ELLIPTIC THEORY
IN DOMAINS WITH BOUNDARIES OF MIXED DIMENSION

by Guy DAVID, Joseph FENEUIL & Svitlana MAYBORODA

Abstract. — Take an open domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ whose boundary may be composed of pieces of different dimensions. For instance, Ω can be a ball on $\mathbb{R}^3$, minus one of its diameters D, or a so-called saw-tooth domain, with a boundary consisting of pieces of 1-dimensional curves intercepted by 2-dimensional spheres. It could also be a domain with a fractal (or partially fractal) boundary. Under appropriate geometric assumptions, essentially the existence of doubling measures on Ω and $\partial\Omega$ with appropriate size conditions—we construct a class of second order degenerate elliptic operators L adapted to the geometry, and establish key estimates of elliptic theory associated to those operators. This includes boundary Poincaré and Harnack inequalities, maximum principle, and Hölder continuity of solutions at the boundary. We introduce Hilbert spaces naturally associated to the geometry, construct appropriate trace and extension operators, and use them to define weak solutions to $Lu = 0$. Then we prove De Giorgi-Nash-Moser estimates inside Ω and on the boundary, solve the Dirichlet problem and thus construct an elliptic measure ω_L associated to L. We construct Green functions and use them to prove a comparison principle and the doubling property for ω_L. Since our theory emphasizes measures, rather than the geometry per se, the results are new even in the classical setting of a half-plane $\mathbb{R}^2_+$ when the boundary $\partial\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}$ is equipped with a doubling measure μ singular with respect to the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. Finally, the present paper provides a generalization of the celebrated Caffarelli-Sylvestre extension operator from its classical setting of $\mathbb{R}^{n+1}_+$ to general open sets, and hence, an extension of the concept of fractional Laplacian to Ahlfors regular boundaries and beyond.

Résumé. **(Théorie elliptique dans des domaines à frontières de dimension mixte)** — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine dont la frontière peut contenir des morceaux de dimensions différentes. Par exemple, Ω peut être une boule de $\mathbb{R}^3$, moins l'un de ses diamètres D, ou un domaine en dents de scies, avec une frontière composée de morceaux de courbes et de morceaux de sphères. Ou encore, un domaine avec une frontière (partiellement) fractale. Avec des hypothèses géométriques convenables, essentiellement l'existence de mesures doublantes sur Ω et $\partial\Omega$ de tailles appropriées, on construit une classe d'opérateurs elliptiques d'ordre 2 dégénérés de manière adaptée à la géométrie, et on prouve les estimations clé associées à ces opérateurs L. Ceci inclue des inégalités de Poincaré et de Harnack, le principe du maximum, et la continuité Höldérienne à la frontière des solutions. On introduit les espaces de Hilbert naturellement associés à la géométrie, on construit les opérateurs de trace et d'extension associés, on les utilise pour définir les solutions faibles de $Lu = 0$, puis on prouve les inégalités de De Giorgi-Nash-Moser dans Ω et à la frontière, on résout le problème de Dirichlet, qu'on utilise pour construire une mesure elliptique ω_L associée à L. On construit les fonctions de Green et on les utilise pour obtenir le principe de comparaison et la propriété doublante pour ω_L. Notre théorie étant centrée sur les mesure, en pas seulement sur la geometrie de Ω, les résultats sont nouveaux même dans le cas classique du demi-plan $\mathbb{R}^2_+$, mais où la frontière $\partial\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}$ est munie d'une mesure doublante μ singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Finalement, ce papier donne une généralisation du célèbre opérateur d'extension de Caffarelli-Sylvestre, depuis son cadre classique de $\mathbb{R}^{n+1}_+$ vers des ouverts plus généraux, et donc une extension du concept de Laplacien fractionnaire à des frontières Ahlfors regulières et au delà.