alpha^0 + v_\alpha^{(kl)}).$$

Nous supposons que tous ces points sont dans D.

Désignons par $\Delta_{P\pi}$ la distance d'un point P au plan π.

2. Hypothèse H. Étant donné un $\varepsilon > 0$, il y a des fonctions $\varepsilon_1(\varepsilon), \eta(\varepsilon)$ positives, avec le rapport $\varepsilon/\eta(\varepsilon)$ borné

$$\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)} \leqq M, \tag{2.1}$$

telles que

$$\left| \frac{a_{\alpha l}(P_k) - a_{\alpha l}(P_0)}{h} - \frac{a_{\alpha k}(P_l) - a_{\alpha k}(P_0)}{h} \right| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

dès que

$$|h| < \varepsilon_1(\varepsilon), \qquad \Delta_{P_k\pi_0} < |h|\eta(\varepsilon), \qquad \Delta_{P_l\pi_0} < |h|\eta(\varepsilon), \tag{2.3}$$

pour tous les points de D^* et pour tous les couples de valeurs entières k, l de 1 à n.

3. Théorème I. *Étant donné le système* (S), *ou les fonctions $a_{\alpha i}$, uniformément continues dans D et bornées par* (1.1), *vérifient l'hypothèse* H, *il y a pour chaque point $P_0(x^0, z^0) \subset D$ un système de fonctions*

$$z_\alpha = f_\alpha(x)$$

vérifiant les conditions:

(a) *f_α sont continues avec leurs premières dérivées dans tout le domaine $\bar{J}$ de X_n (avec sa frontière)*:

$$|x_i - x_i^0| \leqq a, \tag{$\bar{J}$}$$

tel que

$$a < \frac{1}{M_n} \tag{3.1}$$

et que le parallélipipède $\bar{I}_0$ défini par $\bar{J}$ et

$$|z_\alpha - z_\alpha^0| \leqq nAa$$

soit entièrement contenu dans $\bar{D}$.

(b) *On a*

$$z_\alpha^0 = f_\alpha(x_0);$$

(c) *On a, dans $\bar{J}$*

$$df_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n a_{\alpha i}(x, f(x))\, dx_i.$$

2. Démonstration du Théorème I.

4. Remarque sur les distances $\Delta_{P\pi_0}$. Si la distance d'un point $P(x, z)$ à π_0, est plus petite qu'un certain nombre ε^*, on peut conclure que les distances de P à chacun des plans (à $(n+s-1)$ dimensions), donnés par les équations (1.2), prises séparément, sont plus petites que ε^*, ce qui veut dire qu'on a

$$\Delta^\alpha_{P\pi_0} = \left| z_\alpha - z_\alpha^0 - \sum_{i=1}^n a_{\alpha i}(P_0)(x_i - x_i^0) \right| < \varepsilon^{**}, \tag{4.1}$$

où

$$\varepsilon^{**} = \sqrt{1 + nA^2}\, \varepsilon^*.$$

Vice-versa, si l'on a (4.1) pour chaque indice α, et pour un ε^{**} donné, il en résulte par des méthodes élémentaires que

$$\Delta_{P\pi_0} < \sqrt{s}\, \varepsilon^{**}$$

Pour imposer la condition (2.3) *aux distances de* P_k *et* P_l *à* π_0 *il suffit donc de supposer*

$$\Delta^{\alpha}_{P_k\pi_0} < |h| \frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{s}}, \quad \Delta^{\alpha}_{P_l\pi_0} < |h| \frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{s}}. \tag{4.2}$$

5. Propriétés d'un quadrilatère spécial. Supposons que, dans le quadrilatère décrit au no. 1 (§1), les droites P_0P_k et P_lP_{kl} soient contenues respectivement dans les plans tangents en P_0 et P_l. On a alors

$$\begin{aligned} v_\alpha^{(k)} &= a_{\alpha k}(P_0)h, \\ v_\alpha^{(kl)} - v_\alpha^{(l)} &= a_{\alpha k}(P_l)h, \end{aligned} \tag{5.1}$$

et

$$\Delta^{\alpha}_{Pl\pi_0} = \left| v_\alpha^{(l)} - a_{\alpha l}(P_0)h \right|. \tag{5.2}$$

Construisons les expressions $\Delta^{\alpha}_{P_{kl}\pi_k}$, qui donnent la distance du point P_{kl} au plan π_k tangent en P_k. On a

$$\Delta^{\alpha}_{P_{kl}\pi_k} = \left| z_\alpha^{(kl)} - z_\alpha^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(P_k)(x_i^{(kl)} - x_i^{(kn)}) \right|,$$

donc

$$\Delta^{\alpha}_{P_{kl}\pi_k} = \left| v_\alpha^{(kl)} - v_\alpha^{(k)} - a_{\alpha l}(P_k)\, h \right|$$

et, d'après (5.1),

$$\Delta^{\alpha}_{P_{kl}\pi_k} = \left| v_\alpha^{(l)} + a_{\alpha k}(P_l)h - a_{\alpha l}(P_k)h - a_{\alpha k}(P_0)h \right|.$$

Or, d'après (2.2), il en résulte

$$\Delta^{\alpha}_{P_{kl}\pi_k} < \varepsilon h^2 + \left| v_\alpha^{(l)} - a_{\alpha l}(P_0)h \right|$$

et, d'après (5.2),

$$\Delta^{\alpha}_{P_{kl}\pi_k} < \Delta^{\alpha}_{P_l\pi_0} + \varepsilon h^2, \tag{5.3}$$

si (voir no. 4)

$$|h| < \varepsilon_1(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \Delta^{\alpha}_{P_l\pi_0} < |h| \frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{s}}. \tag{5.4}$$

6. Construction d'un réseau de points dans D. Considérons maintenant dans X_n, à partir du point $p_0(x_i^0)$, qui projette le point P_0 de D, le réseau de points

$$p_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}(x_i = x_i^0 + \kappa_i h)$$

où κ_i sont des entiers

(6.1) $$-N \leqq \kappa_i \leqq N$$

et

(6.2) $$h = \frac{a}{N}.$$

Construisons ensuite, à partir d'un point P_0 une ligne polygonale Q_1, dont les sommets $P_{\kappa_1 00\ldots 0}$ ont pour projections dans X_n les points $P_{\kappa_1 0\ldots 0}$ et tels que les côtés $P_{\kappa_1 0\ldots 0}P_{\kappa_1+1,0\ldots 0}$ soient contenus dans le plan tangent en $P_{\kappa_1 0\ldots 0}$, si $\kappa_1 \geqq 0$, et dans le plan tangent en $P_{\kappa_1+1,0\ldots 0}$, si $\kappa_1 < 0$.

Il est clair que, pour $\kappa_1 = -N, \; -N+1, \cdots, 0, \cdots, N$, cette ligne est située dans I_0, avec les extrémités sur la frontière. En effet, on a, d'abord, de (6.1) et (6.2), que, dans X_n.

$$x_1^{(\kappa_1 0\ldots 0)} = x_1^0 + \kappa_1 \frac{a}{N},$$
$$x_i^{(\kappa,0\ldots 0)} = x_i^0 \qquad (i > 1)$$

et ensuite

$$z_\alpha^{(\kappa_1 0\ldots 0)} - z_\alpha^{(\kappa_1-\sigma_1,0\ldots 0)} = a_{\alpha 1}(P_{\kappa_1-\sigma_1,0\ldots 0})h\sigma_1,$$

où $h = a/N$, $\sigma_1 = \operatorname{sgn}\kappa_1$, si $\kappa_1 \neq 0$ et $\sigma_1 = \pm 1$, si $\kappa_1 = 0$. Par suite, on a

$$\left| z_\alpha^{(\kappa_1 0\ldots 0)} - z_\alpha^0 \right| < A\kappa_1 h;$$

par suite de (6.1), notre affirmation en résulte, en vertu de la manière dont nous avons défini I_0.

À partir de chaque sommet $P_{\kappa_1 0\ldots 0}$ de Q_1, construisons, de la même manière, une ligne polygonale $Q_2(P_{\kappa_1 0\ldots 0})$, soient $P_{\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0}$ ses sommets, dont les projections, dans X_n, ont pour coordonnées

$$x_1^{(\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0)} = x_1^0 + \kappa_1 h, \quad x_2^{(\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0)} = x_2^0 + \kappa_2 h,$$
$$x_3^{(\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0)} = x_3^0, \cdots, x_n^{(\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0)} = x_n^0 \qquad \left(h = \frac{a}{N}\right).$$

Pour les coordonnées z_α des sommets de $Q_2(P_{\kappa_1 0\ldots 0})$, on a

$$z_\alpha^{(\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0)} - z_\alpha^{(\kappa_1,\kappa_2-\sigma_2,0\ldots 0)} = a_{\alpha 2}(P_{\kappa_1,\kappa_2-\sigma_2,0\ldots 0})ha\sigma_2$$

$$\sigma_2 = \operatorname{sgn}\kappa_2, \text{ pour } \kappa_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \pm 1, \text{ pour } \kappa_2 = 0.$$

On voit, tout comme plus haut, que, pour

$$-N \leqq \kappa_1; \; \kappa_2 \leqq N,$$

le point $P_{\kappa_1\kappa_2 0\ldots 0}$ est situé dans I_0.

En procédant de la même manière, on construit, à partir de chaque sommet de chaque ligne polygonale $Q_i(P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{i-1}0\ldots0})$, une ligne polygonale $Q_{i+1}(P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_i0\ldots0})$. On arrive ainsi à un réseau de points $P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$, dans $\bar{I}_0$, dont les projections dans X_n sont $p_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$ et dont les coordonnées z_α sont données par les formules

$$
\begin{aligned}
z_\alpha^{(\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)} = z_\alpha^0 &+ \sum_{\kappa=0}^{\kappa_1-\sigma_1} a_{\alpha 1}(P_{\kappa 0\ldots 0})h\sigma_1 \\
&+ \sum_{\kappa=0}^{\kappa_2-\sigma_2} a_{\alpha 2}(P_{\kappa_1\kappa 0\ldots 0})h\sigma_2 + \cdots + \sum_{\kappa=0}^{\kappa_{n-1}-\sigma_{n-1}} a_{\alpha,n-1}(P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{n-2}\kappa 0})h\sigma_{n-1} \\
&+ \sum_{\kappa=0}^{\kappa_n-\sigma_n} a_{\alpha n}(P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_{n-1}\kappa})h\sigma_n,
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

avec

$$\sigma_i = \operatorname{sgn}\kappa_i \quad \text{si} \quad \kappa_i \neq 0, \quad -N \leqq \kappa_i \leqq N$$

(le terme correspondant n'existe pas pour $\kappa_i = 0$).

On voit, tout de suite, que

$$\left| z_\alpha^{(\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)} - z_\alpha^0 \right| < Ah \sum_{i=1}^{n} |\kappa_i|. \tag{6.4}$$

7. Construction d'une suite de variétés polyédriques dans $\bar{I}_0$ et d'un système de fonctions $z_\alpha = f_\alpha^{(N)}(x)$ qui les représentent. Partons de chaque point $P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$ du réseau, intérieur à I_0, et considérons le simplexe formé par ce point et les points

$$P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'},\ P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n''},\cdots,P_{\kappa_1^{(n)}\kappa_2^{(n)}\ldots\kappa_n^{(n)}}$$

où chacun diffère du précédent par un seul indice, soit $\kappa_{j_b}^{(b)}$, de manière que

$$\kappa_{j_b}^{(b)} = \kappa_{j_b}^{(b-1)} + \sigma_{j_b}, \quad \begin{cases} \sigma_{j_b} = \operatorname{sgn}\kappa_{j_b}^{(b-1)} & \text{si } \kappa_{j_b}^{(b-1)} \neq 0, \\ \sigma_{j_b} = \pm 1 & \text{si } \kappa_{j_b}^{(b-1)} = 0, \end{cases} \tag{7.1}$$

les indices b étant tous différents entre eux et prenant les valeurs $1, 2, \cdots, n$ et $\kappa_{j_1}^{(0)} = \kappa_{j_1}$.

Tous les simplexes, ainsi construits, forment une variété polyédrique $V^{(N)}$, à n dimensions, située dans $\bar{I}_0$ et que nous pouvons considérer comme représentée par des fonctions,

$$z_\alpha^{(N)} = f_\alpha^{(N)}(x).$$

Ces fonctions sont évidemment *continues*, pour chaque entier N, et elles ont des *dérivées continues*, lorsque x, z sont les coordonnées d'un point *à l'intérieur d'un simplexe.*

Dans les numéros suivants, nous allons montrer *qu'elles sont équicontinues.*

8. Équations des plans des facettes simpliciales. Remarques sur leurs arêtes. Soit une facette simpliciale issue du point $P_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$; elle est située dans un plan dont nous écrirons les équations:

$$z_\alpha - z_\alpha^{(\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}^{*}(x_i - x_i^{(\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)}). \tag{8.1}$$

Considérons une arête de cette facette, soit

$$P_{\kappa_1^{(b-1)}\kappa_2^{(b-1)}\ldots\kappa_n^{(b-1)}}\, P_{\kappa_1^{(b)}\kappa_2^{(b)}\ldots\kappa_n^{(b)}},$$

où nous avons (7.1) et $\kappa_i^{(b-1)} = \kappa_i^{(b)}$ pour $i \neq j_b$. Nous chercherons à exprimer la différence des coordonnées z_α de ces points.

Pour la commodité de l'écriture, nous poserons partout κ_i' au lieu de $\kappa_i^{(b-1)}$; κ_i'', au lieu de $\kappa_i^{(b)}$ et j au lieu de j_b.

Remarquons d'abord que, d'après la construction faite plus haut, si

$$\kappa_{j+1}' = \kappa_{j+2}' = \cdots = \kappa_n' = 0, \tag{8.2}$$

alors

$$z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} = a_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'})\, h\sigma_j \quad \left(h = \frac{a}{N}\right). \tag{8.3}$$

Supposons ensuite que, pour un $m > 0$, tel que $j + m \leqq n$,

$$\begin{aligned} &\kappa_{j+m}' \neq 0 \qquad (j + m \leqq n), \\ &\kappa_q' = 0 \qquad \text{pour } q > j + m \text{ (dans le cas } j + m < n). \end{aligned} \tag{8.4}$$

En posant alors

$$\begin{aligned} &\theta_i' = \kappa_i' \quad \text{pour } i \neq j + m, \quad \theta_{j+m}' = \kappa_{j+m}' - \sigma_{j+m}, \ \sigma_{j+m} = \operatorname{sgn} \kappa_{j+m}', \\ &\theta_i'' = \kappa_i'' \quad \text{pour } i \neq j + m, \quad \theta_{j+m}'' = \kappa_{j+m}'' - \sigma_{j+m}, \end{aligned}$$

on a, d'après la remarque précédente,

$$\begin{aligned} &(z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')}) - (z_\alpha^{(\theta_1''\theta_2''\ldots\theta_n'')} - z_\alpha^{(\theta_1'\theta_2'\ldots\theta_n')}) \\ &\quad = (z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\theta_1''\theta_2''\ldots\theta_n'')}) - (z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} - z_\alpha^{(\theta_1'\theta_2'\ldots\theta_n')}) \\ &\quad = a_{\alpha,j+m}(P_{\theta_1''\theta_2''\ldots\theta_n''})h\sigma_{j+m} - a_{\alpha,j+m}(P_{\theta_1'\theta_2'\ldots\theta_n'})\, h\sigma_{j+m}. \end{aligned}$$

Si $\theta_{j+m}' \neq 0$, on peut appliquer cette opération encore une fois, et ainsi de suite, et on arrivera finalement, en ajoutant membre à membre les relations ainsi trouvées, au résultat suivant:

$$z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} = z_\alpha^{(\phi_1''\phi_2''\ldots\phi_n'')} - z_\alpha^{(\phi_1'\phi_2'\ldots\phi_n')}$$

$$(8.5)\qquad + \sigma_{j+m} h \sum_{\rho=0}^{\kappa_{j+m-1}} [a_{\alpha,j+m}(P_{\mu_{\rho1}''\mu_{\rho2}''\ldots\mu_{\rho n}''}) - a_{\alpha,j+m}(P_{\mu_{\rho1}'}P_{\mu_{\rho2}'}\cdots P_{\mu_{\rho n}'})],$$

où

$$(8.5')\qquad \begin{aligned} \phi_i'' &= \kappa_i'' \quad \text{si } i \neq j+m, \quad \phi_{j+m}'' = 0, \\ \phi_i' &= \kappa_i' \quad \text{si } i \neq j+m, \quad \phi_{j+m}' = 0 \end{aligned}$$

et

$$(8.5'')\qquad \begin{aligned} \mu_{\rho i}'' &= \kappa_i'' \quad \text{si } i \neq j+m, \\ \mu_{\rho i}' &= \kappa_i' \quad \text{si } i \neq j+m, \\ \mu_{\rho,j+m}'' &= \mu_{\rho+1,j+m}'' - \sigma_{j+m}, \quad \mu_{\kappa_{j+m-1},j+m}'' = \kappa_{j+m}'' - \sigma_{j+m}, \\ \mu_{\rho,j+m}' &= \mu_{\rho+1,j+m}' - \sigma_{j+m}, \quad \mu_{\kappa_{j+m-1},j+m}' = \kappa_{j+m}' - \sigma_{j+m}. \end{aligned}$$

9. Autre expression des différences $z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')}$. Posons maintenant

$$(9.1)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_{\rho,j+m} = {} & [a_{\alpha,j+m}(P_{\mu_{\rho1}''\mu_{\rho2}''\ldots\mu_{\rho n}''}) - a_{\alpha,j+m}(P_{\mu_{\rho1}'\mu_{\rho2}'\ldots\mu_{\rho n}'})]\sigma_j \\ & - [a_{\alpha j}(P_{\mu_{\rho+1,1}'\mu_{\rho+1,2}'\ldots\mu_{\rho+1,n}'}) - a_{\alpha j}(P_{\mu_{\rho1}'\mu_{\rho2}'\ldots\mu_{\rho n}'})]\sigma_{j+m}. \end{aligned}$$

D'ailleurs, si les conditions de l'hypothèse H sont vérifiées au point $P_{\mu_{\rho1}'\mu_{\rho2}'\ldots\mu_{\rho n}'}$ et pour les arêtes $P_{\mu_{\rho1}'\mu_{\rho2}'\ldots\mu_{\rho n}'}P_{\mu_{\rho1}''\mu_{\rho2}''\ldots\mu_{\rho n}''}$ et $P_{\mu_{\rho1}'\mu_{\rho2}'\ldots\mu_{\rho n}'}P_{\mu_{\rho+1,1}'\mu_{\rho+1,2}'\ldots\mu_{\rho+1,n}'}$, on a

$$(9.2)\qquad |\varepsilon_{\rho,j+m}| < \varepsilon h.$$

De la formule (8.5), on obtient, en tenant compte de (9.1),

$$z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} = z_\alpha^{(\phi_1''\phi_2''\ldots\phi_n'')} - z_\alpha^{(\phi_1'\phi_2'\ldots\phi_n')}$$

$$(9.3)\qquad + \sigma_j h[a_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}) - a_{\alpha j}(P_{\phi_1'\phi_2'\ldots\phi_n'})] + \sum_{\rho=0}^{\kappa_{j+m-1}} \varepsilon_{\rho,j+m}\, \sigma h.$$

On est ainsi réduit à évaluer la différence

$$z_\alpha^{(\phi_1''\phi_2''\ldots\phi_n'')} - z_\alpha^{(\phi_1'\phi_2'\ldots\phi_n')},$$

où

$$\phi_{j+m}'' = \phi_{j+m+1}'' = \cdots = \phi_n'' = 0, \quad \phi_{j+m}' = \phi_{j+m+1}' = \cdots = \phi_n' = 0.$$

Si $\phi_{j+p}' \neq 0$ $(0 < p < m)$ et $\phi_q' = 0$ pour $q > j+p$, on peut répéter ce procédé et on trouve

$$z_\alpha^{(\phi_1''\phi_2''\dots\phi_n'')} - z_\alpha^{(\phi_1'\phi_2'\dots\phi_n')} = z_\alpha^{(\psi_1''\psi_2''\dots\psi_n'')} - z_\alpha^{(\psi_1'\psi_2'\dots\psi_n')}$$

$$+ \sigma_j h[a_{\alpha j}(P_{\phi_1'\phi_2'\dots\phi_n'}) - a_{\alpha j}(P_{\psi_1'\psi_2'\dots\psi_n'})] + \sum_{\rho=0}^{\kappa_{j+p}-1} \varepsilon_{\rho,j+} \sigma_j h,$$

où

$$\psi_i'' = \phi_i'' \quad \text{si } i \neq j+p, \qquad \psi_{j+p}'' = 0,$$

$$\psi_i' = \phi_i' \quad \text{si } i \neq j+p, \qquad \psi_{j+p}' = 0.$$

En procédant de la même manière, on trouve finalement

$$z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\dots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n')} = z_\alpha^{(\lambda_1''\lambda_2''\dots\lambda_n'')} - z_\alpha^{(\lambda_1'\lambda_2'\dots\lambda_n')}$$

$$+ \sigma_j h[a_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n'}) - a_{\alpha j}(P_{\lambda_1'\lambda_2'\dots\lambda_n'})]$$

$$(9.4) \qquad + \sigma_j h \left[\sum_{\rho=0}^{\kappa_j'+m-1} \varepsilon_{\rho,j+m} + \sum_{\rho=0}^{\kappa_j'+m-2} \varepsilon_{\rho,j+m-1} + \dots + \sum_{\rho=0}^{\kappa_j'} \varepsilon_{\rho,j+1} \right].$$

où

$$(9.4') \qquad \begin{aligned} \lambda_i'' &= \kappa_i'' \quad \text{pour } i \leqq j, \quad \lambda_i'' = 0 \quad \text{pour } i > j, \\ \lambda_i' &= \kappa_i', \quad \text{pour } i \leqq j, \quad \lambda_i' = 0 \quad \text{pour } i > j. \end{aligned}$$

Si nous nous rapportons maintenant à la remarque faite au numéro précédent ((8.2) et (8.3)), nous tirons de (9.4)

$$(9.5) \qquad z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\dots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n')} = h\sigma_j[a_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n'}) + \chi_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n'}, P_{\kappa_1''\kappa_2''\dots\kappa_n''})]$$

où nous avons posé

$$(9.6) \qquad \chi_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n'}, P_{\kappa_1''\kappa_2''\dots\kappa_n''}) = \sum_{\rho=0}^{\kappa_j'+m-1} \varepsilon_{\rho,j+m} + \dots + \sum_{\rho=0}^{\kappa_j'} \varepsilon_{\rho,j+1}.$$

10. Évaluations des coefficients dans les équations des plans qui contiennent les facettes simpliciales. Revenons maintenant à la condition H et à l'observation faite au début du numéro précédent (voir (9.2)), au cas où cette condition est vérifiée, c'est-à-dire où h est assez petit et où l'on a

$$\Delta^\alpha_{P_{\mu_{\rho 1}''\mu_{\rho 2}''\dots\mu_{\rho n}''}\pi_{\mu_{\rho 1}'\mu_{\rho 2}'\dots\mu_{\rho n}'}} < h \frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{s}}.$$

Supposons que

$$\Delta^\alpha_{P_{\mu_{\rho 1}''\mu_{\rho 2}''\dots\mu_{\rho n}''}\pi_{\mu_{\rho 1}'\mu_{\rho 2}'\dots\mu_{\rho n}'}} < h\gamma \text{ et } \gamma + h\varepsilon < \frac{\eta(\varepsilon)}{\sqrt{s}}.$$

Alors, d'après (5.3), on a aussi

$$\Delta^\alpha_{P_{\mu_{\rho+1,1}''\mu_{\rho+1,2}''\dots\mu_{\rho+1,n}''}\pi_{\mu_{\rho+1,1}'\mu_{\rho+1,2}'\dots\mu_{\rho+1,n}'}} < h\gamma + \varepsilon h^2 < \frac{h\,\eta(\varepsilon)}{\sqrt{s}}.$$

Au numéro précédent, nous avons exprimé la différence des coordonnées z_α des points $P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n''}$ et $P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}$ successivement à l'aide des mêmes coordonnées des points à indices plus petits. Dans cette opération, nous avons fait, pour chaque couple de points, au plus $|\kappa_{j+1}| + |\kappa_{j+2}| + \cdots + |\kappa_{j+m}|$ par, c'est-à-dire, en général, moins de nN pas. À chaque pas, la distance point-plan, evaluée plus haut s'accroît d'au plus εh^2 si la condition H est vérifiée au pas précédent. Puisque, au pas initial, cette distance est nulle, on a donc, d'après (3.1), à chaque pas, et par suite aussi au pas final

$$(10.1) \qquad \Delta^\alpha_{P\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n''\pi\kappa_1'\kappa_1'\ldots\kappa_n'} < nNh^2\varepsilon = na\varepsilon h < \frac{h\varepsilon}{M} \leqq h\eta(\varepsilon).$$

Donc, en observant que (9.2) doit être applicable à chaque terme de la somme χ de (9.6), on a

$$(10.2) \qquad |\chi_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}, P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n''})| < nNh\varepsilon = na\varepsilon < \frac{\varepsilon}{M}.$$

De (9.5), il suit d'autre part

$$(10.3) \qquad \frac{z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')}}{h\sigma_j} = a_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}) + \chi_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}, P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n''}).$$

Revenons maintenant au problème posé au début de ce numéro, et tachons d'évaluer les coefficients des équations des plans qui contiennent les facettes simpliciales de $V^{(N)}$. En considérant les arêtes qui se projettent dans X_n suivant les segments parallèles aux axes de coordonnées (voir numéro 7), on arrive, d'après (8.1) et (10.3), à la conclusion

$$a^*_{\alpha j} = a_{\alpha j}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}) + \chi_{\alpha j}$$

et, par suite de (10.2),

$$|a^*_{\alpha j}| < A + \frac{\varepsilon}{M} = A^*.$$

11. Démonstration de l'équicontinuité des fonctions $f_\alpha^{(N)}(x)$. Conclusions. Cela posé, soient deux points P', P'' sur $V^{(N)}$, de coordonnées resp.

$$x_i', \ z_\alpha' = f_\alpha^{(N)}(x'); \quad x_i'', \ z_\alpha'' = f_\alpha^{(N)}(x'').$$

On aura évidemment

$$(11.1) \qquad |z_\alpha'' - z_\alpha'| < A^* \sum_{i=1}^{n} |x_i'' - x_i'|,$$

ce qui démontre l'équicontinuité.

Il s'ensuit, par le théorème d'Ascoli, qu'on peut extraire une suite (T) de valeurs N, telles que les fonctions $f_\alpha^{(N)}$ tendent uniformément à des limites $f_\alpha(x)$, continues et bornées en $\bar{I}_0$ et qu'on aura

$$|f_\alpha(x'') - f_\alpha(x')| \leqq A \sum_{i=1}^{n} |x_i'' - x_i'|. \tag{11.2}$$

Vu que $f_\alpha^{(N)}(x_0) = z_\alpha^0$, il s'ensuit que

$$f_\alpha(x_0) = z_\alpha^0.$$

Nous supposerons dorénavant que les valeurs N, que nous considérerons, appartiennent à la suite (T). À partir d'un N assez grand, soit N_1, on aura dans $\bar{I}_0$, outre les inégalités établies plus haut,

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha^{(N)}(x)| < \beta \qquad (N > N_1(\beta)). \tag{11.3}$$

Nous allons maintenant, dans les numéros qui suivent, démontrer que les fonctions $f_\alpha(x)$ sont différentiables dans $\bar{I}_0$ et qu'elles vérifient le système de Pfaff.

12. Expression de la différence des coordonnées de deux sommets d'une variété polyédrique. Soient deux points $p'(x')$, $p''(x'')$ dans X_n, qui projettent les points P', P'' de la variété $V^{(N)}$, de la suite considérée plus haut et soient

$$z_\alpha'^{(N)} = f_\alpha^{(N)}(x_i'), \qquad z_\alpha''^{(N)} = f_\alpha^{(N)}(x_i'')$$

les coordonnées z_α de ces points. Soient encore les simplexes Σ_N', Σ_N'' qui contiennent ces points, et $P'_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}, P''_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n''}$ les sommets resp. de Σ_N', Σ_N''.

Considérons maintenant les quantités

$$\Delta^* z_\alpha = z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')}$$

et remarquons qu'on peut écrire

$$\Delta^* z_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^* z_\alpha$$

où

$$\Delta_i^* z_\alpha = z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\kappa_i''\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n')} - z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\kappa_i'\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n')}$$

et où les z_α, à indices supérieurs ont la signification de coordonnées de sommets, qu'on leur a donnée partout dans ce qui précède. Nous supposons que, pour tous les i,

$$\kappa_i'\kappa_i'' \geqq 0.$$

On a encore

$$\Delta_i^* z_\alpha = \sum_{\rho = \kappa_i' + (\tau_i - 1)/2}^{\kappa_i'' - (\tau_i + 1)/2} \Delta_{i\rho}^* z_\alpha, \quad \tau_i = \operatorname{sgn}(\kappa_i'' - \kappa_i'),$$

où

$$\Delta^*_{i\rho} z_\alpha = z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}'',\rho+\tau_i,\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n')} - z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\rho\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n')}.$$

Alors, d'après (9.5),

$$(12.1)\qquad \Delta^*_{i\rho} z_\alpha = \tau_i h a_{\alpha i}(P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\nu\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n'}) + \chi_{\alpha i\rho},\quad \nu = \rho + \frac{\tau_i - \sigma_i}{2},$$

avec

$$(12.2)\qquad \chi_{\alpha i\rho} = \tau_i h\,\chi_{\alpha i}(P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}'',\rho+\tau_i,\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n'},\ P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\rho\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n'}).$$

Cela étant, on a

$$(12.3)\qquad \Delta^*_i z_\alpha = h\tau_i \sum_{\rho=\kappa_i'+(\tau_i-1/2}^{\kappa_i''-(\tau_i+1)/2} a_{\alpha i}(P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\rho\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n'}) + \xi_{\alpha i},$$

avec

$$(12.4)\qquad \xi_{\alpha i} = \sum_{\rho=\kappa_i'+(\tau_i-1)/2}^{\kappa_i''-(\tau_i+1)/2} \chi_{\alpha i\rho}.$$

En posant

$$(12.5)\qquad a_{\alpha i}(P_{\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_{i-1}''\rho\kappa_{i+1}'\ldots\kappa_n'}) - a_{\alpha i}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}) = \phi_{\rho\alpha i},$$

on peut encore écrire

$$(12.6)\quad \Delta^*_i z_\alpha = (x_i^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - x_i^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')}) a_{\alpha i}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'}) + \sum_{\rho=\kappa_i'+(\tau_i-1)/2}^{\kappa_i''-(\tau_i+1)/2} \phi_{\rho\alpha i}\tau_i h + \xi_{\alpha i}.$$

En posant encore

$$(12.7)\qquad x_i^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - x_i^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} = \Delta^* x_i,$$

on aura

$$(12.8)\quad \Delta^* z_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(P_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n'})\Delta^* x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\rho=\kappa_i'+(\tau_i-1)/2}^{k''-(\tau_i+1)/2} \phi_{\rho\alpha i}\tau_i h + \sum_{i=1}^{n} \xi_{\alpha i}.$$

13. Sur les différences des coordonnées des points P', P''. En partant de l'équation des plans des facettes simpliciales de $V^{(N)}$, on peut écrire

$$z_\alpha' - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}'^*(x_i' - x_i^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')}),$$

$$z_\alpha'' - z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}''^*(x_i'' - x_i^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')}),$$

où les coefficients $a_{\alpha i}'^*, a_{\alpha i}''^*$ ont été établis dans le numéro 8. On aura encore

$$(13.1)\qquad \Delta z_\alpha = z_\alpha'' - z_\alpha' = z_\alpha^{(\kappa_1''\kappa_2''\ldots\kappa_n'')} - z_\alpha^{(\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_n')} + \psi_\alpha,$$

avec

$$\psi_\alpha = \sum_{i=1}^{n} [a''^*_{\alpha i}(x''_i - x_i^{(\kappa''_1\kappa''_2\dots\kappa''_n)}) - a'^*_{\alpha i}(x'_i - x_i^{(\kappa'_1\kappa'_2\dots\kappa'_n)})]. \tag{13.2}$$

Remarquons encore que, dans (12.8), on peut remplacer les coefficients a par leurs valeurs au point P',

$$a_{\alpha i}(P_{\kappa'_1\kappa'_2\dots\kappa'_n}) = a_{\alpha i}(P') + \delta_{\alpha i} \tag{13.3}$$

et les différences $\Delta^* x_i$, de (12.7), par

$$\Delta^* x_i = \Delta x_i + d_i, \qquad \Delta x_i = x''_i - x'_i, \tag{13.4}$$

avec

$$d_i = (x_i^{(\kappa''_1\kappa''_2\dots\kappa''_n)} - x''_i) - (x_i^{(\kappa'_1\kappa'_2\dots\kappa'_n)} - x'_i).$$

On déduit ainsi, de (12.8),

$$\Delta^* z_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(P')\Delta x_i + R_\alpha, \tag{13.5}$$

où R_α (qui sera appelé "le reste") a l'expression

$$R_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(P')d_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_{\alpha i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_{\alpha i} d_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\rho=\kappa'_i+(\tau_i-1)/2}^{\kappa''_i-(\tau_i+1)/2} \phi_{\rho\alpha i}\tau_i h + \sum_{i=1}^{n} \xi_{\alpha i}. \tag{13.6}$$

14. Évaluation du reste. Les points P'' et $P_{\kappa''_1\kappa''_2\dots\kappa''_n}$ sont sur la même facette et il en est de même pour P' et $P_{\kappa'_1\kappa'_2\dots\kappa'_n}$. On a donc évidemment

$$|d_i| < 2h = \frac{2a}{N} \tag{14.1}$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(P')|d_i| < 2nA\frac{a}{n}. \tag{14.2}$$

Vu la continuité uniforme des $a_{\alpha i}$, on en conclut, pour la même raison, que, étant donné un nombre positif δ, si N est assez grand, on a

$$|\delta_{\alpha i}| < \delta \tag{14.3}$$

et par suite

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \delta_{\alpha i}\Delta x_i\right| < \delta \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| \tag{14.4}$$

et, en tenant compte de (14.1),

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \delta_{\alpha i} d_i\right| < \frac{2na\delta}{N}. \tag{14.5}$$

En tenant de nouveau compte de la continuité uniforme des coefficients $a_{\alpha i}$, on voit que l'on peut faire en sorte que

$$|\phi_{\rho\alpha i}| < \zeta,$$

ζ étant un positif quelconque. Il faudrait, pour cela (voir (12.5)) que toutes les distances $P_{\kappa_1''\kappa_2''\dots\kappa_{i-1}''\rho\kappa_i'\dots\kappa_n'}P_{\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n'}$ fussent plus petites qu'une certaine quantité $(\zeta_1(\zeta))$. Pour arriver à cette fin, on voit, en tenant compte de (11.1), qu'il suffit que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(\kappa_1''\kappa_2''\dots\kappa_n'')} - x_i^{(\kappa_1'\kappa_2'\dots\kappa_n')}\right|\right)^2 < \frac{\zeta_1(\zeta)}{sA^{*2}+1}$$

ou bien

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\Delta^* x_i|\right)^2 < \frac{\zeta_1(\zeta)}{sA^{*2}+1}, \tag{14.6}$$

ce qui, en tenant compte de (13.4) et (14.1), est réalisé, si

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| < \sqrt{\frac{\zeta_1(\zeta)}{sA^{*2}+1}} - \frac{2an}{N}. \tag{14.7}$$

On aura donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\rho=\kappa_i'+(\tau_i-1)/2}^{\kappa_i''-(\tau_i+1)/2}\phi_{\rho\alpha i}\tau_i h < \zeta\sum_{i=1}^{n}|\Delta^* x_i| = \zeta\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| + \zeta\sum_{i=1}^{n}|d_i|,$$

ou bien

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\rho=\kappa_i'-(\tau_i-1)/2}^{\kappa_i''-(\tau_i+1)/2}\phi_{\rho\alpha i}\tau_i h\right| < \zeta\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| + \frac{2n\zeta a}{N}. \tag{14.8}$$

Enfin, pour le dernier terme, il nous faut partir des expressions (12.2) et (9.6) de $\chi_{\alpha\rho i}$. D'après ce que nous avons établi au numéro 9, on aura (9.2) et, par suite de (9.6),

$$|\chi_{\alpha j}| < nNh\varepsilon = na\varepsilon.$$

Par suite de (12.4), on aura donc

$$|\xi_{\alpha i}| \leqq |\kappa_i'' - \kappa_i'|na\varepsilon h = na\varepsilon|\Delta^* x_i| < na\varepsilon|\Delta x_i| + \frac{2a^2 n\varepsilon}{N}$$

et enfin

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_{\alpha i}\right| < na\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| + \frac{2a^2n^2\varepsilon}{N}. \tag{14.9}$$

En rassemblant tous ces résultats, on trouve pour le reste

$$\begin{aligned}|R_\alpha| < \frac{2anA}{N} + \delta\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| + \frac{2an\delta}{N} + \zeta\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| + \frac{2n\zeta a}{N}\\ + na\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| + \frac{2a^2n^2\varepsilon}{N}.\end{aligned} \tag{14.10}$$

15. PASSAGE AUX FONCTIONS $f_\alpha(x)$. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I. Pour les différences $f_\alpha(x'') - f_\alpha(x')$ des valeurs des fonctions limites, aux points p'', p', on a

$$Dz_\alpha = f_\alpha(x'') - f_\alpha(x') = f_\alpha^{(N)}(x'') - f_\alpha^{(N)}(x') + k''_N - k'_N,$$

où nous avons posé

$$k''_N = f_\alpha(x'') - f_\alpha^{(N)}(x''), \quad k'_N = f_\alpha(x') - f_\alpha^{(N)}(x').$$

On peut encore écrire

$$Dz_\alpha = \Delta z_\alpha + k''_N - k'_N.$$

D'autre part on a

$$a_{\alpha i}(P') = a_{\alpha i}(Q'_i) + l_{\alpha i},$$

où nous avons désigné par Q_i' le point de la variété limite V, de coordonnées

$$x'_i, \; f_\alpha(x').$$

Si N croît indéfiniment, les quantitiés $l_{\alpha i}$ tendent uniformément vers zéro et il en est de même des k''_N, k'_N. On voit encore que, dans le second membre de (14.10), δ tend aussi vers zéro, et que le terme

$$na\varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|$$

peut aussi être pris aussi petit que l'on veut. On en conclut donc

$$|f_\alpha(x'') - f_\alpha(x') - \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(x', f(x'))(x''_i - x'_i)| < \zeta \sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| + \mu,$$

où μ peut être fait aussi petit que l'on veut. Il est clair, d'après la manière dont nous avons défini ζ, qu'on en tire la conclusion de notre théorème

$$df_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i}(x, f)(x) dx_i.$$

3. **Applications du Théorème I. Compléments.**

16. CAS OÙ EST ASSURÉE L'UNICITÉ DE L'INTÉGRALE PASSANT PAR UN POINT. PROLONGEMENT DE L'INTÉGRALE. De la manière dont nous avons construit plus haut la variété intégrale, il suit immédiatement le

THÉORÈME II. *Dans les hypothèses du Théorème* I, *si, pour chaque* i, *le système d'équations différentielles* (*qu'on obtient du système* (S) *en y considérant les variables* $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ *comme des paramètres* $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \cdots$, $x_{i-1} = x_{i-1}^0, x_{i+1} = x_{i+1}^0, \cdots, x_n = x_n^0$),

$$\frac{dz_\alpha}{dx_i} = a_{\alpha i}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0, z_1, z_2, \cdots, z_s)$$

admet une solution unique par chaque point

$$x_i = x_i^0, \; z_\alpha = z_\alpha^0,$$

dans D, alors il existe par chaque point $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, z_1^0, \cdots, z_s^0$ *une solution unique du système* (S) *et elle peut être obtenue par la méthode décrite plus haut.*

On arrive encore facilement à un prolongement de la solution. Considérons un point K_0 de la variété intégrale V construite plus haut, situé sur la frontière de I_0. À partir de ce point, on peut construire, comme nous l'avons fait plus haut, une nouvelle variété intégrale V', dans un domaine I_1, analogue à I_0 et ayant K_0 pour centre. Si nous nous plaçons dans les hypothèses des Théorèmes I et II, alors, le long de la frontière commune, les variétés V et V' se raccordent selon une variété à $n-1$ dimensions et ont même plan tangent, le long de cette variété.

THÉORÈME III. *Dans les hypothèses des Théorèmes* I *et* II, *il y a, à partir de chaque point de la frontière de* I_0, *un prolongement de l'intégrale* V *dans un autre parallélipipède* I_1 *et ce prolongement forme, avec* V, *une intégrale dans la somme des domaines* $I_0 + I_1$.

17. CAS DES COEFFICIENTS $a_{\alpha i}$ DÉRIVABLES. Supposons maintenant que chaque fonction $a_{\alpha i}$ ait des dérivées continues par rapport à $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n, z_1, z_2, \cdots, z_s$.

Dans ce cas, en posant

(17.1)
$$S^*_{\alpha\beta kl} = \left[\left(\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial x_k}\right)_{P_k^*} + \sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta}\right)_{P_k^*}\frac{z_\beta^{(k)} - z_\beta^0}{h}\right] - \left[\left(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_l}\right)_{P_l^*} + \sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta}\right)_{P_l^*}\frac{z_\beta^{(l)} - z_\beta^0}{h}\right].$$

où les dérivées sont considérées dans un point P_k^* du segment P_0P_k resp. dans un point P_l^* du segment P_0P_l, la condition (2.2) peut s'écrire

$$|S^*_{\alpha\beta kl}| < \varepsilon. \tag{17.2}$$

Il nous faut maintenant tenir compte de (5.1) et de (5.2), avec la condition (4.2). Il en résulte les conditions d'intégrabilité bien connues

$$S_{\alpha\beta kl} = \frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial x_k} + \sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta}a_{\beta k} - \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_l} - \sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta}a_{\beta l} = 0, \tag{17.3}$$

qui doivent être vérifiées en chaque point.

Réciproquement, supposons (17.3) vérifiées. Posons

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial x_k}\right)_{P_k^*} - \left(\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial x_k}\right)_{P_0} = \Delta\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial x_k}, \qquad \left(\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta}\right)_{P_k^*} - \left(\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta}\right)_{P_0} = \Delta\frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta},$$

$$\left(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_l}\right)_{P_l^*} - \left(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_l}\right)_{P_0} = \Delta\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_l}, \qquad \left(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta}\right)_{P_l^*} - \left(\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta}\right)_{P_0} = \Delta\frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta},$$

$$\frac{z_\beta^{(k)} - z_\beta^0}{h} - a_{\beta k}(P_0) = D_{\beta k}, \qquad \frac{z_\beta^{(l)} - z_\beta^0}{h} - a_{\beta l}(P_0) = D_{\beta l}.$$

Alors on déduit de (17.1) et (17.3)

$$S^{*}_{\alpha\beta kl} - S_{\alpha\beta kl} = \Delta \frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial x_k} - \Delta \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial x_l} - \sum_{\beta=1}^{s} \Delta \frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta} a_{\beta k}(P_0) - \sum_{\beta=1}^{s} \Delta \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta} a_{\beta l}(P_0)$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{s} \Delta \frac{\partial a_{\alpha l}}{\partial z_\beta} D_{\beta k} - \sum_{\beta=1}^{s} \Delta \frac{\partial a_{\alpha k}}{\partial z_\beta} D_{\beta l}.$$

Vu la continuité des dérivées des coefficients $a_{\alpha i}$, on en déduit que l'hypothèse H est vérifiée.

Bibliographie

1. L. Bruwier, *Sur les équations aux différentielles totales*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **8** (1939), no. 2, 105–116.

2. C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, pp. 26–30, Teubner, Leipzig, 1935.

3. A. Haimovici, *Sur la notion d'intégrabilité complète et sur un système complètement intégrable*, An. Şti. Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi Sect. I (S. N.) **6** (1960), 29–46.

4. A. Mayer, *Über unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen*, Math. Ann. **5** (1872), 448–470.

5. W. Nikliborc, *Sur les équations linéaires aux différentielles totales*, Studia Math. **1** (1929), 41–49.

6. D. Petrovanu, *Asupra prelungirii solutiilor sistemelor Pfaff complet integrabile şi a comportării lor asimptotice*, Stud. Cerc. Şti. Iaşi-Math. **12** (1961), 1–12. (En roumain)

7. ———, *Asupra unei theoreme de existenta a integralei unui sistem Pfaff complet integrabil*, Com. Acad. R. P. Romîne. (sous presse, en roumain)

8. B. Segre, *Sul differenziale delle forme esterne di classe zero*, Rend. Sem. Mat. Messina **1** (1955), 1–9.

9. S. L. Sobolev, *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle en physique mathématique*, Moscow, 1950. (En russe)

10. T. Y. Thomas, *Systems of total differential equations defined over simply connected domains*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), 730–734.

ACADEMIA R.P.R. FILIALA IASI,
IASI, ROUMANIA