

## MODÈLE MINIMAL ÉQUIVARIANT ET FORMALITÉ

THIERRY LAMBRE

**ABSTRACT.** We study the rational equivariant homotopy type of a topological space  $X$  equipped with an action of the group of integers modulo  $n$ .

For  $n = p^k$  ( $p$  prime,  $k$  a positive integer), we build an algebraic model which gives the rational equivariant homotopy type of  $X$ . The homotopical fixed-point set appears in the construction of a model of the fixed-points set. In general, this model is different from G. Triantafillou's model [T1].

For  $n = p$  ( $p$  prime), we then give a notion of equivariant formality. We prove that this notion is equivalent to the formalizability of the inclusion of fixed-points set  $i: X^{\mathbb{Z}_p} \rightarrow X$ . Examples and counterexamples of  $\mathbb{Z}_p$ -formal spaces are given.

### 1. INTRODUCTION

$G$  désigne un groupe fini. **Top** est la catégorie des ensembles simpliciaux 2-réduits, à nombres de Betti finis. Pour un ensemble  $X$  muni d'une action simpliciale du groupe  $G$ ,  $X^H$  désigne l'ensemble des points de  $X$  fixés par le sous-groupe  $H$  de  $G$ .

Un  $G$ -espace est un ensemble  $X$  muni d'une action de  $G$  telle que  $X^H \neq \emptyset$  et  $X^H \in \mathbf{Top}$  pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ . Une  $G$ -application  $\varphi: X \rightarrow Y$  est une application simpliciale et équivariante;  $\varphi$  détermine  $\varphi^H: X^H \rightarrow Y^H$ .

Deux  $G$ -espaces  $X$  et  $Y$  ont le même  $G$ -type d'homotopie s'il existe un couple de  $G$ -applications  $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\lambda} X$  tel que  $\varphi \circ \lambda \sim_G \text{id}_Y$  et  $\lambda \circ \varphi \sim_G \text{id}_X$ . ( $\sim_G$  signifie que les homotopies sont elles-mêmes des  $G$ -applications.)

Depuis G. Bredon, on sait que l'étude du  $G$ -type d'homotopie des  $G$ -espaces nécessite l'introduction des espaces de points fixes pour tous les sous-groupes de  $G$ ; en effet:

**Théorème** [B, II.12]. *Soit  $\varphi: X \rightarrow Y$  une  $G$ -application entre les  $G$ -espaces  $X$  et  $Y$ ;  $\varphi$  est une  $G$ -équivalence d'homotopie si et seulement si, pour tout  $q \geq 2$ , pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ ,  $\pi_q(\varphi^H): \pi_q(X^H) \rightarrow \pi_q(Y^H)$  est un isomorphisme.*

---

Received by the editors August 8, 1989.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 57S17, 55Q91, 55P10.

*Key words and phrases.*  $G$ -space, differential algebra, minimal model.

Pour passer aux classes rationnelles, G. Triantafillou a posé:

**Définition** [T1, 1.1]. Une  $G$ -application  $\varphi: X \rightarrow Y$  est une  $G$ -équivalence d'homotopie rationnelle si  $H^*(\varphi^H; \mathbb{Q})$  est un isomorphisme pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ .

**Définition** [T1, 1.2]. Les  $G$ -espaces  $X$  et  $Y$  ont le même  $G$ -type d'homotopie rationnelle s'il existe une chaîne de  $G$ -équivalences d'homotopie rationnelle reliant  $X$  à  $Y$ .

Ce cadre lui a permis de construire un modèle minimal équivariant fournissant le  $G$ -type d'homotopie rationnelle du  $G$ -espace  $X$  en procédant par analogie avec la construction de Sullivan [Su].

Le but de cet article est de construire, dans le cas particulier où  $G$  est le groupe  $\mathbb{Z}_{p^k}$  des entiers modulo  $p^k$  ( $p$  premier,  $k$  entier non nul), un autre modèle minimal équivariant, appelé ici modèle minimal cofibrant, décrivant le  $\mathbb{Z}_{p^k}$ -type d'homotopie rationnelle des  $\mathbb{Z}_{p^k}$ -espaces, et permettant, pour  $k = 1$ , d'étudier la notion de formalité équivariante.

Ce texte s'organise ainsi:

Le paragraphe 2 expose les résultats concernant la théorie équivariante "classique", c'est-à-dire en négligeant tous les espaces de points fixes  $X^H$  pour  $H \neq \{e\}$ . Nous nous plaçons dans la catégorie  $G$ -ADGC; les objets sont les  $\mathbb{Q}$ -algèbres différentielles graduées commutatives (en abrégé adgc) cohomologiquement 0-connexes et 1-connexes  $(A, d_A)$  munies d'un morphisme de groupe  $\phi_A: G \rightarrow \text{Aut}_{\text{ADGC}}(A, d_A)$ ; les flèches sont les morphismes équivariants d'adgc. (Si le morphisme de groupe  $\phi_A$  est égal à  $id$ , on retrouve la catégorie ADGC.)

Nous rappelons la construction d'un  $G$ -modèle minimal. Dans la catégorie  $G$ -ADGC, les  $G$ -homotopies se construisent à partir de  $G$ -KS-complexes (voir Définition 2.1); nous établissons le:

**Théorème 2.6.** Soient  $f$  et  $g$  deux  $G$ -morphisms d'adgc, de source le  $G$ -KS-complexe  $(\wedge V, d)$ , de but la  $G$ -adgc  $(B, d_B)$ ; les propositions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $f \sim g$ ;
- (2)  $f \sim_G g$ .

Ce résultat montre la différence de comportement entre les catégories  $G$ -Top et  $G$ -ADGC (cf. 2.9).

Dans le paragraphe 3, nous construisons pour  $G = \mathbb{Z}_{p^k}$  un modèle minimal cofibrant; sa particularité réside dans le fait que les points fixes homotopiques servent de fondation à la construction du modèle des points fixes. La preuve s'effectue par récurrence sur les sous-groupes de  $\mathbb{Z}_{p^k}$ .

Introduisons les outils nécessaires à ce cadre:  $\mathcal{O}_G$  est la catégorie dont les objets sont les espaces homogènes  $G/H$  et dont les flèches sont les  $G$ -applications entre ces objets.  $\mathbb{Q}$ -EV est la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels. Un  $\mathcal{O}_G$ -espace vectoriel est un foncteur covariant de source  $\mathcal{O}_G$ , de but  $\mathbb{Q}$ -EV; une  $\mathcal{O}_G$ -adgc est

un foncteur covariant de source  $\mathcal{O}_G$ , de but **ADGC**. Par exemple, désignons par  $A_{\text{PL}}$  le foncteur formes PL de Sullivan [Su]; la  $\mathcal{O}_G$ -adgc de de Rham  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$  est définie par:

$$\underline{A}_{\text{PL}}(X)(G/H) = A_{\text{PL}}(X^H).$$

Un modèle équivariant d'une  $\mathcal{O}_G$ -adgc  $\underline{A}$  est un couple  $(\underline{M}, \underline{\rho})$ , où  $\underline{M}$  est une  $\mathcal{O}_G$ -adgc telle que  $\underline{M}(G/H)$  soit une adgc, libre en tant qu'algèbre graduée commutative (en abrégé agc), et  $\underline{\rho}: \underline{M} \rightarrow \underline{A}$  une transformation naturelle de foncteurs telle que  $H^*(\underline{\rho}(G/H)): H^*(\underline{M}(G/H)) \rightarrow H^*(\underline{A}(G/H))$  soit un isomorphisme d'agc pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$ . Un modèle équivariant du  $G$ -espace  $X$  est un modèle équivariant de  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$ .

Les  $\mathcal{O}_G$ -espaces vectoriels constituent une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs [B]. Le modèle minimal construit par G. Triantafillou en [T1] est un modèle injectif d'une  $\mathcal{O}_G$ -adgc injective. Nous avons:

**Théorème 3.6.** *Pour  $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ , toute  $\mathcal{O}_G$ -adgc  $\underline{A}$  admet un modèle  $(\underline{K}, \rho)$ , où  $\underline{K}$  est un modèle équivariant cofibrant. Ce modèle est unique à isomorphisme près.*

Dans le paragraphe 4, nous étudions la formalité équivariante des  $\mathbb{Z}_p$ -espaces. Introduite par la théorie du modèle minimal [Su], la formalité d'un espace rationnel signifie que toute la structure homotopique de cet espace est contenue dans la donnée de son algèbre de cohomologie  $H^*(X; \mathbb{Q})$ ; une application  $\varphi: X \rightarrow Y$  entre les espaces formels  $X$  et  $Y$  est formalisable si  $\varphi$  et  $H^*(\varphi; \mathbb{Q})$  ont un modèle de Sullivan en commun. Dans le cadre équivariant, on pose:

**Définition.** Le  $\mathbb{Z}_p$ -espace  $X$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formel si  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$  et  $\underline{H}^*(X; \mathbb{Q})$  ont un modèle minimal cofibrant en commun.

Nous montrons:

**Théorème 4.4.** *Le  $\mathbb{Z}_p$ -espace  $X$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formel si et seulement si l'injection de l'ensemble des point fixes  $i: X^{\mathbb{Z}_p} \rightarrow X$  est une application formalisable.*

Une propriété utilisant un caractère équivariant se réduit donc à une propriété n'utilisant pas de caractère équivariant.

Une sphère  $S^n$  munie d'une action du groupe  $\mathbb{Z}_p$  est toujours un espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel; une variété kählérienne compacte sur laquelle le groupe  $\mathbb{Z}_p$  agit de manière holomorphe est un espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel. D'autres exemples sont proposés à la fin du paragraphe 4.

Cet article expose les résultats réunis dans ma thèse réalisée sous la direction de D. Tanré, à qui j'exprime ma sincère gratitude; je remercie Y. Félix et S. Halperin pour les fructueuses conversations qu'ils m'ont accordées ainsi que le *referee* pour ses remarques qui ont contribué à clarifier ce texte.

## 2. $G$ -HOMOTOPIE DANS ADGC

**2.1. Définition.** Soit  $f: (B, d_B) \rightarrow (A, d_A)$  un  $G$ -morphisme d'adgc entre les  $G$ -adgc  $(B, d_B)$  et  $(A, d_A)$ . Le diagramme commutatif ci-dessous de

la catégorie  $G\text{-ADGC}$  est un  $G$ -modèle (minimal) de  $f$  si  $(\wedge V, d)$  est une  $G\text{-adgc}$ , libre et engendrée par le  $G$ -espace vectoriel gradué  $V$ , si toutes les flèches sont des  $G$ -morphisms d'adgc, si  $(\mathcal{E})$  est une KS-extension (minimale) au sens de [H] et si  $\varphi$  induit un isomorphisme en cohomologie:

$$(E) \quad \begin{array}{ccccc} & & & (A, d_A) & \\ & & \nearrow f & \uparrow \varphi & \\ (B, d_B) & \xrightarrow{i} & (B \otimes \wedge V, d) & \xrightarrow{\rho} & (\wedge V, \bar{d}) \end{array}$$

Par la suite, nous dirons pour abrégé que  $(\mathcal{E})$  est une  $G\text{-KS}$ -extension (minimale).

Lorsque  $\varphi$  est un morphisme d'adgc, on désigne par  $\varphi^*$  l'application induite en homologie; si  $\varphi^*$  est un isomorphisme, on dit que  $\varphi$  est un équivalence faible.

**2.2.** Si  $(B, d_B) = \mathbb{Q}$ , le diagramme ci-dessus s'appelle un  $G$ -modèle (minimal) de Sullivan de  $(A, d_A)$  et  $(\wedge V, d)$  un  $G\text{-KS}$ -complexe (minimal).

*Notations.*  $V_\alpha$  désigne l'espace vectoriel des indécomposables de degré  $\alpha$ :  $V_{\leq \alpha} = V_{< \alpha} \oplus V_\alpha$ ; la condition KS sur la différentielle  $d$  s'écrit: pour tout  $v \in V_{\leq \alpha}$ ,  $dv \in \wedge(V_{< \alpha})$ . Enfin, l'ordre de la KS-base est choisi tel que  $GV_\alpha \subset V_\alpha$ .

**2.3.** Dans  $G\text{-ADGC}$ , tout  $G$ -morphisme de  $G\text{-adgc}$  admet un  $G$ -modèle minimal. Ce résultat se trouve dans [GHVP]. Pour de plus énoncer un théorème d'unicité du  $G$ -modèle minimal, il faut une théorie de l'homotopie équivariante dans la catégorie  $G\text{-ADGC}$ ; cette théorie se construit sans difficulté (voir 2.4 et 2.5). Le  $G$ -modèle minimal satisfait à des propriétés d'unicité analogues à celles du cas classique [H, 6.2 et 6.3]. Des preuves détaillées se trouvent en [L] et en [G].

Nous allons considérer des homotopies de deux types: équivariantes et relatives. Nous précisons pour cela les cylindres utilisés.

**2.4. Sur les homotopies équivariantes.**  $V$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué muni d'une action de  $G$ . L'application  $s: V \rightarrow sV$  est l'isomorphisme de degré  $-1$  défini par  $(sV)^n = V^{n+1}$ ;  $I(V)$  est le  $G$ -espace vectoriel gradué  $V \oplus sV \oplus DsV$ ; l'action de  $G$  sur  $I(V)$  est  $t(sv) = s(tv)$ ,  $t(Dsv) = Ds(tv)$  pour  $t \in G$  et  $v \in V$ . Si  $(\wedge V, d)$  est un  $G\text{-KS}$ -complexe, le cylindre de base  $(\wedge V, d)$  est  $I(\wedge V, d) = (\wedge I(V), D)$ , où  $D$  est définie par  $D(v) = dv$ ,  $D(sv) = Dsv$ ,  $D(Dsv) = 0$ . La  $G$ -dérivation  $i$  de degré  $-1$  est définie sur  $I(\wedge V, d)$  par  $i(v) = sv$ ,  $i(sv) = i(Dsv) = 0$ ; la  $G$ -dérivation  $\theta = iD + Di$  est de degré 0 et commute à  $D$ ; les applications  $\lambda_j: (\wedge V, d) \rightarrow I(\wedge V, d)$  ( $j = 0, 1$ ) sont respectivement l'inclusion canonique et l'application  $\exp \theta \circ \lambda_0$ , c'est-à-dire

$$\lambda_1(v) = \lambda_0(v) + \sum_{n \geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v).$$

La relation d'homotopie obtenue de cette façon s'appelle  $G$ -homotopie et est notée  $f \sim_G g$ ; nous la noterons parfois  $f \sim_G g$ . La notion usuelle d'homotopie dans ADGC correspond au cas où toutes les actions sont triviales; on écrit alors  $f \sim g$ .

**2.5. Sur les homotopies relatives.** Nous n'allons utiliser que des homotopies relatives d'un type particulier; pour la notion générale d'homotopie relative, nous renvoyons le lecteur à [H, 5]. Le cylindre relatif  $I((\wedge V, \wedge V_{<n}), d)$  est le  $G$ -KS-complexe dont un système de générateurs est  $V \oplus s(V_{\geq n}) \oplus Ds(V_{\geq n})$ ;  $\bar{D}$  est défini par  $\bar{D}(v) = dv$  pour  $v \in V$ ,  $\bar{D}(sv) = Dsv$ ,  $\bar{D}(Dsv) = 0$  pour  $v \in V_{\geq n}$ . La  $G$ -dérivation  $\bar{i}$  de degré  $-1$  est définie par  $\bar{i}(V_{<n} \oplus s(V_{\geq n}) \oplus Ds(V_{\geq n})) = 0$  et  $\bar{i}(v) = sv$  pour  $v \in V_{\geq n}$ . Les applications  $\bar{\theta}, \bar{\lambda}_j$  ( $j = 0, 1$ ) sont définies de manière analogue au cas précédent. La notion d'homotopie obtenue s'appelle  $G$ -homotopie relative à  $\wedge V_{<n}$ ; elle est notée  $f \sim_G g$  (rel.  $\wedge V_{<n}$ ).

*Remarques.* (a) Pour  $w \in V_{<n}$ , on a  $\bar{\theta}^p(w) = 0$  dès que  $p \geq 1$  et donc  $\bar{\lambda}_1(w) = \bar{\lambda}_0(w)$ .

(b) Pour  $v \in V_n$ , on a  $\bar{\theta}^p(v) = 0$  pour  $p \geq 2$  et  $\bar{\theta}(v) = Dsv$ ; on en déduit  $\bar{\lambda}_1(v) = \bar{\lambda}_0(v) + Dsv$ .

La fin de ce paragraphe est consacrée au résultat suivant:

**2.6. Théorème.** Soient  $f$  et  $g$  deux  $G$ -morphisms d'adgc, de source le  $G$ -KS-complexe  $(\wedge V, d)$ , de but la  $G$ -adgc  $(B, d_B)$ ; les propositions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $f \sim g$ ;
- (2)  $f \sim_G g$ .

**2.6(1). Lemme.** Désignons par  $\mathcal{F}_\alpha$  l'idéal de  $I(\wedge V_{\leq \alpha}, d)$  engendré par  $\theta(V_{<\alpha})$ ; on a  $\theta^p(V_{\leq \alpha}) \subset \mathcal{F}_\alpha$  pour  $p \geq 2$ .

*Preuve.* Soit  $v \in V_{\leq \alpha}$ ; remarquons que  $\theta^2(v) = \theta(sdv)$ .  $J_q$  désigne le multi-indice  $(j_1, \dots, j_q)$ ;  $\theta(sdv)$  se calcule en décomposant  $dv$  en mots homogènes de longueur  $q$ :  $dv = \sum_{q \geq 1} d_q v$ , où  $d_q v = \sum_{J_q} w_{j_1} \cdots w_{j_q}$  et  $w_{j_k} \in V_{<\alpha}$ . Un mot homogène de longueur  $q$  ( $q \geq 1$ ) de  $sdv$  est une somme d'éléments du type  $s(w_1)w_2 \cdots w_q$  avec  $w_i \in V_{<\alpha}$ . Par ailleurs,  $\theta(sw) = 0$  pour  $w \in V_{<\alpha}$ .

De ceci, il résulte que  $\theta(sdv)$  admet une décomposition en mots homogènes de longueur  $q$  ( $q \geq 2$ ) du type  $s(w_1)\theta(w_2 \cdots w_q)$ .

$\theta^2(v) = \theta(sdv)$  s'écrit sous la forme  $\sum_r \theta(w_r)z_r$  avec  $w_r \in V_{<\alpha}$  et  $z_r \in I(\wedge V_{<\alpha})$ , ce qui montre que  $\theta^2(v)$  appartient à  $\mathcal{F}_\alpha$ .

Par récurrence sur  $p$ , on en déduit que  $\theta^p(v) \in \mathcal{F}_\alpha$  pour  $v \in V_{\leq \alpha}$  et  $p \geq 2$ .

**2.6(2). Lemme.** Soient  $g_0$  et  $g_1$  deux morphismes d'adgc, de source le KS-complexe  $(\wedge V, d)$ , de but l'adgc  $(B, d_B)$ ; on suppose que ces applications satisfont la relation  $g_0(w) = g_1(w)$  pour tout  $w \in V_{<\alpha}$  et qu'il existe une homotopie

$F: I(\wedge V, d) \rightarrow (B, d_B)$  de source  $g_0$ , de but  $g_1$ ; alors:

$$F\left(\sum_{n \geq 2} \frac{\theta^n}{n!}(v)\right) = 0, \quad \text{pour tout } v \in V_{\leq \alpha}.$$

*Preuve.* (1) Remarquons que, pour  $w \in V_{< \alpha}$ , la quantité  $F(\sum_{n \geq 1} \theta^n(w)/n!)$  est nulle; en effet,  $F \circ \lambda_1(v) = F \circ \lambda_0(v) + F(\sum_{n \geq 1} \theta^n(v)/n!)$ ; or  $F \circ \lambda_1$  et  $F \circ \lambda_0$  coïncident sur  $\wedge V_{< \alpha}$ .

(2) Montrons que pour  $w \in V_{< \alpha}$ , on a l'égalité  $F(\theta(w)) = 0$ ; la preuve se fait par récurrence; désignons par  $\alpha_0$  le plus petit élément de l'ensemble bien ordonné indexant la KS-base de  $(\wedge V, d)$ . Pour  $v \in V_{\alpha_0}$ , on a évidemment:

$$F(\theta(v)) = F\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(v)\right) = g_1(v) - g_0(v) = 0.$$

Soit  $\gamma < \alpha$  et supposons que pour tout  $w \in V_{< \gamma}$ ,  $F(\theta(w)) = 0$ . Désignons par  $u$  un élément de  $V_\gamma$ ; d'après le lemme 2.6(1), pour  $p \geq 2$  nous avons  $\theta^p(u) \in \mathcal{F}_\gamma$ , c'est-à-dire  $\theta^p(u) = \sum_r \theta(w_r)z_r$  avec  $w_r \in V_{< \gamma}$  et  $z_r \in I(\wedge(V_{< \gamma}), d)$ . Ceci nous donne, grâce à l'hypothèse de récurrence,  $F(\theta^p(u)) = F(\sum_r \theta(w_r)z_r) = 0$ .

(3) Désignons maintenant par  $v$  un élément de  $V_\alpha$ ; on a en vertu de ce qui précède et du lemme 2.6(1),

$$F\left(\sum_{n \geq 2} \frac{\theta^n}{n!}(v)\right) = F\left(\sum_r \theta(w_r)z_r\right) = 0.$$

**2.7.** Passons à la preuve du théorème 2.6. Supposons qu'il existe une famille  $(f_i)_{\alpha_0 \leq i \leq \alpha+1}$  de  $G$ -morphisms d'adgc de source  $(\wedge V, d)$ , de but  $(B, d_B)$  telle que:

- (i)  $f_{\alpha_0} = f$ ;
- (ii)  $f_i(v) = g(v)$  pour  $v \in V_{< i}$ ;
- (iii) il existe une  $G$ -homotopie  $F_i$ , relative à  $\wedge V_{< i}$ , de source  $f_i$ , de but  $f_{i+1}$ , pour  $\alpha_0 \leq i \leq \alpha$ .

Construisons des applications  $F_{\alpha+1}$  et  $f_{\alpha+2}$  satisfaisant ces conditions. Le  $G$ -morphisme  $K'_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} F_\beta$  est une  $G$ -homotopie de source  $f = f_{\alpha_0}$ , de but  $f_{\alpha+1}$ . Rappelons que, par hypothèse, il existe une homotopie  $F$  (non équivariante a priori) de source  $f$ , de but  $g$ ; désignons par  $K_\alpha$  l'homotopie composée à partir de  $F$  et de  $K'_\alpha$ , de source  $f_{\alpha+1}$ , de but  $g$ .

D'après le lemme 2.6(2), nous avons  $K_\alpha(\theta(v)) = 0$  pour  $v \in V_{< \alpha+1}$  et  $K_\alpha(\theta(v)) = K_\alpha(\sum_{n \geq 1} \theta^n(v)/n!)$  pour  $v \in V_{\alpha+1}$ .

Définissons le  $\bar{G}$ -morphisme d'adgc  $F_{\alpha+1}: I((\wedge V, \wedge V_{< \alpha+1}), d) \rightarrow (B, d_B)$

par  $F_{\alpha+1|V} = f_{\alpha+1}$ ,

$$F_{\alpha+1}(sv) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} K_{\alpha}(tsv) \quad \text{pour } v \in V_{\alpha+1},$$

$$F_{\alpha+1}(Dsv) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} K_{\alpha}(\theta tv) \quad \text{pour } v \in V_{\alpha+1},$$

$F_{\alpha+1} = 0$  sur les autres générateurs de  $I((\wedge V_{\alpha+1}, \wedge V), d)$ .

Soit  $f_{\alpha+2} = F_{\alpha+1} \circ \bar{\lambda}_1$ ; on a  $f_{\alpha+1} \sim_G f_{\alpha+2}$  (rel.  $\wedge V_{<\alpha+1}$ ) par construction.

Calculons  $f_{\alpha+2}(v)$  pour  $v \in V_{\leq \alpha+1}$ : Si  $v$  appartient à  $V_{<\alpha+1}$ , il est clair que  $f_{\alpha+2}(v) = f_{\alpha+1}(v)$  et donc  $f_{\alpha+2}(v) = g(v)$ . Si  $v$  appartient à  $V_{\alpha+1}$ , nous avons

$$\begin{aligned} f_{\alpha+2}(v) &= F_{\alpha+1} \circ \bar{\lambda}_1(v) = F_{\alpha+1}(v + Dsv) \\ &= f_{\alpha+1}(v) + \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} K_{\alpha}(\theta tv) \\ &= f_{\alpha+1}(v) + \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} K_{\alpha} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(tv) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} \left[ f_{\alpha+1}(tv) + K_{\alpha} \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\theta^n}{n!}(tv) \right) \right] \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} K_{\alpha} \circ \lambda_1(tv) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t^{-1} g(tv) \\ &= g(v). \end{aligned}$$

Considérons  $F' = \sum_{\alpha} F_{\alpha}$ ; parce que les homotopies sont relatives, cette somme est finie en chaque degré ( $F'(x) = \sum_{\alpha \leq |x|} F_{\alpha}(x)$ );  $F'$  est une  $G$ -homotopie de source  $f$ , de but  $g$ .  $\square$

**2.8. Remarque.** Le théorème 2.6 possède le cousin suivant: **LDG** est la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -algèbres de Lie différentielles graduées 1-réduites, de type fini et **ADG** est la catégorie des algèbres associatives différentielles graduées.  $\mathcal{U}$  est le foncteur algèbre enveloppante de source **LDG**, de but **ADG**.

**Théorème [AL].** Deux morphismes  $f_0$  et  $f_1$  de **LDG** sont homotopes dans **LDG** si et seulement si les morphismes  $\mathcal{U}(f_0)$  et  $\mathcal{U}(f_1)$  sont homotopes dans **ADG**.

L'analogie est la suivante: l'homotopie peut se lire en oubliant une structure. Dans notre cas, une homotopie est suffisante (au lieu d'une homotopie équivariante); dans [AL], une homotopie d'algèbres suffit (au lieu d'une homotopie d'algèbres de Hopf).

**Interprétation géométrique du théorème 2.6.**

**2.9.** Dans la catégorie **Top**, un énoncé analogue au théorème 2.6 est faux: Soient, par exemple,  $X = (\mathbb{S}^1, *)$  identifié à l'équateur de  $Y = (\mathbb{S}^2, *)$ ; munissons  $Y$

de l'action de  $\mathbb{Z}_2$  définie par la symétrie par rapport au plan équatorial. Les applications  $\varphi_i: X \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) définies par  $\varphi_0(x) = *$  et  $\varphi_1(x) = x$  satisfont  $\varphi_0 \sim \varphi_1$  et  $\varphi_0 \simeq_{\mathbb{Z}_2} \varphi_1$ .

**2.10.** Si  $X$  est un  $G$ -espace,  $A_{\text{PL}}(X)$  est une  $G$ -adgc. Un  $G$ -modèle minimal de  $X$  est un  $G$ -modèle minimal de la  $G$ -adgc  $A_{\text{PL}}(X)$ . La catégorie  $G$ -ADGC s'avérera insuffisante pour obtenir le  $G$ -type d'homotopie rationnelle de l'espace  $X$ ; c'est pourquoi dans les paragraphes suivants, nous introduirons la catégorie  $\mathcal{O}_G$ -ADGC.

**2.11.** Soit  $f: (B, d_B) \rightarrow (A, d_A)$  un  $G$ -morphisme d'adgc. Un  $G$ -modèle de Sullivan de  $f$  est un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} (B, d_B) & \xrightarrow{f} & (A, d_A) \\ \uparrow \rho & & \uparrow \rho' \\ (\wedge V, d) & \xrightarrow{\hat{f}} & (\wedge V', d') \end{array}$$

où  $((\wedge V, d), \rho)$  est un  $G$ -modèle de  $(B, d_B)$ ,  $((\wedge V', d'), \rho')$  est un  $G$ -modèle de  $(A, d_A)$ , et  $\hat{f}$  est un  $G$ -morphisme d'adgc satisfaisant  $\rho' \circ \hat{f} \sim_G f \circ \rho$ . Remarquons que l'on peut choisir le  $G$ -modèle  $((\wedge V, d), \rho)$  de sorte que le morphisme  $\hat{f}$  soit surjectif.

On a vu en 2.9 qu'un énoncé analogue au théorème 2.6 est faux dans **Top**. Sa traduction exacte est:

**2.12. Proposition.** Soient  $X$  et  $Y$  deux  $G$ -espaces,  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  deux  $G$ -applications de source  $X$ , de but  $Y$ ; on suppose que  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont homotopes. Alors, il existe des  $G$ -espaces  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$ , des  $G$ -applications  $\bar{\varphi}_0$  et  $\bar{\varphi}_1$  de source  $\bar{X}$ , de but  $\bar{Y}$  et satisfaisant les propriétés suivantes:

- (1)  $\bar{X}$  (resp.  $\bar{Y}$ ) a le même  $G$ -modèle minimal que  $X$  (resp.  $Y$ );
- (2)  $\bar{\varphi}_0 \sim_G \bar{\varphi}_1$ ;
- (3)  $\bar{\varphi}_i$  a le même  $G$ -modèle de Sullivan que  $\varphi_i$ .

*Preuve.* (1) Désignons par  $\langle \rangle$  le foncteur réalisation géométrique, de source la catégorie des  $G$ -adgc, de but la catégorie des  $G$ -espaces. On pose:

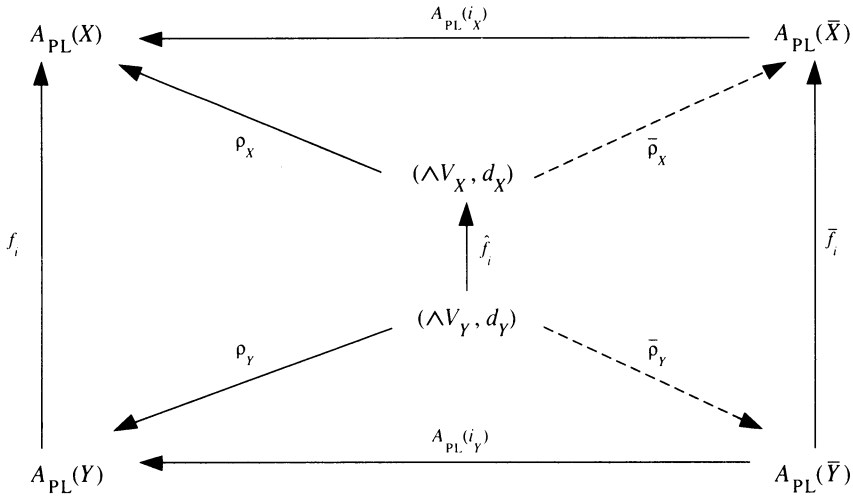
$$\bar{X} = \langle A_{\text{PL}}(X) \rangle, \quad \bar{Y} = \langle A_{\text{PL}}(Y) \rangle.$$

Que  $\bar{X}$  ait même  $G$ -modèle minimal que  $X$  résulte de l'application naturelle  $i_X: X \rightarrow \langle A_{\text{PL}}(X) \rangle$ ;  $i_X$  est une  $G$ -application et  $H^*(i_X; \mathbb{Q})$  est un isomorphisme (mais  $i_X$  n'est pas une  $G$ -équivalence d'homotopie rationnelle).

(2) Soient  $f_i = A_{\text{PL}}(\varphi_i)$ ,  $\bar{\varphi}_i = \langle f_i \rangle$ ,  $\bar{f}_i = A_{\text{PL}}(\bar{\varphi}_i)$ .  $\bar{f}_i$  est un  $G$ -modèle de Sullivan de  $f_i: \rho_X \circ \bar{f}_i \sim_G f_i \circ \rho_Y$ . De  $\varphi_0 \sim \varphi_1$ , on tire  $f_0 \sim f_1$  d'où, d'après le théorème 2.6,  $f_0 \sim_G f_1$  et donc  $\langle f_0 \rangle \sim_G \langle f_1 \rangle$ , c'est-à-dire  $\bar{\varphi}_0 \sim_G \bar{\varphi}_1$ .

(3) Avec les notations ci-dessus, nous avons le diagramme suivant:





Par  $G$ -relèvement, on détermine  $\bar{\rho}_X$  et  $\bar{\rho}_Y$  tels que  $A_{\text{PL}}(i_X) \circ \bar{\rho}_X \sim_G \rho_X$  et  $A_{\text{PL}}(i_Y) \circ \bar{\rho}_Y \sim_G \rho_Y$ . Par naturalité, on a les diagrammes commutatifs  $A_{\text{PL}}(i_X) \circ \hat{f}_i = f_i \circ A_{\text{PL}}(i_Y)$ . Par chasse dans les diagrammes, on obtient  $A_{\text{PL}}(i_X) \circ \bar{\rho}_X \circ \hat{f}_i \sim_G A_{\text{PL}}(i_X) \circ \hat{f}_i \circ \bar{\rho}_Y$  donc, puisque  $i_X^*$  est une isomorphisme,  $\bar{\rho}_X \circ \hat{f}_i \sim_G \hat{f}_i \circ \rho_Y$ , ce qui montre que  $\hat{f}_i$  est un  $G$ -modèle de Sullivan de  $\bar{f}_i$ .

**2.13.** Soient  $(A, d_A)$  une  $G$ -adgc et  $\mathcal{I}$  l'idéal de  $(A, d_A)$  engendré par  $\{a - ta, a \in A, t \in G\}$ .  $\mathcal{I}$  est un idéal différentiel de  $(A, d_A)$ . On désigne par  $(A_G, \bar{d}_A)$  l'adgc  $A/\mathcal{I}$  munie de la différentielle induite et par  $p : (A, d_A) \rightarrow (A_G, \bar{d}_A)$  la projection.

Si  $f : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$  est une  $G$ -morphisme d'adgc entre la  $G$ -adgc  $(A, d_A)$  et l'adgc  $(B, d_B)$ , on a la factorisation  $\bar{f} \circ p = f$  suivante:

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xrightarrow{f} & (B, d_B) \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ (A_G, \bar{d}_A) & & \end{array}$$

Si  $f : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$  est un  $G$ -morphisme d'adgc, nous notons  $f_G : (A_G, \bar{d}_A) \rightarrow (B_G, \bar{d}_B)$  l'application induite.

**2.14.** Sur une algèbre non libre  $(A, d_A)$ , le quotient  $(A_G, \bar{d}_A)$  n'est pas en général un invariant homotopique. En effet, soit  $(A, d_A)$  la  $\mathbb{Z}_2$ -adgc  $\mathbb{Q}\langle x, y, y^2, w \rangle$  munie de la différentielle  $dx = y^2, dy = w$  et de l'action  $tx = x, ty = y, tw = -w$ .  $(A, d_A)$  est une adgc acyclique ce qui n'est pas le cas de  $(A_G, \bar{d}_A)$ .

**2.15. Lemme [GHVP, 3.11].** Soit  $(\wedge V, d)$  un  $G$ -KS-complexe; désignons par  $V^G$  l'ensemble des points de  $V$  fixés par  $G$ . Alors, il existe un supplémentaire  $\hat{V}$  de  $V^G$  dans  $V$  tel que l'idéal engendré par  $\hat{V}$  soit stable par  $G$ . La projection

naturelle est notée  $p: (\wedge V, d) \rightarrow (\wedge V^G, \bar{d})$ . Remarquons que si  $F: (\wedge V, d) \rightarrow (A, d_A)$  est une  $G$ -homotopie entre  $f$  et  $g$ , alors  $F_G: (\wedge V^G, \bar{d}) \rightarrow (A_G, \bar{d}_A)$  est une homotopie entre  $f_G$  et  $g_G$ .

**2.16.** Soit  $E_G$  l'espace total contractile de la fibration universelle  $G \rightarrow E_G \rightarrow B_G$ . Pour un  $G$ -espace  $X$ ,  $\text{Hom}_G(E_G, X)$  s'appelle l'ensemble des points fixes homotopiques de  $X$  pour l'action de  $G$ ; cet ensemble est noté  $X^{(G)}$ . Dans le cas général d'un groupe fini, J. Goyo a montré [G], qui si  $(\wedge V, d)$  est un  $G$ -modèle du  $G$ -espace  $X$ , alors  $(\wedge V^G, \bar{d})$  est un modèle de  $X^{(G)}$ .

### 3. LE MODÈLE ÉQUIVARIANT COFIBRANT

Dans ce paragraphe,  $G = \mathbb{Z}_{p^k}$  et  $l$  est un entier tel que  $0 \leq l \leq k$ ; on désigne par  $G_l$  le sous-groupe  $\mathbb{Z}_{p^l}$  de  $G$  avec la convention  $G_0 = \{e\}$ . Pour le  $G$ -espace  $X$ , nous posons  $X^l = X^{G_l}$ ; pour la  $G$ -adgc  $(A, d_A)$ , nous posons  $(A^l, \bar{d}_A) = (A_{G_l}, \bar{d}_A)$ , la projection est notée  $p_l: (A, d_A) \rightarrow (A^l, \bar{d}_A)$ ; si  $(A, d_A)$  est un  $G$ -KS-complexe  $(\wedge V, d)$  cette projection s'écrit:  $p_l: (\wedge V, d) \rightarrow (\wedge V^l, \bar{d})$  avec  $V^l = V^{G_l}$ .

**3.1.** Un  $\mathcal{O}_G$ -module  $\underline{M}$  est un diagramme  $M_0 \xrightarrow{m_0} \dots \xrightarrow{m_{k-1}} M_k$ , où  $M_l$  est un  $\mathbb{Z}[G/G_l]$ -module et  $m_l$  un morphisme équivariant de modules. Les  $\mathcal{O}_G$ -modules constituent une catégorie abélienne possédant suffisamment d'injectifs [B, I.10].

**3.2.** Une  $\mathcal{O}_G$ -adgc  $\underline{A}$  est un diagramme  $(A_0, d_0) \xrightarrow{a_0} \dots \xrightarrow{a_{k-1}} (A_k, d_k)$ , où  $(A_l, d_l)$  est une  $G/G_l$ -adgc et  $a_l$  un morphisme équivariant d'adgc. Si le  $\mathcal{O}_G$ -module obtenu à partir de  $\underline{A}$  par oubli de structure est injectif, on dit que  $\underline{A}$  est une  $\mathcal{O}_G$ -adgc injective. D'après [T2, 5.1],  $\underline{A}$  est une  $\mathcal{O}_G$ -adgc injective si et seulement si  $a_l$  est une flèche surjective ( $0 \leq l < k$ ). Les  $\mathcal{O}_G$ -adgc s'organisent en une catégorie notée  $\mathcal{O}_G\text{-ADGC}$ .

**3.3.** La  $\mathcal{O}_G$ -adgc de de Rham  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$  du  $G$ -espace  $X$  est le diagramme

$$A_{\text{PL}}(X^0) \rightarrow \dots \rightarrow A_{\text{PL}}(X^k);$$

$\underline{A}_{\text{PL}}(X)$  est une  $\mathcal{O}_G$ -adgc injective [T1, 4.3]. Un modèle de  $X$  est un modèle de  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$ .

G. Triantafillou a défini pour tout groupe fini, un modèle, appelé ici minimal injectif et a établi un théorème d'existence et d'unicité:

**3.4. Théorème** [T1, 5.3, 5.7 et 6.2]. *Soit  $G$  un groupe fini. Pour toute  $\mathcal{O}_G$ -adgc injective  $\underline{A}$ , il existe un modèle minimal injectif  $\underline{\rho}: \underline{M} \rightarrow \underline{A}$ , unique à isomorphisme près.*

*La correspondance  $X \rightarrow \underline{M}_X$  induit une bijection entre les  $G$ -types d'homotopie rationnelle de  $G$ -espaces et les classes d'isomorphisme de  $\mathcal{O}_G$ -adgc minimales injectives.*

La construction d'un modèle minimal cofibrant s'appuie sur la notion de complexe minimal cofibrant:

**3.5. Définition.** Un complexe minimal cofibrant  $\underline{K} = ((\wedge V_l, d_l), m_l)$  est une  $\mathcal{O}_G$ -adgc telle que  $(\wedge V_0, d_0)$  soit un  $G$ -KS-complexe minimal et telle que pour tout  $l$ , avec  $0 \leq l \leq k$ , la factorisation  $\bar{m}_{l-1}$  de  $m_{l-1}$  soit une  $G/G_l$ -KS-extension minimale:

$$\begin{array}{ccc} (\wedge(V_{l-1}), d_{l-1}) & \xrightarrow{m_{l-1}} & (\wedge(V_l), d_l) \\ \downarrow p_l & \nearrow & \\ (\wedge(V'_{l-1}), \bar{d}_{l-1}) & & \end{array}$$

**3.6. Théorème.** (1) Toute  $\mathcal{O}_G$ -adgc  $\underline{A}$  admet un modèle  $(\underline{K}, \underline{\rho})$ , où  $\underline{K}$  est un complexe minimal cofibrant.

(2) Si  $(\underline{K}, \underline{\rho})$  et  $(\underline{K}', \underline{\rho}')$  sont deux modèles de  $\underline{A}$  où  $\underline{K}$  et  $\underline{K}'$  sont des complexes minimaux cofibrants, alors il existe un isomorphisme de  $\mathcal{O}_G$ -adgc  $\underline{\theta}: \underline{K}' \rightarrow \underline{K}$  tel que  $\rho_l \circ \theta_l \sim_{\text{éq}} \rho'_l$  pour  $0 \leq l \leq k$ .

(3) Si  $\hat{\underline{\theta}}: \underline{K}' \rightarrow \underline{K}$  satisfait la relation  $\underline{\rho} \circ \hat{\underline{\theta}} \sim \underline{\rho}'$ , alors  $\hat{\underline{\theta}}$  est un isomorphisme et  $\hat{\theta}_l \sim_{\text{éq}} \theta_l$  pour  $0 \leq l \leq k$ .

*Preuve.* (1) Construisons  $\underline{K} = (\wedge V_l, m_l)$  et  $\underline{\rho} = (\rho_l)$  par récurrence croissante sur  $l$ . Soit  $\rho_0: (\wedge V_0, d_0) \rightarrow (A_0, \hat{d}_{A_0})$  le  $G$ -modèle minimal de  $A_0$ . Supposons construits  $(\wedge V_j, d_j)$  et  $\rho_j$  pour  $0 \leq j < l$ .  $(\wedge V_l, d_l)$  et  $\rho_l$  sont déterminés en construisant le  $G/G_l$ -modèle minimal (cf. 2.1) de  $\overline{a_{l-1} \circ \rho_{l-1}}$ .

(2) Posons  $\underline{K}' = ((\wedge T_l, \delta_l), t_l)$ ;  $\underline{\theta} = (\theta_l)_{0 \leq l \leq k}$  se construit par récurrence croissante sur  $l$ . Par relèvement équivariant, il existe

$$\theta_0: (\wedge T_0, \delta_0) \rightarrow (\wedge V_0, d_0)$$

tel que  $\rho_0 \circ \theta_0 \sim_{\text{éq}} \rho'_0$ .  $\theta_0$  induisant un isomorphisme en cohomologie entre deux KS-complexes minimaux, on en déduit que  $\theta_0$  est un isomorphisme (cf. [H, 4.6]). Supposons construit  $\theta_j$  pour  $0 \leq j < l$  et explicitons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc} (\wedge(T_{l-1}), \delta_{l-1}) & \xrightarrow{\rho'_l} & (\wedge(T'_{l-1}), \hat{\delta}_{l-1}) & \xrightarrow{\overline{t_{l-1}}} & (\wedge(T_l), \delta_l) \\ \downarrow \theta_{l-1} & \searrow \rho'_{l-1} & \downarrow & \searrow \overline{\rho'_{l-1}} & \downarrow \theta_l \\ & A_{l-1} & \xrightarrow{q_l} & A'_{l-1} & \xrightarrow{\overline{a_{l-1}}} & A_l \\ & \nearrow \rho_{l-1} & \downarrow \overline{\theta_{l-1}} & \nearrow \overline{\rho_{l-1}} & \downarrow \rho_l & \\ (\wedge(V_{l-1}), d_{l-1}) & \xrightarrow{\rho_l} & (\wedge(V'_{l-1}), \hat{d}_{l-1}) & \xrightarrow{\overline{m_{l-1}}} & (\wedge(V_l), d_l) \end{array}$$

Dans ce diagramme  $p_l, p'_l$  désignent les projections canoniques;  $\overline{a_{l-1}}, \overline{m_{l-1}}$ , et  $\overline{t_{l-1}}$  sont les factorisations respectives de  $a_{l-1}, m_{l-1}$ , et  $t_{l-1}$ . Les  $G/G_{l-1}$ -morphisms d'adgc  $\rho_{l-1}, \rho'_{l-1}$ , et  $\theta_{l-1}$  déterminent les  $G/G_l$ -morphisms  $\overline{\rho_{l-1}}, \overline{\rho'_{l-1}}$ , et  $\overline{\theta_{l-1}}$ . De  $\rho_{l-1} \circ \theta_{l-1} \sim_{\text{éq}} \rho'_{l-1}$ , on tire  $\overline{\rho_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}} \sim_{\text{éq}} \overline{\rho'_{l-1}}$ ; par relèvement équivariant, on construit  $\theta'_l: (\wedge T_l, \delta_l) \rightarrow (\wedge V_l, d_l)$  tel que  $\rho_l \circ \theta'_l \sim_{\text{éq}} \rho'_l$ ; par chasse dans les diagrammes, on a

$$\rho_l \circ \theta'_l \circ \overline{t_{l-1}} \sim_{\text{éq}} \rho_l \circ \overline{m_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}}$$

d'où  $\theta'_l \circ \overline{t_{l-1}} \sim_{\text{éq}} \overline{m_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}}$ , puisque  $\rho_l$  induit un isomorphisme en cohomologie.

De  $\overline{t_{l-1}}$  cofibration de la catégorie  $G\text{-ADGC}$ , on déduit l'existence de  $\theta_l$  satisfaisant  $\theta_l \sim_{\text{éq}} \theta'_l$  et  $\theta_l \circ \overline{t_{l-1}} = \overline{m_{l-1}} \circ \overline{\theta_{l-1}}$ . De  $\theta_{l-1}$  isomorphisme, on déduit  $\overline{\theta_{l-1}}$  isomorphisme;  $(\overline{\theta_{l-1}}, \theta_l)$  est un morphisme entre KS-extensions minimales; le théorème [H, 4.6] s'applique et nous donne l'isomorphisme  $\theta_l$ ; la récurrence se poursuit.

(3) Soit  $\underline{\theta}': \underline{K}' \rightarrow \underline{K}$  un morphisme de  $\mathcal{O}_G$ -adgc tel que  $\underline{\rho} \circ \underline{\theta}' \sim \underline{\rho}'$ . Par le théorème d'unicité du KS-modèle minimal, on a:  $\theta'_0 \sim_{\text{éq}} \theta_0$  et  $\theta'_0$  est un isomorphisme. Supposons que  $\theta'_j \sim_{\text{éq}} \theta_j$  et que  $\theta'_j$  soit un isomorphisme pour  $0 \leq j < l$ . Le diagramme suivant satisfait les hypothèses du théorème [H, 10.4]:

$$\begin{array}{ccc} (\wedge(T_{l-1}^l), \bar{\delta}_{l-1}) & \xrightarrow{\overline{t_{l-1}}} & (\wedge(T_l), \delta_l) \\ \downarrow \theta'_{l-1} & & \downarrow \theta'_l \\ (\wedge(V_{l-1}^l), \bar{d}_{l-1}) & \xrightarrow{\overline{m_{l-1}}} & (\wedge(V_l), d_l) \end{array}$$

On conclut que  $\theta'_l \sim_{\text{éq}} \theta_l$  et que  $\theta'_l$  est un isomorphisme.

**3.7. Proposition.** *La correspondance  $X \rightarrow \underline{K}_X$  induit une bijection entre les  $\mathbb{Z}_{p^k}$ -types d'homotopie rationnelle de  $\mathbb{Z}_{p^k}$ -espaces et les classes d'isomorphismes de complexes minimaux cofibrants.*

*Preuve.* Ce résultat se déduit de l'équivalence de catégories homotopiques établie par G. Triantafyllou [T1, 6.2]. Nous donnons la démonstration pour  $G = \mathbb{Z}_p$ ; le cas général s'obtient par récurrence croissante sur les sous-groupes de  $\mathbb{Z}_{p^k}$ .

Supposons d'abord que  $X$  et  $Y$  soient deux  $\mathbb{Z}_p$ -espaces ayant le même  $\mathbb{Z}_p$ -type d'homotopie rationnelle; ils ont alors même modèle minimal injectif donc même modèle minimal cofibrant. Réciproquement, supposons que  $X$  et  $Y$  soient deux  $\mathbb{Z}_p$ -espaces ayant même modèle cofibrant; il suffit de montrer qu'ils ont même modèle minimal injectif. Pour cela, considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{i} & K' \\
 \lambda_1 \uparrow & & \uparrow \lambda'_1 \\
 (\wedge V, \delta) & \xrightarrow{i_1} & (\wedge V', \delta') \\
 \lambda_2 \uparrow & & \uparrow \lambda'_2 \\
 (\wedge T, d) & \xrightarrow{t} & (\wedge T', d')
 \end{array}$$

où  $i$  est le modèle minimal cofibrant commun à  $X$  et  $Y$ ,  $i_1$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -modèle surjectif de  $i$  [L, IV.2.(6)], et  $t$  le modèle minimal injectif de  $i_1$ ; nous avons  $i\lambda_1 \sim \lambda'_1 i_1$  et  $i_1 \lambda_2 = \lambda'_2 t$ . Par une argumentation classique, on vérifie que  $t$  est un modèle minimal injectif commun à  $X$  et  $Y$ .

#### 4. $\mathbb{Z}_p$ -FORMALITÉ

Dans ce paragraphe,  $G$  désigne le groupe  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  premier).

**4.1.** Rappelons qu'une adgc  $(A, d_A)$  est formelle si  $(A, d_A)$  et  $(H(A), 0)$  ont un modèle de Sullivan commun. Un morphisme d'adgc  $a: (A, d_A) \rightarrow (A', d_{A'})$  est formalisable si le diagramme suivant est commutatif à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc}
 (A, d_A) & \xrightarrow{a} & (A', d_{A'}) \\
 \uparrow \lambda & & \uparrow \lambda' \\
 (\wedge V, d) & \xrightarrow{\hat{a}} & (\wedge V', d') \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \mu' \\
 (H(A), 0) & \xrightarrow{a^*} & (H(A'), 0)
 \end{array}$$

(Dans ce diagramme,  $\hat{a}$  est un modèle de Sullivan commun aux flèches  $a$  et  $a^*$ ; les flèches verticales sont des équivalences faibles.) Rappelons que  $a$  est formalisable si et seulement si le modèle bigradué de  $a^*$  est un modèle filtré de  $a$  ([VP, 2.3.4]; les définitions ne sont pas rappelées ici).

Le but de ce paragraphe est de donner, pour  $G = \mathbb{Z}_p$ , une notion de formalité équivariante.

Une  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$ -adgc  $\underline{A}$  est un diagramme  $(A, d_A) \xrightarrow{a} (A', d_{A'})$  où  $(A, d_A)$  est une  $\mathbb{Z}_p$ -adgc,  $(A', d_{A'})$  une adgc munie de l'action triviale de  $\mathbb{Z}_p$ , et  $a$  un morphisme équivariant d'adgc.

**4.2. Définition.** La  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$ -adgc  $\underline{A}$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formelle si le diagramme suivant, constitué d'applications équivariantes, commute à homotopie équivariante près:

$$\begin{array}{ccc}
 (A, d_A) & \xrightarrow{a} & (A', d_{A'}) \\
 \uparrow \lambda & & \uparrow \lambda' \\
 (\wedge V, d) & \xrightarrow{\hat{a}} & (\wedge V', d') \\
 \downarrow \mu & & \downarrow \mu' \\
 (H(A), 0) & \xrightarrow{a^*} & (H(A'), 0)
 \end{array}$$

(Dans ce diagramme, les flèches verticales sont des équivalences faibles.)

**4.3.** On dit que le  $\mathbb{Z}_p$ -espace  $X$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formel si  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formelle.

**4.4. Théorème.** Soit  $X$  un  $\mathbb{Z}_p$ -espace; les énoncés suivants sont équivalents:

- (1) Le  $\mathbb{Z}_p$ -espace  $X$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formel.
- (2) L'injection  $i: X^{\mathbb{Z}_p} \rightarrow X$  de l'ensemble des points fixes est une application formalisable.

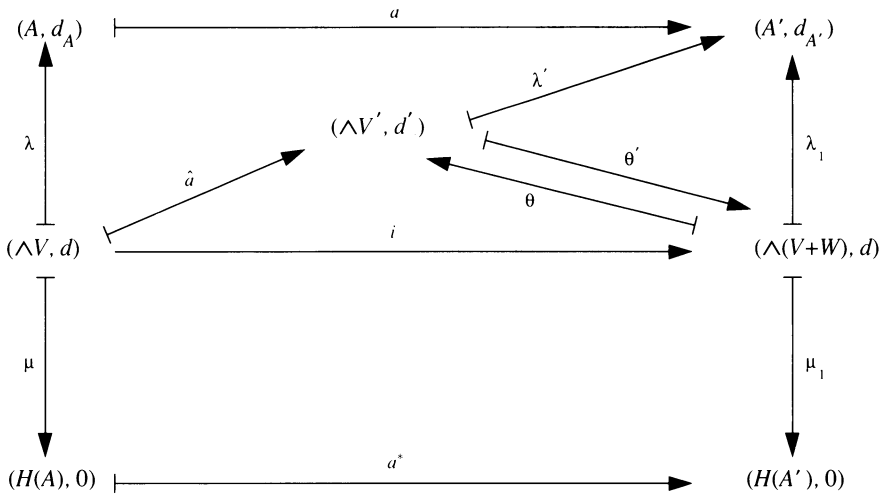
La preuve est un corollaire du théorème 2.6 et du lemme suivant:

**4.5. Lemme.** Soit  $G$  un groupe fini; on suppose que  $G$  agit sur  $(A, d_A)$ , que l'action de  $G$  sur  $(A', d_{A'})$  est triviale et que  $a: (A, d_A) \rightarrow (A', d_{A'})$  est un morphisme d'adgc équivariant et formalisable. Alors les applications  $\lambda, \lambda', \mu$ , et  $\mu'$  ainsi que les homotopies  $a\lambda \sim \lambda'\hat{a}$  et  $a^*\mu \sim \mu'\hat{a}$  de 4.1 peuvent être choisies équivariantes.

*Preuve.* Pour éviter des confusions, au cours de cette démonstration (et seulement durant cette démonstration), les applications équivariantes seront désignées par le symbole  $\mapsto$ .

Puisque  $a$  est formalisable, en particulier  $(A, d_A)$  est une adgc formelle; cette adgc est munie d'une action de  $G$ . Soit  $\mu: (\wedge V, d) \mapsto (H(A), 0)$  un modèle bigradué équivariant de  $(H(A), 0)$ . Puisque  $(A, d_A)$  est formelle, il existe une équivalence faible  $\tilde{\lambda}: (\wedge V, d) \rightarrow (A, d_A)$ ; la construction de  $\tilde{\lambda}$  est entièrement déterminée par le choix de sections (cf. [HS]); un tel choix de sections peut toujours être fait de façon équivariante (cf. [P, 2.10] pour une démonstration détaillée); ce choix détermine l'équivalence faible équivariante  $\lambda: (\wedge V, d) \mapsto (A, d_A)$ ; on obtient ainsi la formalisation équivariante:  $(A, d_A) \xrightarrow{\lambda} (\wedge V, d) \xrightarrow{\mu} (H(A), 0)$ .

Dans le diagramme ci-dessous,  $i$  est simultanément modèle bigradué de  $a^*$  et modèle filtré de  $a$  construit à partir de la formalisation équivariante ci-dessus de  $(A, d_A)$ ;



Nous avons  $\lambda_1 i = a\lambda$  et  $\mu_1 i = a^*\mu$ . Désignons par  $\lambda' : (\wedge V', d') \mapsto (A', d_{A'})$  un modèle de  $(A', d_{A'})$ ; par relèvements, il existe  $\theta'$  et  $\theta$  tels que  $\lambda_1 \theta' \sim \lambda'$  et  $\theta' \theta \sim \text{id}$ . Remarquons que puisque l'action de  $G$  sur  $(A', d_{A'})$  est triviale, les flèches  $\lambda_1, \mu_1, \lambda', \theta$ , et  $\theta'$  sont évidemment équivariantes; désignons par  $\hat{a}$  un modèle équivariant de  $a$ :  $\lambda' \hat{a} \sim a\lambda$ . Par chasse dans le diagramme, on obtient  $\theta i \sim \hat{a}$  et donc  $\mu_1 \theta' \hat{a} \sim a^* \mu$ . Posons  $\mu' = \mu_1 \theta'$ , la formalisation recherchée est:

$$\begin{array}{ccc}
 (A, d_A) & \xrightarrow{a} & (A', d_{A'}) \\
 \lambda \uparrow & & \uparrow \lambda' \\
 (\wedge V, d) & \xrightarrow{\hat{a}} & (\wedge V', d') \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\
 (H(A), 0) & \xrightarrow{a^*} & (H(A'), 0)
 \end{array}$$

Les homotopies  $a\lambda \sim \lambda' \hat{a}$  et  $a^* \mu \sim \mu' \hat{a}$  sont de source et de but des applications équivariantes; d'après le théorème 2.6, ces homotopies peuvent être remplacées par des homotopies équivariantes.

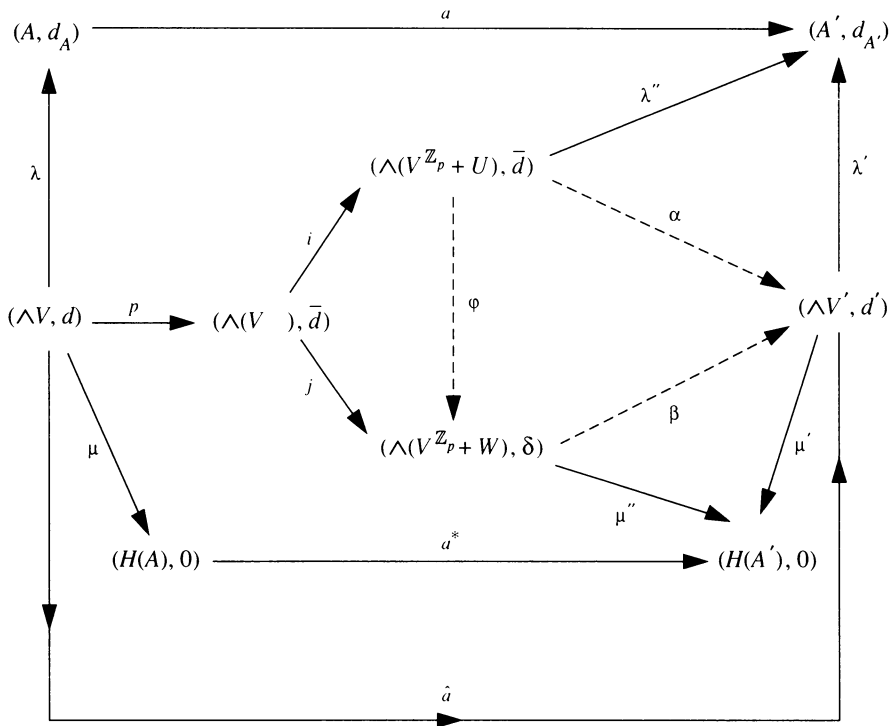
Pour achever ce paragraphe, montrons à l'aide du modèle cofibrant que le  $\mathbb{Z}_p$ -type d'homotopie rationnelle d'un espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel  $X$  est une conséquence formelle de  $i^* : H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Q})$ .

**4.6. Théorème.** Soit  $\underline{A}$  une  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_p}$ -adgc; les propositions suivantes sont équivalentes:

- (1)  $\underline{A}$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formelle.
- (2)  $\underline{A}$  et  $\underline{H}(A)$  ont un modèle minimal cofibrant en commun:

$$\underline{A} \xleftarrow{\lambda} \underline{K} \xrightarrow{\mu} \underline{H}(A).$$

*Preuve.* (2)  $\Rightarrow$  (1) est évident. Supposons (1) vérifiée. Dans le diagramme suivant, toutes les flèches sont équivariantes:



Puisque  $\underline{A}$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formelle, on a  $a\lambda \sim \lambda'\hat{a}$  et  $a^*\mu \sim \mu'\hat{a}$ ; les applications  $ip$  et  $jp$  sont respectivement les modèles minimaux cofibrants  $\underline{K}$  et  $\underline{K}'$  de  $\underline{A}$  et de  $\underline{H}(A)$ ; nous avons  $\lambda''ip = a\lambda$  et  $\mu''jp = a^*\mu$ . Il nous faut construire un isomorphisme  $\varphi: \underline{K} \rightarrow \underline{K}'$  ce qui se réduit à construire un isomorphisme  $\varphi: (\wedge(V^{\mathbb{Z}_p} + U), \bar{d}) \rightarrow (\wedge(V^{\mathbb{Z}_p} + W), \delta)$  tel que  $\varphi \circ i = j$ ; les applications  $\alpha$  et  $\beta$  sont construites par relèvement:  $\lambda'\alpha \sim \lambda''$  et  $\mu'\beta \sim \mu''$ . Il est aisé de vérifier par chasse dans le diagramme qu'on a également  $\alpha ip \sim \hat{a} \sim \beta jp$ ; par relèvement, il existe  $\varphi'$  tel que  $\beta\varphi' \sim \alpha$ ; de ces homotopies, on déduit  $\varphi'ip \sim jp$ . Ces deux applications sont équivariantes; d'après le théorème 2.6, il existe une homotopie équivariante  $F$  de source  $\varphi'ip$ , de but  $jp$ ; l'application induite  $F_G$  est une homotopie de source  $\varphi'i$ , de but  $j$ ; puisque  $i$  est une cofibration, il existe  $\varphi \sim \varphi'$  tel que  $\varphi i = j$ ; enfin  $\varphi$  est un isomorphisme, ce qui achève la preuve.

**4.7. Corollaire.** *Le  $\mathbb{Z}_p$ -type d'homotopie rationnelle d'un  $\mathbb{Z}_p$ -espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel  $X$  est une conséquence formelle de  $\underline{H}^*(X; \mathbb{Q})$ .*

*Preuve.* Si  $X$  est  $\mathbb{Z}_p$ -formel alors d'après le théorème précédent  $\underline{A}_{\text{PL}}(X)$  et  $\underline{H}^*(X; \mathbb{Q})$  ont un modèle minimal cofibrant en commun; d'après (3.8), ce modèle minimal cofibrant caractérise le  $\mathbb{Z}_p$ -type d'homotopie rationnelle de  $X$ .



**4.8. Remarques.** (1) Il résulte du théorème 4.4 que les obstructions à la formalisabilité d'une applicaton [FT, Th, VP] fournissent des obstructions à la  $\mathbb{Z}_p$ -formalité des  $\mathbb{Z}_p$ -espaces.

(2) La classe des applications formalisables n'est pas stable par composition [FT]; en conséquence, les résultats de ce paragraphe ne peuvent s'étendre de manière immédiate au cas plus général d'une action de  $\mathbb{Z}_{p^k}$  ( $k > 1$ ).

**4.9. Exemples.** 1. La sphère  $S^n$  munie d'une action du groupe  $\mathbb{Z}_p$  est un espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel. Cela résulte de la théorie de Smith [Sm, 4]: l'ensemble des points fixes  $(S^n)^{\mathbb{Z}_p}$  possède le type d'homotopie rationnelle d'une sphère  $S^m$  avec  $m < n$ ; pour des raisons de degré, l'application  $(S^n)^{\mathbb{Z}_p} \rightarrow S^n$  est formalisable.

2. Une variété kählérienne compacte  $M$  sur laquelle de groupe  $\mathbb{Z}_p$  agit de manière holomorphe est un  $\mathbb{Z}_p$ -espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel; cela résulte de la conjonction des remarques suivantes:  $t$  désigne le générateur de  $\mathbb{Z}_p$ ; plaçons-nous en  $x_0 \in M^{\mathbb{Z}_p}$ ; d'après [BM, Théorème 5, Chapitre III], il existe un système de coordonnées locales  $U$  en  $x_0$  tel que  $t: M \rightarrow M$  soit une application  $\mathbb{C}$ -linéaire sur  $U$ .  $M^{\mathbb{Z}_p} \cap U$  est donc constitué des points fixes de cette application  $\mathbb{C}$ -linéaire.  $M^{\mathbb{Z}_p}$  est une sous-variété kählérienne compacte de  $M$  et  $i: M^{\mathbb{Z}_p} \rightarrow M$  est holomorphe; d'après [DGMS]  $i$  est formalisable.

3. Un  $\mathbb{Z}_p$ -espace de Hopf au sens de [B] est un espace  $\mathbb{Z}_p$ -formel. Cela résulte de [T2, 1.2]: le  $\mathbb{Z}_p$ -rationalisé d'un  $\mathbb{Z}_p$ -espace de Hopf est  $\mathbb{Z}_p$ -homotopiquement équivalent à un produit de  $\mathbb{Z}_p$ -espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

4. Munissons  $X = S^1 \times S^2 \times S^3$  de l'action de  $\mathbb{Z}_3$  définie par  $t(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_2, \xi_3, \xi_1)$ ; on a  $X^{\mathbb{Z}_3} \cong S^3$ ; le calcul du modèle minimal de Quillen de  $i: X^{\mathbb{Z}_3} \rightarrow X$  montre que  $i$  est formalisable (cf. [FT, 2.2]) et donc  $X$  est un  $\mathbb{Z}_3$ -espace  $\mathbb{Z}_3$ -formel. Remarquons que, sur cet exemple, le modèle minimal injectif et le modèle cofibrant coïncident:

$$(\wedge(a_1, a_2, a_3), d) \xrightarrow{f} (\wedge(v), 0)$$

avec  $|a_i| = |v| = 3$ ,  $da_i = 0$ ,  $ta_1 = a_2$ ,  $ta_2 = a_3$ ,  $ta_3 = a_1$ ,  $f(a_i) = v$ .

5. Construisons un CW-complexe de dimension infinie qui n'est pas  $\mathbb{Z}_2$ -formel: considérons pour cela la  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2}$ -adgc suivante:

$$(\wedge(u, v), d) \xrightarrow{q} (\wedge(y), 0)$$

avec  $|x| = 2$ ,  $|v| = |y| = 3$ ,  $du = 0$ ,  $dv = u^2$ ,  $tu = -u$ ,  $tv = v$ ,  $q(u) = 0$ ,  $q(v) = y$ ; rationnellement, on reconnaît la fibration de Hopf. A l'aide du foncteur  $\mathbf{C}$  de A. Elmendorf [E, 1], on déduit de cette  $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}_2}$ -adgc l'existence d'un  $\mathbb{Z}_2$ -espace rationnel  $X$  tel que  $X^{\mathbb{Z}_2}$  ait le type d'homotopie rationnelle de  $S^3$  et  $X$  le type d'homotopie rationnelle de  $S^2$ . Cela n'est pas en contradiction avec la théorie de Smith car, ainsi que le remarque A. Elmendorf, l'espace  $X$

est un CW-complexe de dimension infinie. L'application de Hopf  $q$  n'est pas formalisable donc  $X$  n'est pas un  $\mathbb{Z}_2$ -espace  $\mathbb{Z}_2$ -formel.

6. Construisons un CW-complexe fini qui n'est pas  $\mathbb{Z}_2$ -formel:  $X$  est l'espace  $\mathbf{S}_a^4 \vee \mathbf{S}_b^4 \vee \mathbf{S}_c^4 \vee \mathbf{S}_d^4 \vee \mathbf{S}_e^7 \cup_{w_1} e_1^8 \cup_{w_2} e_2^8$  avec  $w_1 = 2[a, b]_W - e$ ,  $w_2 = 2[c, d]_W - e$  (où  $[ , ]_W$  désigne le crochet de Whitehead). Munissons  $X$  de l'action de  $\mathbb{Z}_2$  définie par  $ta = c$ ,  $tb = d$ ,  $te = e$ ,  $te_1^8 = e_2^8$ . On a  $X^{\mathbb{Z}_2} = \mathbf{S}^7$ . Le calcul du modèle minimal de Quillen de  $i: X^{\mathbb{Z}_2} \rightarrow X$  montre que  $i$  n'est pas formalisable et donc  $X$  n'est pas  $\mathbb{Z}_p$ -formel. Décrivons sur cet exemple les adgc-modèles:  $(\wedge(v), 0)$  est le modèle de Sullivan de  $X^{\mathbb{Z}_2}$  avec  $|v| = 7$ . Le  $\mathbb{Z}_2$ -modèle minimal de  $X$ ,  $(\wedge U, d)$ , obtenu à partir du foncteur cochaînes [Ta, I.1(3)] contient en particulier les éléments  $r_i \in U_0^4$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $dr_i = 0$ ,  $tr_1 = r_3$ ,  $tr_2 = r_4$  ainsi que  $s \in U_1^7$ ,  $ds = r_1 r_2 + r_3 r_4$ ,  $ts = s$ . Le modèle minimal injectif du  $\mathbb{Z}_2$ -espace  $X$  est:  $f: (\wedge U, d) \rightarrow (\wedge(v), 0)$  avec  $f(s) = v$ . Le modèle minimal cofibrant du  $\mathbb{Z}_2$ -espace  $X$  est:  $(\wedge U, d) \rightarrow (\wedge(U^{\mathbb{Z}_2} \oplus W), d')$ . Celui-ci ne coïncide pas avec le modèle minimal injectif car  $U^{\mathbb{Z}_2}$  contient en particulier les éléments  $r_1 + r_3$  et  $r_2 + r_4$  en degré 4.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [AL] M. Aubry and J.-M. Lemaire, *Homotopie d'algèbres de Lie et de leurs algèbres enveloppantes*, Lecture Notes in Math., vol. 1318, Springer, 1986, pp. 26–31.
- [B] G. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lecture Notes in Math., vol. 34, Springer, 1967.
- [BM] S. Bochner and W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1948.
- [DGMS] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, and D. Sullivan, *The real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), 245–254.
- [E] A. D. Elmendorf, *Systems of fixed-pointed-sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 275–284.
- [FT] Y. Félix and D. Tanré, *Formalité d'une application et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Lecture Notes in Math., vol. 1318, Springer, 1986, pp. 99–123.
- [G] J. Goyo, Ph.D. Thesis, Toronto, 1989.
- [GHVP] K. Grove, S. Halperin, and M. Vigué-Poirrier, *The rational homotopy theory of certain path-spaces with applications to geodesics*, Acta Math. **140** (1978), 277–303.
- [H] S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **9-10** (1983).
- [HS] S. Halperin and J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. **32** (1979), 233–279.
- [L] Th. Lambre, *Opus 1*, Thèse, Lille, 1987.
- [P] S. Papadima, *On the formality of maps*, An. Univ. Timisoara Ser. Şt. Mat. **20** (1982), 30–40.
- [Sm] P. A. Smith, *New results and old problems in finite transformations groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 401–415.
- [Su] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **47** (1977), 269–331.
- [Ta] D. Tanré, *Homotopie rationnelle: modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lecture Notes in Math., vol. 1025, Springer, 1983.

- [Th] J.-C. Thomas, *Eilenberg-Moore models for fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 203–225.
- [T1] G. Triantafillou, *Equivariant minimal model*, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 509–532.
- [T2] ———, *Rationalization of Hopf-G-spaces*, Math. Z. **182** (1983), 485–500.
- [VP] M. Vigüé-Poirrier, *Réalisations de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Trans. Amer. Math. Soc. **265** (1981), 447–484.

62, RUE DOUDEAUVILLE, 75018 PARIS, FRANCE  
E-mail address: LAMBRE at FRMAP711 (Bitnet)