

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Préface par Pierre Colmez : La courbe de Fargues et Fontaine</b> .....	1
1. L'anneau $\mathbf{B}_e$ .....	1
1.1. $\mathbf{B}_e$ est principal! .....	1
1.2. Anneaux de Fontaine .....	2
1.3. Questions sur $\mathbf{B}_e$ .....	3
1.4. La courbe .....	5
2. Représentations de $G_K$ et objets dérivés .....	8
2.1. Les conjectures .....	8
2.2. Le lemme fondamental .....	11
2.3. Les Espaces de Banach de Dimension finie .....	14
2.4. Les presque $C$ -représentations .....	19
2.5. Les $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur l'anneau de Robba .....	22
3. Les courbes $X_E, Y_E$ et les espaces analytiques associés .....	29
3.1. L'anneau $A_E$ .....	30
3.2. La courbe algébrique $X_E$ .....	33
3.3. La courbe analytique $Y_E^{\text{ad}}$ et son quotient $X_E^{\text{ad}}$ .....	35
4. Fibrés sur $X_E$ .....	37
4.1. Modifications de fibrés .....	37
4.2. Le fibré $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$ .....	37
4.3. Classification des fibrés sur $X_E$ .....	38
4.4. Fibrés et $\varphi$ -modules .....	38
5. Fibrés $G_K$ -équivariants et représentations de $G_K$ .....	40
5.1. Fibrés $G_K$ -équivariants et $(G_K, B)$ -paires .....	40
5.2. $(\varphi, N)$ -modules et fibrés $G_K$ -équivariants .....	41
5.3. Le théorème de monodromie $p$ -adique .....	43
5.4. Descente à une extension de type de Lie .....	44
<b>Bibliographie de la préface</b> .....	47
<b>Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge <math>p</math>-adique</b> .....	51
<b>Leitfaden</b> .....	53
<b>1. Fonctions holomorphes de la variable <math>p</math> et anneaux de périodes</b> .....	55
Introduction .....	55

1.1. Hypothèses et notations .....	56
1.2. $\mathcal{O}_E$ -vecteurs de Witt .....	56
1.2.1. Le cas « classique » ([16]) .....	57
1.2.2. Le cas « tordu » : déformation du relèvement de Teichmüller ...	60
1.3. Les anneaux $\mathcal{E}$ , $B^b$ et $B^{b,+}$ .....	62
1.4. Normes de Gauss .....	64
1.4.1. Définition et premières propriétés .....	64
1.4.2. Multiplicativité .....	67
1.4.3. Topologie définie par les normes de Gauss sur $\mathbf{A}$ .....	68
1.5. Polygones de Newton des éléments de $B^b$ .....	69
1.5.1. Transformée de Legendre .....	69
1.5.2. Polygone de Newton .....	70
1.6. Les algèbres de Fréchet $B_I$ .....	71
1.6.1. Définition et premières propriétés .....	71
1.6.2. Changement du corps $E$ .....	74
1.6.3. Polygone de Newton des éléments de $B_I$ .....	74
1.6.4. Le cas particulier où $0 \in I$ .....	78
1.6.5. Caractérisation des éléments inversibles de $B_I$ en termes de polygone de Newton .....	79
1.7. Les cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ et $F$ maximale complet .....	81
1.7.1. Le cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ .....	81
1.7.2. Interprétation comme perfectisé d'anneaux de fonctions holomorphes de la variable $[\pi_F]$ , le cas $\varphi(X) = X^q$ .....	83
1.7.3. Interprétation comme perfectisé d'anneaux de fonctions holomorphes de la variable $[\pi_F]$ , le cas $\varphi(X) = (1 + X)^q - 1$ .....	85
1.7.4. Interprétation de la symétrie entre $E$ et $F$ .....	85
1.7.5. Le cas maximale complet .....	87
1.8. Le corps valué hensélien $\mathcal{E}^\dagger$ et l'anneau de Robba .....	87
1.9. Extension des fonctions holomorphes au bord .....	89
1.10. L'anneau $B^+$ .....	92
1.10.1. Définition et premières propriétés .....	92
1.10.2. Les bivecteurs .....	94
1.10.3. Lien avec les anneaux de périodes cristallines .....	96
1.10.4. L'anneau $\overline{B}$ .....	97
<b>2. Zéros des fonctions holomorphes : le cas <math>F</math> algébriquement clos</b> .....	<b>99</b>
Introduction .....	99
2.1. L'anneau $A^b$ et le morphisme $\theta$ .....	100
2.1.1. Généralités .....	100
2.1.2. Le morphisme $\theta$ .....	102
2.1.3. Le cas de l'anneau des entiers d'un corps $p$ -adique .....	105
2.2. Étude de certains idéaux et valuations des vecteurs de Witt .....	106
2.2.1. Éléments primitifs .....	106

2.2.2. Idéaux de $\mathbf{A}$ engendrés par un élément de degré 1 .....	106
2.3. L'espace $Y$ des idéaux de degré 1 des vecteurs de Witt .....	116
2.3.1. Définition et structure métrique .....	116
2.3.2. Paramétrisation par les points d'un groupe de Lubin-Tate à valeurs dans $\mathcal{O}_F$ .....	118
2.3.3. Point de vue de Berkovich .....	121
2.3.4. Effet d'un changement du corps $E$ .....	122
2.4. Factorisation de Weierstrass des éléments primitifs de degré $> 1$ ....	123
2.4.1. Zéros des éléments de $B_I$ .....	126
2.5. Les $B_I$ sont principaux pour une couronne compacte .....	128
2.6. Factorisation de Weierstrass au voisinage de 0 .....	129
2.7. Diviseur d'une fonction holomorphe .....	130
2.7.1. L'anneau $B_{\text{dR}}^+$ associés à un point de $Y$ .....	130
2.7.2. L'application diviseur .....	131
<b>3. Zéros des fonctions holomorphes : le cas <math>F</math> parfait quelconque</b> .....	<b>133</b>
Introduction .....	133
3.1. Étude de l'ensemble $ Y_F $ par descente galoisienne .....	133
3.1.1. Un calcul de cohomologie galoisienne .....	133
3.1.2. Description de l'ensemble $ Y_F $ par descente galoisienne .....	135
3.1.3. Corps résiduels .....	136
3.2. Le théorème de presque pureté .....	139
3.3. En résumé .....	140
3.4. Zéros des fonctions holomorphes .....	141
3.4.1. Extension à $B_I$ de l'application d'évaluation en un point .....	141
3.4.2. Zéros et polygones de Newton .....	142
3.4.3. Produits de Weierstrass .....	143
3.5. Diviseurs et idéaux .....	144
3.5.1. Les $B_I$ sont principaux pour $I$ compact .....	144
3.5.2. Diviseurs positifs et idéaux fermés .....	145
3.5.3. L'anneau de Robba est de Bezout .....	146
3.5.4. Fonctions méromorphes et leurs diviseurs .....	146
3.6. Calcul des invariants sous Galois de $B_{\widehat{F}}$ .....	147
<b>4. <math>\mathbb{Q}_p</math>-espaces vectoriels formels et périodes des groupes <math>p</math>-divisibles</b> .....	<b>149</b>
Introduction .....	149
4.1. Les $E$ -espaces de Banach $B^{\varphi^h = \pi^d}$ .....	150
4.1.1. Quelques calculs préliminaires .....	150
4.1.2. Structure d'espace de Banach sur $B^{\varphi^h = \pi^d}$ .....	151
4.1.3. Description via l'anneau $\overline{B}$ .....	152
4.1.4. Changement d'uniformisante .....	152
4.1.5. Changement de corps $E$ .....	152
4.2. L'espace de Banach $B^{\varphi^h = \pi^d}$ vit dans les bivecteurs lorsque $d \leq h$ ...	153

4.3. $\mathcal{O}$ -modules $\pi$ -divisibles .....	155
4.3.1. Généralités et théorie de Dieudonné .....	155
4.3.2. Exemple .....	156
4.3.3. Quasi-logarithmes et leur interprétation rigide analytique .....	160
4.4. Description de $B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de $\mathcal{O}$ -modules $\pi$ -divisibles lorsque $d \leq h$ .....	163
4.5. Lien avec l'application des périodes d'un groupe $p$ -divisible .....	168
4.5.1. Un résultat de relèvement .....	168
4.5.2. Interprétation de l'isomorphisme $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de quasi-logarithmes .....	169
4.5.3. Application des périodes .....	174
4.6. Espaces vectoriels formels et spectraux .....	178
4.6.1. $E$ -espaces vectoriels formels .....	178
4.6.2. $E$ -espace vectoriel formel associé à un $\mathcal{O}$ -module formel $\pi$ -divisible en caractéristique positive .....	179
4.6.3. Relèvement canonique en caractéristique 0 .....	180
4.6.4. Espace vectoriel formel associé à un $\mathcal{O}$ -module formel $\pi$ -divisible en inégales caractéristiques .....	181
4.6.5. Espaces spectraux .....	183
4.6.6. Espaces de Banach spectraux associés aux espaces vectoriels formels .....	192
4.6.7. Interprétation géométrique de l'application des périodes .....	193
<b>5. Courbes</b> .....	197
Introduction .....	197
5.1. Généralités .....	197
5.2. Construction de courbes .....	199
5.2.1. Anneaux presque euclidiens .....	199
5.2.2. Construction de courbes affines .....	200
5.2.3. Construction de courbes complètes .....	201
5.3. Fibrés vectoriels sur les courbes .....	204
5.3.1. Classification par recollement .....	204
5.3.2. Opérations sur les fibrés en termes de données de recollement ..	205
5.4. Sur quelques courbes particulières .....	205
5.5. Filtrations de Harder-Narasimhan .....	207
5.5.1. Formalisme général .....	207
5.5.2. Exemples .....	209
5.6. Classification de fibrés .....	215
5.6.1. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann .....	215
5.6.2. Une remarque sur les fibrés de rang 2 .....	217
5.6.3. Opérations sur les fibrés .....	219
5.6.4. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann généralisées .....	224

<b>6. La courbe fondamentale lorsque <math>F</math> est algébriquement clos</b> .....	237
Introduction .....	237
6.1. L'algèbre graduée $P_{F,E,\pi}$ : définition et généralités .....	237
6.1.1. Définition .....	237
6.1.2. Changement d'uniformisante .....	238
6.1.3. Changement de corps $E$ .....	238
6.2. L'algèbre $P$ est graduée factorielle .....	238
6.2.1. Énoncé du théorème .....	238
6.2.2. Diviseurs sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ .....	239
6.2.3. Surjectivité de l'application diviseur : produits de Weierstraß ..	241
6.3. Produits de Weierstraß associés aux éléments de degré 1 et logarithme	244
6.4. La suite exacte fondamentale .....	246
6.5. La courbe lorsque $F$ est algébriquement clos .....	248
6.5.1. Définition et théorème principal .....	248
6.6. Description en termes des fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ .....	250
6.7. La courbe comme quotient d'un ind-schéma .....	251
<b>7. La courbe fondamentale pour <math>F</math> parfait quelconque</b> .....	253
Introduction .....	253
7.1. Calculs de cohomologie galoisienne .....	253
7.1.1. Cohomologie galoisienne de $B_{\text{dR}}^+$ .....	253
7.1.2. Cohomologie galoisienne de $B_e$ .....	254
7.2. L'anneau $B_e$ est de Dedekind .....	256
7.3. La courbe .....	258
7.4. Description en termes de fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ .....	260
7.5. Changement de corps $E$ .....	260
7.6. Changement de corps $F$ .....	261
7.7. La courbe associée à $\bar{F}$ .....	262
7.8. Choix d'un fibré ample et $\varphi$ -modules de rang un sur $B$ .....	263
7.9. Retrouver la courbe analytique à partir de la courbe schématique : le théorème de Runge .....	266
<b>8. Classification des fibrés vectoriels : le cas <math>F</math> algébriquement clos</b> .....	269
Introduction .....	269
8.1. Deux résultats sur les périodes des groupes $p$ -divisibles .....	269
8.1.1. Le cas de l'espace de Lubin-Tate .....	270
8.1.2. Le cas de l'espace de Drinfeld .....	271
8.2. Fibrés vectoriels .....	274
8.2.1. Fibrés en droites .....	274
8.2.2. Fibrés de rang supérieur : définitions et premières propriétés ...	277
8.2.3. Lien avec les isocristaux .....	278
8.2.4. Classification des fibrés : énoncé du théorème .....	280

8.3. Preuve du théorème de classification via les périodes des groupes $p$ -divisibles .....	280
8.3.1. Modifications de fibrés associées aux groupes $p$ -divisibles .....	280
8.3.2. Preuve du théorème .....	282
8.3.3. Interprétation en termes de périodes de Hodge-Tate et de l'isomorphisme entre les deux tours .....	285
8.4. Preuve via les espaces de Banach-Colmez .....	286
8.4.1. Espaces de Banach-Colmez .....	286
8.4.2. Preuve du théorème 8.2.10 .....	288
8.5. Classification des fibrés sur $\overline{E}$ .....	288
8.6. Simple connexité géométrique de la courbe .....	289
<b>9. Classification des fibrés : le cas <math>F</math> parfait</b> .....	<b>291</b>
Introduction .....	291
9.1. Fibrés équivariants .....	291
9.1.1. Définition .....	291
9.1.2. Deux critères simples de continuité de l'action .....	293
9.1.3. Équivariance de la filtration de Harder-Narasimhan .....	294
9.1.4. Torsion par un 1-cocycle .....	295
9.2. Classification des fibrés équivariants semi-stables lorsque $F$ est algébriquement clos .....	295
9.2.1. Extensions équivariantes .....	296
9.3. Descente galoisienne .....	297
9.4. Classification des fibrés .....	300
9.5. Calcul du groupe fondamental de la courbe .....	301
<b>10. Faiblement admissible implique admissible et le théorème de la monodromie <math>p</math>-adique</b> .....	<b>303</b>
Introduction .....	303
10.1. Fibrés $G_K$ -équivariants .....	304
10.1.1. Action du groupe de Galois $G_K$ sur la courbe .....	304
10.1.2. Fibrés équivariants et $B_e$ -représentations .....	305
10.1.3. Descente à une extension arithmétiquement profinie .....	305
10.1.4. Classification des fibrés semi-stables équivariants .....	306
10.2. Fibrés équivariants cristallins .....	306
10.2.1. Fibrés équivariants associés aux isocristaux .....	306
10.2.2. Fibrés équivariants plats .....	307
10.2.3. Quelques calculs d'invariants sous Galois .....	309
10.2.4. Fibrés équivariants plats sur $Y \setminus V(t)$ .....	310
10.2.5. Fibrés équivariants cristallins .....	311
10.3. Fibrés log-cristallins .....	314
10.3.1. L'anneau $B_{\log}$ .....	314
10.3.2. Fibré équivariant associé à un $(\varphi, N)$ -module .....	315

10.3.3. Description en termes de la surface $X_{\log}$ .....	318
10.3.4. Description en termes de $B$ -paires .....	319
10.3.5. Fibrés log-cristallins .....	322
10.4. Fibrés équivariants de de Rham .....	323
10.4.1. $B_{\text{dR}}^+$ -représentations génériquement plates .....	323
10.4.2. Fibrés de de Rham .....	326
10.5. Faiblement admissible implique admissible .....	326
10.5.1. Rappels sur les $\varphi$ -modules filtrés .....	326
10.5.2. Classification des fibrés cristallins en termes de $\varphi$ -modules filtrés .....	327
10.5.3. Faiblement admissible implique admissible .....	328
10.6. de Rham implique potentiellement log-cristallin .....	329
10.6.1. Fibrés log-cristallins et $\varphi$ -modules filtrés .....	329
10.6.2. Fibrés potentiellement log-cristallins .....	330
10.6.3. Énoncé du théorème .....	331
10.6.4. Le cas semi-stable .....	332
10.6.5. Dévissage à un énoncé de cohomologie galoisienne .....	333
<b>11. <math>\varphi</math>-modules et fibrés</b> .....	<b>343</b>
Introduction .....	343
11.1. $\varphi$ -modules sur $B^+$ .....	343
11.1.1. Définitions .....	343
11.1.2. Module gradué associé à un $\varphi$ -module .....	345
11.1.3. Changement de corps $E$ .....	345
11.1.4. Les $\varphi$ -modules $A(\lambda)$ .....	347
11.1.5. Classification des $\varphi$ -modules .....	347
11.1.6. $\varphi$ -modules sur $B^+$ et fibrés .....	353
11.1.7. Variante : $\varphi$ -modules sur $B_{\rho}^+$ et $F$ -isocristaux .....	355
11.2. $\varphi$ -modules sur $B$ et l'anneau de Robba d'après Kedlaya .....	357
11.2.1. Définitions et premières propriétés .....	357
11.2.2. Propriété de faisceau de $I \mapsto B_I$ .....	358
11.2.3. Recollement de fibrés .....	359
11.2.4. Descente galoisienne .....	362
11.2.5. Fibrés $\varphi$ -équivariants .....	364
11.3. GAGA d'après Kedlaya-Liu .....	367
11.4. En résumé .....	370
11.5. Le théorème de Berger .....	371
<b>Bibliographie</b> .....	<b>373</b>
<b>Index</b> .....	<b>379</b>
<b>Index terminologique</b> .....	<b>381</b>