

TABLE DES MATIÈRES

Préface	xi
Partie I. Le groupe fondamental	1
1. Topologie & homotopie	3
1.1. Espaces topologiques & homéomorphismes	3
1.2. Parties convexes et leurs bords	8
1.3. Questions classiques de topologie	10
1.4. Homotopies	11
1.5. Actions de groupes	15
1.6. Exercices	22
2. Topologie quotient et applications	27
2.1. Topologie quotient	27
2.2. Applications de quotient	31
2.3. Écraser un sous-espace	34
2.4. Exercices	38
3. Le groupe fondamental	41
3.1. Premières définitions	41
3.2. Le plan épointé	42
3.3. Propriétés du groupe fondamental	48
3.4. Le théorème du point fixe de Brouwer	54
3.5. Van Kampen : la moitié facile	55
3.6. Exercices	57
4. Revêtements	61
4.1. Revêtements	61
4.2. Relèvements	67
4.3. Monodromie	71
4.4. Le groupe de Galois	72
4.5. Exercices	75
5. La classification des revêtements	77
5.1. Les sous-groupes associés à un revêtement	77

5.2. Le revêtement universel	79
5.3. La correspondance galoisienne	82
5.4. Les revêtements du huit	84
5.5. Exercices	89
6. Catégories et applications	93
6.1. Catégories	93
6.2. Foncteurs	95
6.3. Les G -ensembles	98
6.4. Équivalences de catégories	101
6.5. Retour sur la classification des revêtements	104
6.6. Van Kampen : la partie difficile	107
6.7. Produits amalgamés de groupes	111
6.8. Exercices	115
Partie II. Homologie	117
7. Complexes simpliciaux	119
7.1. Définition & exemples	119
7.2. Réalisations topologiques	122
7.3. Quotients	128
7.4. Posets	130
7.5. Sagemath	141
7.6. Exercices	143
8. Homologie des complexes simpliciaux	147
8.1. Homologie mod 2	148
8.2. Homologie (cas général)	152
8.3. Fonctorialité	158
8.4. Exercices	162
9. Outils d'algèbre homologique	165
9.1. Le lemme du zig-zag	165
9.2. Mayer-Vietoris & Baratt-Whitehead	168
9.3. Lemme des 5 et divisions barycentriques	171
9.4. Exercices	177
10. Théories homologiques	181
10.1. Introduction	181
10.2. Les axiomes de Eilenberg & Steenrod	183
10.3. Homologie singulière	185
10.4. Homologie réduite	189
10.5. Homologie relative, excision & Mayer-Vietoris	190
10.6. La comparaison simpliciale/singulière	195

10.7. Exercices	201
11. Homologie des CW-complexes	203
11.1. Les CW-complexes	204
11.2. Caractéristiques d'Euler	207
11.3. L'homologie des CW-complexes	209
11.4. Espaces projectifs réels	218
11.5. Exercices	221
12. Cohomologie & autres compléments	225
12.1. Le théorème de Hurewicz	225
12.2. Changement de coefficients	228
12.3. La formule de Künneth	230
12.4. Cohomologie	232
12.5. Structures multiplicatives	236
12.6. Multiplication simpliciale	240
12.7. Exercices	243
13. Homologie des variétés	245
13.1. Variétés	245
13.2. Orientations	247
13.3. Dualité de Poincaré	248
13.4. Approche intuitive	252
13.5. Quelques points techniques	254
13.6. Preuve de la dualité de Poincaré	255
13.7. Exercices	257
Partie III. Algèbre homologique	261
14. Foncteurs dérivés	263
14.1. Catégories de modules	263
14.2. Modules projectifs	266
14.3. Résolutions	267
14.4. Définition des foncteurs dérivés	269
14.5. Un exemple complet : Tor	273
14.6. Homologie des groupes & Applications	275
14.7. Exercices	280
15. Généralisations	283
15.1. Foncteurs dérivés à droite	283
15.2. Modules injectifs	284
15.3. Foncteurs dérivés : cas général	288
15.4. Objets acycliques	289
15.5. Un mot sur les catégories abéliennes	291

15.6. Exercices	291
16. Faisceaux et cohomologie de de Rham	293
16.1. Faisceaux	293
16.2. Suites exactes	294
16.3. Faisceaux injectifs & cohomologie	296
16.4. Faisceaux acycliques	299
16.5. Calcul par les formes différentielles	302
16.6. Calcul par les simplexes singuliers	304
16.7. Exemples	306
16.8. Conseils de lecture	308
Bibliographie	311
Index	313