Préface

1. La genèse du texte

La formule des traces pour un groupe réductif connexe sur un corps de caractéristique zéro est due à James Arthur. On renvoie à [14] pour une introduction et une bibliographie complète.

Le cas tordu a fait l'objet du *Friday Morning Seminar* à l'*Institute for Advanced Study* (IAS) de Princeton en 1983-1984, souvent cité dans la littérature sous le nom de *Morning Seminar on the Trace Formula*. Lors de ce séminaire, les exposés ont été présentés par Laurent Clozel, Jean-Pierre Labesse et Robert Langlands. Les exposés 1, 2, 6, 7, 8 et 15 de Langlands ainsi que les exposés 3, 4, 5, 9, 12 et 13 de Labesse ont donné lieu à des notes, rédigées et distribuées au fur et à mesure. Les exposés 10, 11 et 14 de Clozel n'ont pas été rédigés. Ces notes, citées [20] dans la suite, sont accessibles sur la page web de Langlands à l'IAS. Toutefois, ayant été rédigées dans l'urgence, elles laissent à désirer sur de nombreux points.

Notre ambition est de donner, en nous basant pour l'essentiel sur les notes de [20], une version complète de la preuve de la formule des traces dans le cas tordu dans sa version primitive, c'est-à-dire non invariante. Ce travail s'inscrit dans le projet de l'équipe parisienne animée par L. Clozel et J.-L. Waldspurger pour rédiger la variante tordue de la formule des traces et de sa stabilisation, outil indispensable sur lequel se fondent les travaux récents d'Arthur sur les groupes classiques. En effet, ceux-ci reposent sur la stabilisation de la formule des traces pour $\mathrm{GL}(n)$ tordu par l'automorphisme $x \mapsto {}^t x^{-1}$.

Cette rédaction a dans un premier temps été menée en collaboration entre Laurent Clozel et Jean-Pierre Labesse. On doit savoir gré à Clozel d'avoir accepté de tenter cette aventure où Labesse craignait de s'engager seul, même si, en définitive, cette collaboration s'est interrompue et si c'est Jean-Loup Waldspurger qui a collaboré pour la fin de ce travail. Il convient de dire que Clozel a écrit un premier jet pour certaines sections, relu diverses versions préliminaires et participé à de nombreuses discussions qui ont permis de progresser dans la compréhension de points obscurs. Qu'il en soit ici remercié.

Nous devons bien entendu remercier tout particulièrement R. P. Langlands de nous avoir permis d'utiliser les notes du séminaire de Princeton [20] et singulièrement le texte de son dernier exposé qui contient une esquisse des parties les plus originales et les plus difficiles de la preuve dans le cas tordu. Ce texte a été notre guide, même si nous avons dû nous en écarter en certains points.

2. Contenu des divers chapitres

Nous allons maintenant décrire brièvement le contenu des parties et chapitres. Les deux premières parties sont le plus souvent une simple réexposition du contenu de [2], [3] et, partiellement, [4] avec quelques compléments pour les adapter au cas tordu. Comme dans [20], mais de manière plus systématique, nous avons préféré réexposer ces articles plutôt que de renvoyer à la littérature car, avec le temps, la structure des preuves est apparue plus clairement et il est désormais possible de les présenter dans un ordre plus naturel et plus facile à suivre pour le lecteur ; au surplus cela rend l'extension au cas tordu transparente.

Dans la troisième partie, la torsion joue un rôle plus important, en compliquant quelque peu les preuves de convergence, mais là encore, comme dans [20], nous suivons de près [2] et [3]. Les trois premières parties couvrent les exposés 1 à 14 de [20].

La quatrième partie, qui donne l'extension au cas tordu de [5] et [6], reprend pour l'essentiel le contenu de [20, Lecture 15] à ceci près que nous avons dû nous en écarter quelque peu pour le calcul de certains termes. Dans cette partie, la torsion joue un rôle essentiel en introduisant des termes qui étaient absents ou négligeables dans le cas classique (c.-à-d. non tordu) et dont l'étude est très délicate.

Première partie. Géométrie et combinatoire. Cette partie contient trois chapitres sur la géométrie des groupes et espaces tordus ainsi que sur la combinatoire des cônes et convexes associés aux systèmes de racines. Sauf naturellement dans le chapitre 2, qui introduit les espaces tordus, la torsion ne joue guère de rôle. Mais, faute de référence commode et comportant des preuves complètes ainsi que pour convaincre le lecteur que l'extension au cas tordu était facile, il nous a souvent paru nécessaire d'exposer en détail le cas classique.

Chapitre 1. *Racines et convexes.* Nous rappelons tout d'abord la construction des espaces vectoriels $\mathfrak{a}_P^Q$ associés aux paires de sous-groupes paraboliques $P \subset Q$ d'un groupe réductif G défini sur un corps de nombres F, ainsi que la propriété fondamentale pour la combinatoire des cônes associés aux racines : à savoir le fait que les bases Δ_P^Q sont obtuses. Puis nous rappelons quelques propriétés, élémentaires et classiques, des éléments et des sous-ensembles des groupes de Weyl, qui interviennent fréquemment en particulier via la décomposition de Bruhat. Nous en fournissons des preuves lorsque nous ne connaissons pas de références commodes. Ensuite nous donnons des énoncés concernant les familles de cônes et de convexes attachées aux systèmes de racines et leur relation avec les (G, M)-familles. Nous reprenons pour l'essentiel les preuves données dans [20, Lecture 13] où on voit que beaucoup d'énoncés combinatoires sont des conséquences de la simple identité matricielle $\tau\widehat{\tau} = \widehat{\tau}\tau = 1$ (*cf.* proposition 1.7.2).

Nous n'avons pas toujours repris les preuves classiques. De plus, certains énoncés semblent nouveaux, quoique implicites chez Arthur ou Langlands ; c'est par exemple le cas des lemmes 1.4.3 et 1.8.4. La preuve des propriétés 1.10.4 et 1.10.5 des (G, M)-familles à partir de la combinatoire des cônes, via la transformée de Fourier est inspirée par le traitement de la combinatoire dans [20, Lecture 15]. La clef en est l'énoncé de globalisation 1.10.1 qui lui aussi semble nouveau.

Chapitre 2. *Espaces tordus.* Pour l'étude de la formule des traces tordue, il est commode d'utiliser le langage des espaces tordus introduit dans [26] (certains préfèrent parler de groupes tordus). Nous en rappelons la définition. Notre cadre, celui des espaces tordus, est une variante légèrement plus générale du cadre utilisé dans le *Morning Seminar* et repris par Arthur dans divers articles ultérieurs. C'est, aux notations près, le cadre de [25].

L'extension au cas tordu de la combinatoire des cônes associés aux poids et racines est immédiate en observant que la seule propriété des systèmes de racines utilisée par cette combinatoire dans le cas usuel (non tordu), est que les racines simples forment une base obtuse ; or la généralisation au cas tordu de cette propriété est elle aussi immédiate.

Dans la section 2.10 on montre que le volume de certains convexes peut se calculer au moyen de polynômes du premier degré en chaque variable pour un choix astucieux des variables paramétrant le convexe. Ceci montre que dualement des termes définis au moyen de certaines (G, M)-familles peuvent s'exprimer au moyen de produits de dérivées du premier ordre en chacune de ces variables. Ce résultat, de nature combinatoire, dû à Arthur dans le cas non tordu et que nous généralisons, peut être vu comme un cas très simple de résultats plus généraux de Finis et Lapid [22]. Ceci permet d'étendre au cas tordu les techniques d'Arthur nécessaires pour la preuve du théorème 14.2.1.

On introduit ensuite la fonction caractéristique de cône $\widetilde{\sigma}_Q^R$ qui joue un rôle essentiel dans « l'identité fondamentale » (qui fait l'objet du chapitre 8). Sa définition est légèrement plus subtile que pour son analogue non tordu σ_Q^R.

Le chapitre se conclut par diverses inégalités liées à la géométrie de cônes qui elles sont spécifiques au cas tordu (en particulier le lemme 2.12.1 qui provient de [20, Lecture 15]).

Chapitre 3. *Théorie de la réduction.* Ce chapitre contient essentiellement la définition et les propriétés de la fonction $\mathbf{H}_0$ sur les groupes adéliques ainsi que des rappels sur la théorie de la réduction. Il s'agit, là encore, de propriétés très classiques ne faisant pas intervenir la torsion ; de fait, la torsion n'intervient que très peu dans tout ce chapitre.

La fonction $\mathbf{H}_0$, qui se définit via la décomposition d'Iwasawa, fait le lien entre la géométrie du groupe et celle des espaces vectoriels associés aux racines. Les lemmes du paragraphe 3.3, qui permettent le contrôle de $\mathbf{H}_0(wn)$ lorsque n est dans l'unipotent et w dans le groupe de Weyl, sont pour l'essentiel empruntés à [20, Lecture 6]). Ces lemmes jouent un rôle important dans de nombreuses estimations, en particulier dans le chapitre suivant. La partition de la section 3.6 et les estimées de la section 3.7 sont empruntées à [2] (voir aussi [20, Lectures 3 et 4]).

Deuxième partie. Théorie spectrale, troncatures et noyaux. Cette partie est pour l'essentiel un exposé de résultats classiques sur l'opérateur de troncature et la décomposition spectrale de l'espace des formes automorphes, qu'il était nécessaire de rappeler au moins pour introduire les notations. La torsion ne joue encore ici qu'un rôle accessoire. Toutefois quelques nouveautés apparaissent ici où là.

Chapitre 4. *L'opérateur de troncature.* Ce chapitre rappelle des faits bien connus, dus à Arthur, sur l'opérateur de troncature. La torsion n'intervient pas du tout ici. On suit pour l'essentiel l'exposé 6 de Langlands [20, Lecture 6] qui soi-même s'inspire du contenu du premier paragraphe de l'article d'Arthur [3].

Le résultat technique le plus important de ce chapitre est le lemme 4.1.1 qui reprend [3, Lemma 1.1]. Les arguments de la preuve de ce lemme, essentiel pour la suite, semblent légèrement incomplets dans [3]. En effet, Arthur y utilise l'analogue de notre lemme 3.3.2 mais sous une forme forte : c'est-à-dire avec $c = 0$. Cette forme forte est prouvée dans les notes de Langlands pour les groupes de Chevalley avec un choix optimal du sous-groupe compact maximal [20, Lemma 6.3]. Mais il ne semble pas possible d'établir cette forme forte en toute généralité. Fort heureusement, la preuve donnée par Langlands dans [20], et que nous reprenons, montre que la forme forte du lemme 3.3.2 n'est pas indispensable pour prouver le lemme 4.1.1. Pour le reste les arguments sont dus à Arthur.

Le second résultat technique important est la proposition 4.3.2 qui reproduit le lemme 6.6 de [20, Lecture 6] lui-même emprunté à [3, Lemma 1.4]. Les arguments sont rappelés pour la commodité du lecteur.

Chapitre 5. *Formes automorphes et produits scalaires.* Après un bref rappel des résultats dus à Langlands sur le prolongement méromorphe des opérateurs d'entrelacement et des séries d'Eisenstein, on donne une preuve simple de la formule, également due à Langlands, pour le produit scalaire de deux séries d'Eisenstein tronquées, provenant de fonctions cuspidales, au moyen de la (G, M)-famille spectrale. La preuve, donnée ici, est celle qui est esquissée dans [20, Lecture 12] ; elle est beaucoup plus directe et élémentaire que celle rédigée par Arthur dans [3]. Dans le cas où les fonctions ne sont plus cuspidales, on ne dispose alors que d'une formule asymptotique. Le passage du cas cuspidal au cas non cuspidal est, lui, dû à Arthur. Nous nous contentons de citer le résultat et nous renvoyons à la littérature pour sa preuve.

Chapitre 6. *Le noyau intégral.* On introduit dans le cas tordu le noyau de la formule des traces et on en donne des estimées. On rappelle la factorisation de Dixmier-Malliavin que nous substituons dans diverses preuves à l'argument de paramétrix utilisé par Arthur, qui lui est emprunté à Duflo-Labesse.

Chapitre 7. *Décomposition spectrale.* La décomposition spectrale pour le noyau joue bien évidemment un rôle essentiel dans le développement spectral de la formule des traces. La décomposition spectrale, due à Langlands, est brièvement rappelée. Puis on donne des estimées pour la décomposition spectrale du noyau.

Troisième partie. La formule des traces grossière. L'adjectif grossier se veut la traduction de *coarse* utilisé dans [20]. Dans cette partie on introduit tout d'abord l'identité fondamentale (c'est la *basic identity* de [20]) qui donne naissance aux développements géométrique et spectral de la formule des traces. Puis on étudie le développement géométrique sous sa forme grossière mais aussi fine (quoique très rapidement). Ensuite on donne le développement spectral sous sa forme grossière (*coarse spectral expansion*). Ceci permet de prouver une première forme de la formule des traces ainsi que les propriétés formelles des termes des développements grossiers de deux membres de cette identité.

Chapitre 8. *Formule des traces : état zéro.* Ce chapitre contient la preuve de l'identité fondamentale qui est le point de départ de la formule des traces. On établit l'égalité de deux variantes tronquées pour la restriction à la diagonale du noyau. L'une se prête bien au développement géométrique, c'est-à-dire suivant les classes de conjugaison, l'autre au développement spectral. Dans le séminaire de Princeton une première forme de l'identité fondamentale est établie dans [20, Lecture 2] puis, une variante est donnée beaucoup plus tard dans [20, Lecture 9] ; c'est cette variante qui s'avère être la bonne et qui est donnée ici à la proposition 8.2.2. Il s'agit d'une simple identité combinatoire.

Chapitre 9. *Développement géométrique.* Ce chapitre est consacré à la décomposition suivant les classes de conjugaison de l'intégrale sur la diagonale du noyau après troncature « géométrique ». Le théorème 9.1.2 établit la convergence du développement géométrique grossier (c'est-à-dire du développement suivant les classes de conjugaison des parties quasi semi-simples). C'est une adaptation facile des argument de [2]. On suit pour cela [20, Lectures 3 et 4]. On continue ce chapitre en donnant l'expression des termes associés aux classes de conjugaison semi-simples au moyen d'intégrales orbitales pondérées suivant [20, Lecture 5] repris et développé dans [20, Lecture 9].

Un dernier et bref paragraphe est consacré au développement géométrique fin (*fine* $\mathfrak{o}$-*expansion*). Il nous a paru suffisant de renvoyer à la littérature pour le traitement des termes non semi-simples. D'ailleurs, il n'y a rien concernant ces termes dans [20]. En effet le traitement de ces termes n'a été fait, par Arthur, qu'après le *Morning Seminar*. Comme ceci a été rédigé par Arthur en y incluant le cas tordu (quoique dans un cadre légèrement plus restrictif que le cas général traité par ailleurs dans notre texte), il ne nous a pas paru nécessaire d'en reprendre la rédaction.

Chapitre 10. *Développement spectral grossier.* La décomposition spectrale suivant les « données cuspidales » induit le développement grossier (appelé *coarse spectral expansion* dans [20]). La preuve de sa convergence suit celle donnée par Langlands dans [20] qui avait fait l'objet des exposés 7 et 8, preuve qui est elle même inspirée de [3], quoique la torsion induise quelques complications techniques. La principale différence entre le cas classique et le cas tordu est que (avec les notations du théorème 10.3.4) dans le cas tordu, le développement spectral fait intervenir une combinaison linéaire de termes indexés par des paires de sous-groupes paraboliques standard $Q \subset R$:

$$\int_{\mathbf{Y}_{Q_0}} \widetilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T)\boldsymbol{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta_0,\chi}(x,x)\,\mathrm{d}x$$

pouvant donner des contributions non triviales alors que dans le cas classique seul le terme

$$\int_{\mathbf{X}_G} \boldsymbol{\Lambda}_1^T K_\chi(x,x)\,\mathrm{d}x$$

correspondant au cas $Q_0 = Q = R = G$, est non nul (pour T assez régulier).

Chapitre 11. *Formule des traces : propriétés formelles.* Les termes des développements géométriques et spectraux « grossiers » (appelés *coarse expansions* dans [20]) ont des propriétés formelles remarquables. La propriété essentielle est que l'on obtient, de façon asymptotique, des polynômes en la variable de troncature T. Les preuves dans le cas tordu sont une adaptation immédiate des preuves données par Arthur dans [4] pour le cas classique. Nous suivons ici [20, Lecture 13].

Au total, les trois premières parties fournissent une preuve complète de la variante tordue de l'ensemble des résultats d'Arthur contenus dans [2] et [3] ainsi qu'une partie des résultats de [4] (essentiellement ceux concernant les (G, M)-familles et les propriétés formelles des termes de la formule des traces).

Quatrième partie. Forme explicite des termes spectraux. Cette partie, la plus difficile et la plus originale de tout l'ensemble, est consacrée à l'extension au cas tordu des résultats des articles [5] et [6] d'Arthur. La difficulté nouvelle, par rapport au cas traité par Arthur, provient de la nécessité de prendre en compte des termes attachés à des couples $Q \subset R$ avec $Q \neq G$ évoqués ci-dessus. L'analyse de leur comportement est beaucoup plus délicate.

L'étude du développement spectral de ces termes utilise le calcul du produit scalaire de séries d'Eisenstein tronquées qui peut être fait explicitement, au moins dans le cas où on part de séries d'Eisenstein construites à partir de fonctions cuspidales, en se ramenant, moyennant une inversion d'intégrale, au calcul classique et rappelé ci-dessus (*cf.* chapitre 5). On obtient alors une expression au moyen de (G, M)-familles spectrales généralisant le cas classique. Toutefois, pour les termes attachés à des couples $Q \subset R$ avec $\theta_0(Q) \neq Q$, le calcul auquel on est naturellement amené suppose, pour être convergent, d'avoir auparavant déplacé le contour d'intégration en dehors du domaine naturel des variables spectrales (c'est-à-dire qu'elles ne sont plus imaginaires pures), du moins pour une partie d'entre elles. Cela se fait sans grosses difficultés. Mais, pour achever la combinatoire il convient, calcul fait, de revenir ensuite au domaine naturel pour les variables spectrales. Il faut donc déplacer des contours d'intégration dans des intégrales faisant intervenir des (G, M)-familles. C'est la démarche proposée par Langlands dans [20, Lecture 15]. Cela suppose des estimées sur les opérateurs d'entrelacements et leur dérivées que nous n'avons pas su obtenir.

Une méthode ne supposant pas de déplacement de contour, mais très délicate du point de vue combinatoire et analytique, découverte par Waldspurger, a permis de résoudre la question. On se ramène en définitive à l'expression donnée par Langlands.

Chapitre 12. *Introduction d'une fonction B.* Il s'agit d'adapter au cas tordu une technique due à Arthur et développée dans [5]. L'introduction d'une fonction B à support compact dans l'expression spectrale pour les termes évoqués ci-dessus va permettre de pallier l'absence d'estimées uniformes de certains développements spectraux. Comme dit plus haut le traitement des termes attachés aux couples $Q \subset R$ avec $Q \neq G$ est en général beaucoup plus difficile que le cas $Q = G$ traité par Arthur. La fonction B apparaît le plus souvent dans les calculs via sa transformée de Fourier. Celle-ci n'est pas à support compact, mais seulement à décroissance rapide, ce qui pose de délicats problèmes de convergence. Pour les traiter, on a besoin de majorations plus fines que dans les paragraphes précédents.

Chapitre 13. *Calcul de $A^T(B)$.* Ce chapitre peut être vu comme l'analogue tordu de la seconde partie de [5]. Il s'agit, entre autre, de tenir compte du caractère asymptotique des expressions en termes de (G, M)-familles obtenues par le calcul de produit scalaire dans le cas où les séries d'Eisenstein ne sont pas construites à partir de fonctions cuspidales. Ici encore une difficulté nouvelle provient des termes avec $\theta_0(Q) \neq Q$. La démarche empruntée ici fournit au total une expression plus simple que celle obtenue par Arthur dans le cas non tordu. Elles diffèrent par des termes asymptotiquement petits ; il en résulte qu'une des étapes combinatoires de [6, section 3] se trouve ainsi déjà prise en compte.

Chapitre 14. *Formules explicites.* Ce chapitre exploite l'analyse faite dans les deux chapitres précédents pour obtenir dans le cas tordu, l'analogue des formules obtenues par Arthur dans [6] donnant l'expression explicite des termes spectraux de la formule des traces.

La section 14.1 s'inspire du traitement proposé par Langlands dans [20, Lecture 15] mais en utilisant de façon systématique la globalisation des (G, M)-familles ce qui rend plus transparent l'argumentaire combinatoire et simplifie considérablement tant cette combinatoire que les notations.

L'objet de la section 14.2 est de débarrasser les divers termes de la fonction auxiliaire B en la faisant tendre vers 1. Pour cela il convient d'établir la convergence absolue de ces termes. Arthur utilise deux arguments :

(1) il suppose l'existence d'une normalisation des opérateurs d'entrelacements ;

(2) il montre que les termes à contrôler, qui font intervenir des (G, M)-familles définis au moyen des facteurs de normalisation, peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire de produits de dérivées du premier ordre en certaines variables. Ceci permet la réduction à un problème en rang un.

L'existence d'une normalisation a été établie pour la première fois par Langlands dans [20, Lecture 15]. Cette normalisation a depuis été reprise par Arthur. N'ayant rien à ajouter, nous nous contentons de citer Arthur [13] pour cette normalisation ainsi que [6] pour la fin de la preuve, à un détail près qui fait l'objet de la section 2.10.

Une dernière section reformule le développement spectral en exploitant la convergence absolue due à Finis, Lapid et Müller.

Preface (English translation of the Préface)

1. The genesis of the paper

The trace formula for an arbitrary connected reductive group over a number field is due to James Arthur. We refer the reader to [14] for an introduction and a complete bibliography.

The twisted case was the subject of the *Friday Morning Seminar* at the Institute for Advanced Study (Princeton) during the academic year 1983–1984, often quoted in the literature as *Morning Seminar on the Trace Formula*. During this seminar lectures were given by Laurent Clozel, Jean-Pierre Labesse and Robert Langlands. Notes for Lectures 1, 2, 6, 7, 8, and 15 by Langlands and Lectures 3, 4, 5, 9, 12, and 13 by Labesse were written up and made available to the audience a few days after each lecture. Lectures 10, 11, and 14 by Clozel were never written up. The lecture notes, quoted [20] in the sequel, are available on Langlands webpage. But, having been written quite hastily they contain quite a few errors, and in addition some proofs are not complete.

Our ambition is to give, following [20], a complete proof of the twisted trace formula in its primitive version, i.e., its noninvariant form. This is a part of the project of the Parisian team led by L. Clozel and J.-L. Waldspurger whose aim is to give a complete proof of the stablilization of the twisted trace formula which is the basic tool for Arthur's book on classical groups. In fact it relies on the stabilization of the trace formula for $\mathrm{GL}(n)$ twisted by the automorphism $x \mapsto {}^t x^{-1}$.

At the beginning, this book was a collaboration between Laurent Clozel and Jean-Pierre Labesse. We are grateful to Laurent Clozel to have agreed to try this adventure where Labesse was afraid to embark alone, even if, at some point, this collaboration was stopped and Jean-Loup Waldspurger helped to finish the job. It is fair to say that Clozel has written the first draft for some sections, read many preliminary versions and helped clear up many obscure points. We thank him very much for this.

We are glad to thank R. P. Langlands who allowed us to use the IAS lecture notes [20] and in particular the notes of his Lecture 15 which contains a sketch of the most original and most difficult part of the proof in the twisted case. These notes were our guide even if we had to follow a slightly different path at some point.

2. Contents of the chapters

We shall now describe briefly the contents of the various parts and chapters. The first two parts are often simply a rewriting of the contents of [2], [3] and part of [4] with a few additions to fit with the twisted case. As in [20], but in a more systematic way, we preferred to repeat the arguments rather than to refer to the literature since by now the structure of the proofs is much better understood and it is possible to present them in a more natural order, one that is easier to follow for the reader; moreover this makes the extension to the twisted case more or less obvious.

In the third part, the twisting plays a more important role, as it makes the proofs for the convergences slightly more complicated, but again, as in [20], we follow closely [2] and [3]. The first three parts cover Lectures 1 to 14 in [20].

The fourth part, which extends [5] and [6] to the twisted case, is mainly based on [20, Lecture 15] except that we have used a slightly different approach for the computation of some terms. In this part, the twisting plays an essential role by introducing terms that are absent or negligible in the classical (i.e., nontwisted) case and whose study is quite subtle.

Part 1. Geometry and combinatorics. This part contains three chapters on the geometry of groups and twisted spaces, and also on the combinatorics of cones and convex sets attached to root systems.

Except, of course, in Chapter 2 the twisting plays barely no role. But by lack of a convenient reference with complete proofs and also to convince the reader that the extension to the twisted case was easy we thought it better to give a detailed account for the classical case.

Chapter 1. *Roots and convex sets.* We recall first the construction of vector spaces $\mathfrak{a}_P^Q$ attached to pairs of parabolic subgroups $P \subset Q$ in a reductive group G over a number field F, and the fundamental property for the combinatorics of cones attached to root systems: namely that basis Δ_P^Q are obtuse. Then we recall some classic and elementary properties of elements and subsets of Weyl groups that arise quite often in particular when using Bruhat decomposition. We give proofs when we don't know of any easily accessible reference. Then we give statements for family of cones and convex sets attached to root systems and their relation to (G, M)-families. Most of the time we follow the proofs given in [20, Lecture 13] where it is shown that many of these statements are consequences of the simple matrix identity $\tau\hat{\tau} = \hat{\tau}\tau = 1$ (cf. Proposition 1.7.2).

Some of our proofs do not follow the classical patterns. Moreover some of the statements seem to be new, albeit implicit in Langlands or Arthur. This is, for example, the case of Lemmas 1.4.3 and 1.8.4. The proof of Lemmas 1.10.4 and 1.10.5 for (G, M)-families using, via a Fourier transform, the combinatorics of cones is inspired by the use of this combinatorics in [20, Lecture 15]. The key is the globalization statement 1.10.1 that also seems new.

Chapter 2. *Twisted spaces.* To study the twisted trace formula it is convenient to use the language of twisted spaces introduced in [26] (some prefer to speak of twisted groups). We recall the definition. Our setting, twisted spaces, is a slightly more general variant of the setting used in the Morning Seminar and again by Arthur in the papers written after it. Up to notation this is the setting used in [25].

The extension to the twisted case of the combinatorics of cones associated to roots and weights is immediate when observing that it only relies on the following fact: simple roots define an obtuse basis and that this is also the case for the corresponding basis that arise in the twisted case.

In Section 2.10 we show that the volume of certain convex sets can be computed in terms of polynomials of degree one in each variable for a good choice of the parameters defining the convex set. This shows that dually some terms defined by certain (G, M)-families can be computed in terms of products of derivatives of first order in each of these variables. This combinatorial result, due to Arthur in the nontwisted case, can be seen as a very simple instance of quite general results of Finis and Lapid [22]. This allows to extend to the twisted case Arthur's techniques in order to prove Theorem 14.2.1.

We then introduce $\widetilde{\sigma}_Q^R$ the characteristic function of another cone which is the key object in the "basic identity" (treated in Chapter 8). Its definition is slightly more subtle than that of its classical analogue.

The chapter ends with various inequalities stemming from the geometry of cones specific of the twisted case (in particular Lemma 2.12.1 borrowed from [20, Lecture 15]).

Chapter 3. *Reduction theory.* This chapter is mainly concerned with the definition and the properties of function $\mathbf{H}_0$ on adelic groups and other classical statements of reduction theory. Here again, twisting plays little if any role in the whole chapter.

The function $\mathbf{H}_0$, defined via Iwasawa decomposition, allows to relate the geometry on the group and that of vector spaces attached to roots.

The lemmas in Section 3.3, that allow to control $\mathbf{H}_0(wn)$ when n belong to the unipotent and w is in the Weyl group, are borrowed from [20, Lecture 6]. These lemmas are quite important in order to obtain estimates, in particular in the next chapter. The partition in Section 3.6 and the estimates in Section 3.7 are borrowed from [2] (see also [20, Lectures 3 and 4]).

Part 2. Spectral theory, truncation and kernels. This part is mainly a report on classical results about the truncation operator and the spectral decomposition of the space of automorphic forms, which we had to recall at least to fix notation. Here again twisting plays little role. Nevertheless some new features show up.

Chapter 4. *The truncation operator.* This chapter recalls well known facts, due to Arthur, on truncation operators. The twisting is completely absent here. We follow Lecture 6 by Langlands [20] which is itself inspired by Arthur's paper [3].

The main technical result of the chapter is Lemma 4.1.1 which is nothing but [3, Lemma 1.1]. The proof of this key lemma seems slightly incomplete in [3]. In fact Arthur makes use of an analogue of our 3.3.2 but in a stronger form, i.e., with $c = 0$. This strong form is established by Langlands for Chevalley groups under an optimal choice for the maximal compact subgroup [20, Lemma 6.3], but such a strong form is not likely to hold in general. Fortunately the proof given by Langlands in [20], which we reproduce here, shows that such a strong form of Lemma 3.3.2 is not necessary to establish Lemma 4.1.1. The remaining arguments are due to Arthur.

The second important technical result is Proposition 4.3.2 which reproduces Lemma 6.6 in [20, Lecture 6] which is itself borrowed from [3, Lemma 1.4]. The proof is recalled for the convenience of the reader.

Chapter 5. *Automorphic forms and scalar products.* We first recall briefly the results due to Langlands on analytic continuation of intertwining operators and Eisenstein series, then we give a simple proof of the formula, also due to Langlands, for the scalar product of truncated Eisenstein series built from cuspidal functions in terms of the spectral (G, M)-family. The proof given here was outlined in [20, Lecture 12]; it is much more direct and elementary than the proof given by Arthur in [3]. When dealing with the noncuspidal case one gets only an asymptotic formula.

The extension to the noncuspidal case is due to Arthur. We only quote the result and we refer the reader to the literature for a proof.

Chapter 6. *The integral kernel.* We introduce the kernel that is used in the trace formula in the twisted case and we give estimates. We recall Dixmier–Malliavin's factorization which we substitute for the parametrix argument used by Arthur, which itself was borrowed from Duflo–Labesse.

Chapter 7. *Spectral deecomposition.* The spectral decomposition for the kernel plays naturally a key role in the spectral expansion of the trace formula. The spectral decomposition, due to Langlands, is briefly recalled. Then we give estimates for the spectral decomposition of the kernel.

Part 3. The coarse trace formula. The word "coarse" used in [20] is to be translated by "grossier" in French. In this part we first give the basic identity ("identit© fondamentale" in French) which gives rise to the geometric and spectral expansions of the trace formula. Then we study the coarse geometric expansion and the fine geometric expansion as well (although very briefly). Next we give the coarse spectral expansion. This yields a first form of the trace formula, and we establish the formal properties of the various terms in the coarse expansions of both sides of this identity.

Chapter 8. *Zero state of the trace formula.* This chapter contains the proof for the basic identity which is the starting point for the trace formula. We establish the equality between two truncated variants of the restriction to the diagonal of the kernel. One side yields the geometric expansion by expanding it according to conjugacy classes, the other one yields the spectral expansion. During the Princeton seminar a first form of the basic identity was established in [20, Lecture 2] then a variant of it was given quite later in [20, Lecture 9]; this variant turned out to be the right one and is given here in Proposition 8.2.2. This is merely a combinatorial identity.

Chapter 9. *Geometric expansion.* This chapter deals with the decomposition along conjugacy classes of the integral over the diagonal of the kernel after geometric truncation. Theorem 9.1.2 establishes the convergence of the coarse geometric expansion (i.e., the expansion along the conjugacy classes of the quasisemisimple parts). This is an easy adaptation of arguments in [2]. We follow [20, Lectures 3 and 4]. The chapter goes on with the expression of terms defined by semisimple conjugacy classes by means of weighted orbital integrals, following [20, Lecture 5] and again but with more details in [20, Lecture 9].

A last and short paragraph deals with the fine geometric expansions ("fine $\mathfrak{o}$-expansion"). We thought it enough to refer the reader to the literature for the study of nonsemisimple elements. We observe that these terms are not studied in [20]. In fact they were treated by Arthur only after the Morning Seminar. Since this was written up by Arthur including the twisted case (although in a setting slightly more restrictive than here) we thought it worthless to rewrite it here.

Chapter 10. *The coarse spectral expansion.* The spectral expansion according to cuspidal data induces the coarse spectral expansion. The proof of its convergence follows Lectures 7 and 8 by Langlands in [20] which in turn are inspired by [3], although a few technical difficulties arise from the twisting. The main difference between the classical and the twisted case is that (with notation from Theorem 10.3.4) the twisted spectral expansion is a linear combination of terms indexed by pairs of standard parabolic subgroups $Q \subset R$:

$$\int_{\mathbf{Y}_{Q_0}} \tilde{\sigma}_Q^R(\mathbf{H}_0(x) - T)\mathbf{\Lambda}_1^{T,Q} K_{Q,\delta_0,\chi}(x,x)\,\mathrm{d}x$$

that can be nontrivial, while in the classical case there is only one term

$$\int_{\mathbf{X}_G} \mathbf{\Lambda}_1^T K_\chi(x,x)\,\mathrm{d}x$$

corresponding to the case $Q_0 = Q = R = G$, that is nonvanishing (for T regular enough).

Chapter 11. *Trace formula*: *formal properties.* The terms in the geometric and spectral coarse expansions have remarkable formal properties. Their main property is that one gets, asymptotically polynomials in T, the truncation variable. The proofs in the twisted case are an easy adaptation of the proofs given by Arthur in [4] in the classical case. We follow here [20, Lecture 13].

Altogether the first three parts give a complete account for the twisted variant of the results contained in [2] and [3] and a part of the results in [4] as well (mainly those concerning the (G, M)-families and the formal properties of terms in the trace formula).

Part 4. Explicit form for spectral terms. This part, which is the most original and difficult part of this work, deals with the extension to the twisted case of Arthur's results in [5] and [6]. The new feature is that one has to take care of terms indexed by pairs $Q \subset R$ with $Q \neq G$ alluded to above. Their study is much more delicate.

The study of the spectral expansion of such terms uses the scalar product of truncated Eisenstein series that can be computed exactly, at least when dealing with Eisenstein series constructed from cuspidal functions, by means of the classical calculation recalled above (cf. Chapter 5) after an inversion of integrals. One thus gets an expression in terms of spectral (G, M)-families generalizing the classical case. But for terms attached to pairs $Q \subset R$ with $\theta_0(Q) \neq Q$ this natural formal computation makes sense only after shifting the contour integral for some of the spectral variables away from their natural domain (i.e., these are no longer purely imaginary). This can be done without much trouble. But now, to go on with the combinatorics, one needs to come back to the natural domain for these spectral variables. One is thus led to shift back the contour integral for terms that now involve spectral (G, M)-families. This is what is suggested by Langlands in [20, Lecture 15]. To do this one needs estimates on intertwining operators and their derivatives which we do not know how to get.

A method that does not involve any shifting of contour, but that is quite delicate from the combinatorial and analytic point of view, has been devised by Waldspurger and allows to solve this problem. One is eventually led to the expression given by Langlands.

Chapter 12. *Introduction of a function* B. One has to adapt a technique due to Arthur and developed in [5]. The introduction of a function B with compact support in the spectral expansion for terms described above is a remedy to the lack of uniform estimates of certain spectral expansions. As said above the terms attached to pairs $Q \subset R$ with $Q \neq G$ is in general much more difficult than the case $Q = G$ treated by Arthur. The functions B appears often via its Fourier transform which is not compactly supported but only rapidly decreasing, and this generates quite delicate convergence problems. To handle them one needs to refine some of the estimates already used in previous sections.

Chapter 13. *Computation of* $A^T(B)$. This chapter can be seen as the twisted analogue of the second part of [5]. One aim is to take care of the asymptotic nature of the formulas involving the (G, M)-families coming from the computation of the scalar product when Eisenstein series are not constructed from cuspidal functions. Here again a new difficulty comes from terms where $\theta_0(Q) \neq Q$. The way this difficulty is solved here yields eventually an expression which is simpler than the one obtained by Arthur in the nontwisted case. They differ by asymptotically small terms; as a consequence one of the combinatorial steps in [6, Section 3] is already taken care of.

Chapter 14. *Explicit formulas.* Based on the analysis made in the two preceding chapters, we establish the twisted analogue of the formulas obtained by Arthur in [6] giving an explicit expression for spectral terms in the trace formula.

Section 14.1 is inspired by what Langlands does in [20, Lecture 15] but the systematic use of the globalization of (G, M)-families makes the combinatorial argument much more transparent since it simplifies the combinatorics and the notation as well.

In Section 14.2 we get rid of the auxiliary function B by letting it tend to 1. To do this one needs to prove the absolute convergence of these terms. Arthur uses two kind of arguments:

(1) he assumes known a normalization of the intertwining operators;

(2) he shows then that the terms to control, that contain (G, M)-families, can be expressed as a linear combination of products of first order derivatives in certain variables. This allows to reduce to a problem in rank one.

The existence of a normalization was first established by Langlands in [20, Lecture 15]. This normalization later appeared in Arthur's work. Since we have nothing more to say we simply refer to [13] for the normalization and to [6] for the end of the proof up to a detail which occupies Section 2.10.

In a last section we reformulate the result by making use of the absolute convergence of the spectral expansion due to Finis, Lapid and Müller.