Avant-propos de Robert Langlands

The trace formula as an algebraic idea is as old as representation theory itself and can be regarded as a form of the Frobenius reciprocity theorem. Suppose that G is a finite group and Γ a subgroup. Consider the representation ρ of G on the functions on $\Gamma\backslash G$, $g\colon \phi \mapsto \rho(g)\phi$, where $\rho(g)\phi(h) = \phi(hg)$. It is the representation induced from the trivial representation of Γ and the action of a function on G on the space of ρ is

$$f\colon \phi \mapsto \rho(f)\phi = \phi', \quad \phi'(h) = \frac{1}{|G|}\sum_G \phi(hg)f(g).$$

The trace of $\rho(f)$ is readily calculated as

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\{(g,g_1)\,|\,g_1g=\gamma g_1,\gamma\in\Gamma\}} f(g) = \frac{1}{|\Gamma|}\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\Gamma} f(g_1^{-1}\gamma g_1)\,\mathrm{d}g_1,$$

where the measure on $\Gamma\backslash G$ is implicitly normalized to 1 by a factor $|\Gamma\backslash G|$ and g_1 runs over $\Gamma\backslash G$. The integral on the right can be expressed in various ways, as a sum over conjugacy classes in Γ,

$$\sum_{\{\gamma\}}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(g_1^{-1}\gamma g_1)\,\mathrm{d}g_1,$$

where Γ_γ is the centralizer of γ in Γ, or as

$$\sum_{\{\gamma\}}\mathrm{meas}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G} f(g_1^{-1}\gamma g_1)\,\mathrm{d}g_1. \tag{1}$$

We apply these simple formulas to the function $f(g) = \chi_\pi(g)$ given by the character χ_π of an irreducible representation π of G. By the orthogonality relations for matrix coefficients $\mathrm{tr}\big(\rho(f)\big)$ is the number of times π is contained in ρ. The present function f is a class function, so that the formula (1) for this trace reduces to

$$\sum_{\{\gamma\}}\mathrm{meas}(\Gamma_\gamma\backslash G)\chi_\pi(\gamma) = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_\gamma \chi_\pi(\gamma),$$

which is the number of times the trivial representation is contained in the restriction of π to Γ. In other words, we arrive at Frobenius reciprocity for the trivial representation of Γ.

One of the achievements of Selberg, in some regards perhaps the major achievement of his career, was to recognize that there was not only a formula similar to (1) for discrete groups Γ with compact quotient but also one, the trace formula, for discrete subgroups of rank one. He, himself, was primarily concerned with subgroups of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, but the principles are similar for all groups of rank one for which the usual reduction theory is valid. The spectral theory for the invariant differential operators is similar to the classical spectral theory for a second-order differential equation on a half-line: a one-dimensional continuous spectrum, empty if $\Gamma\backslash G$ is compact, together with a discrete spectrum. This is a classical theory with which Selberg was more than familiar. If the quotient is not compact, the eigenfunctions for the continuous spectrum are constructed by the analytic continuation of Eisenstein series, a topic initiated by Maaß and Roelcke, the central difficulty being resolved by Selberg.

The rank-one theory together with the reduction theory for general arithmetic groups suggested a more general theory, but there were difficulties, often misunderstood, even underestimated, by commentators with limited familiarity with the methods used for their solution. Even the general reduction theory developed in the nineteenth century by Eisenstein, H. J. S. Smith, Minkowski, Hermite and others and rescued, I am tempted to suggest, from oblivion by C. L. Siegel in the twentieth, with the last proofs being provided by Borel and Harish-Chandra, is sorely in need of a competent historical description. It is not surprising that, in the fifties, when Siegel was still alive, still at the Institute for Advanced Study, Selberg, also at the Institute and like Siegel an analytic number theorist, was influenced not only by Maaß and Roelcke but also by Siegel. Selberg wrote little and, in my experience, talked little about the sources of his knowledge, so that it is difficult to understand why he made so little progress with the theory in higher rank. The few notes he left suggest, although a final judgement will have to await the closer examination of them by D. Hejhal and others, that in essence he made none and that he failed to understand subsequent developments. Since he was certainly a strong mathematician, this is puzzling.

After years of unsystematic reflection I have concluded that the failure may have lain in his lack of a clear understanding of the algebraic theory of semisimple groups and, as a consequence, of the reduction theory of arithmetic groups. Specifically, he failed to understand the notion of a cusp form, as it appeared in papers by Godement and Harish-Chandra and in Gelfand's Stockholm lecture, and of the related decomposition of the spectrum according to classes of parabolic subgroups. This is the clue to the general theory of Eisenstein series. This lack may have been a consequence of an independent style and a refusal, at least in his later years, of systematic study. I am not certain.

The general proofs of the analytic continuation of the Eisenstein series and the description of the spectrum associated to those of each type certainly incorporate basic ideas from those for rank-one groups but they demand in addition not only a mastery of the theory of harmonic analysis on reductive groups as created by Harish-Chandra but also the introduction of an appropriate inductive structure and the solution of a number of specific problems.

Since the number of mathematicians with the necessary analytic experience and the necessary understanding of the theory of semisimple groups is limited, the general theory of Eisenstein series is not familiar to a large group of mathematicians. Although this theory is necessary for the trace formula for a general reductive group, even the first step toward the formula, the initial truncation of the kernel of

$$\rho(f) = \int f(g)\rho(g)\colon \phi \mapsto \phi', \quad \phi'(h) = \int \phi(hg)f(g)\,\mathrm{d}g, \tag{2}$$

for a smooth function with compact support, which is what permits the development of the trace formula, was by no means obvious to me. I tried, unsuccessfully to take it. It was taken, after much reflection — about two years I would suggest — by Arthur, who followed it by years of effort and many papers, most of which neither I nor many other specialists have yet digested. I attempted a summary some time ago in an article *The trace formula and its applications: An introduction to the work of James Arthur* that appeared in the Canadian Bulletin of Mathematics.

In my view, although there is still much to do in the way of integrating it with classical analytic number theory and classical algebraic number theory, which will not be easy, the trace formula itself is the key to the construction of a theory of automorphic forms in which functoriality and reciprocity appear in their full generality. Reciprocity will demand, of course, more.

Fortunately the twisted trace formula, within or without endoscopy as the case requires, offers an alternative, the proof of whose consequences is less demanding from both an analytic and a number theoretic standpoint than those of the trace formula itself, but that offers none the less substantial rewards. One of the earliest such applications was to cyclic base change for GL(2) and some special cases of the Artin conjecture, which were later put to spectacular use by A. Wiles in the proof of Fermat's theorem. More recently, Arthur has, in the book *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups* systematically developed the twisted trace formula and twisted endoscopy for $\mathrm{GL}(n)$ and applied it to establish important cases of functoriality. Its appearance will be, in my view, an event of major importance in the theory of automorphic forms, and the book itself an opportunity for specialists, many of them mired in specific and limited techniques, to grasp the analytic possibilities of the modern theory of automorphic forms.

Selon son titre, c'est cette formule tordue qui est le sujet du présent livre de Jean-Pierre Labesse et Jean-Loup Waldspurger. Pour la formule tordue, l'objet principal n'est pas l'opérateur $\rho(f)$ de la formule (2) ; il est plutôt, s'il est permis de m'exprimer d'une façon un peu plus simple que celle du livre, $\rho(f) \circ \theta$, où θ est un automorphisme extérieur d'ordre fini du groupe $G(\mathbb{A})$. Autant que je sache, c'est H. Jacquet qui au début des années 80 avait proposé qu'une formule des traces pour de tels opérateurs pourrait résoudre quelques questions qui l'intéressaient alors. J'avais essayé de trouver une telle formule, mais j'ai échoué.

Toutefois, un peu plus tard, Y. Flicker soumit aux *Annals of Mathematics* un article qui contenait une formule tordue convaincante. Comme je voulais moi aussi le faire, il avait, mais avec apparemment plus de succès, trouvé une modification du noyau tronqué de Arthur. Malheureusement en examinant la démonstration qu'il avait proposée, je n'ai trouvé qu'un argument sans fondement. Il n'était que le simulacre d'une démonstration. Autant que je sache, l'auteur n'a jamais réussi à proposer une autre démonstration plus solide. Par la suite, même assez tôt, lors d'une année thématique à l'*Institute for Advanced Study* sur les formes automorphes, j'ai proposé à Jean-Pierre Labesse que nous offrions avec quelques collègues un séminaire dans lequel nous essaierions de trouver une démonstration de la formule donnée par Flicker. C'est ce séminaire qui est devenu le *Morning Seminar*, pour lequel les notes des divers conférenciers en autant qu'elles étaient disponibles ont été distribuées aux auditeurs. Elles sont toujours disponibles en ligne.

Ce fut une année très exigeante pour tous les participants et quelques conférenciers n'ont pas réussi à rédiger des notes ; d'autres les ont rédigées hâtivement et, pour la plupart, nous ne sommes pas retournés réfléchir à ce que nous avions écrit lors du séminaire. Là le sujet s'expose à des dangers car Arthur, en rédigeant son livre, avait suffisamment de pain sur la planche qu'il devait forcément tenir pour acquises les conclusions du *Morning Seminar*. Même s'il n'y avait pas d'autres raisons pour leur savoir gré, à cause de celle-ci seule nous devons beaucoup à Jean-Pierre Labesse et à Jean-Loup Waldspurger d'avoir repris la formule tordue et de l'avoir assise sur des fondations sûres.

Ils observent d'ailleurs, qu'ils se sont délestés de quelques arguments que j'avais esquissés dans mes notes et qu'ils les ont remplacés par d'autres. Quoique j'aie beaucoup de confiance en le mathématicien que j'étais, bien plus que dans celui que je suis, il est vrai que vers la fin du séminaire j'étais éreinté et manquais de temps. De toutes façons je n'ai pas eu depuis envie de reprendre ces arguments. Il est certainement possible que j'avais trop simplifié les choses.

Les auteurs expliquent eux-mêmes dans la préface la genèse de leur entreprise et il n'y a pas besoin de répéter ce qu'ils écrivent. Je voudrais toutefois ajouter un sentiment de reconnaissance personelle, d'abord à Jean-Pierre Labesse et Jean-Loup Waldspurger et ensuite à l'*American Mathematical Society* et surtout à son président Eric Friedlander d'avoir accepté de publier ce texte en français, ce qui à ma surprise n'était pas si évident.

Il me semble que les mathématiciens se doivent de bien comprendre les conséquences de leur utilisation toujours croissante et maintenant presque universelle de l'anglais, ou plutôt de l'américain car nous sommes tous, comme mathématiciens, à la remorque des américains. Cette pratique est accompagnée d'une ignorance d'autres langues de sorte que les mathématiciens sont coupés à maints égards non seulement des mathématiques des dix-septième et dix-huitième siècles mais aussi, et à un degré bien plus grave, des mathématiques allemandes, françaises, russes ou italiennes du dix-neuvième siècle et de la première moitié du vingtième siècle. On ne trouve pas facilement dans des textes contemporains tout ce que nous avons hérité des grands mathématiciens de ces périodes. Ce déshéritement est peut-être moins grave pour les domaines qui n'ont apparu que récemment qu'il l'est pour la théorie des formes automorphes qui est une fusion et une continuation de sujets comme la théorie algébrique des nombres, la géométrie algébrique, la théorie des groupes et leurs représentations, ou la théorie analytique des nombres, donc des sujets bien enracinés dans l'histoire des mathématiques et où les façons de travailler ont beaucoup changé depuis le temps de, disons, Weierstrass et Jacobi ou Dedekind et Frobenius et le présent.

L'utilisation d'une langue unique et les moyens de communications et de voyager contemporains permettent la formation de petites cellules de mathématiciens qui ne communiquent guère entre elles. C'est une pratique que ceux et celles qui veulent contribuer d'une façon sérieuse à la théorie des formes automorphes ne peuvent pas se permettre. Même ce livre ou le livre de Arthur ne sont, à mon avis, au moins en partie, qu'une préparation pour des travaux nettement plus difficiles. Il s'agit toutefois avec les deux d'un apprentissage que l'on ne peut pas contourner. D'ailleurs notre devoir est de résoudre les problèmes actuels, ou au moins d'essayer de résoudre ceux-ci, et non pas ceux de l'avenir et, en plus, de ne pas s'adonner trop aux rêves. Il faut donc reconnaître lesquels sont abordables à présent et essayer de surmonter les difficultés concrètes qu'ils posent. Le mérite de Jacquet, Labesse-Waldspurger et Arthur, au moins en ce qui concerne la formule tordue, est en partie de l'avoir fait.

La formule des traces elle-même – donc la formule introduite par Selberg pour les groupes de rang 1 mais dont la forme générale a été créée par Arthur – sera, à mon avis, dans sa forme stable – donc accompagnée par une théorie d'endoscopie, pour laquelle le lemme fondamental, démontré dans une suite de travaux de divers mathématiciens dont le plus connu est celui de Ngô Bau Châu, est une composante critique – l'outil essentiel pour établir les théorèmes de base de la théorie des formes ou représentations automorphes, mais seulement lorsque on aura réussi à l'accompagner avec des formes nouvelles de la théorie analytique des nombres et de la théorie des corps de classes, les deux fusionées comme elles étaient jadis – par exemple, dans le rapport *Klassenkörperbericht* de Hasse – mais portant aussi sur des extensions non abéliennes, de sorte que la fusion n'est pas évidente. Il s'agit certainement de projets pour l'avenir. Pour l'instant, pour convaincre des jeunes mathématiciens de la valeur des conjectures sur la fonctorialité et la réciprocité dans le cadre des formes automorphes et de celle de la formule des traces elle-même on a besoin – sinon pour la formule stable au moins pour la théorie plus générale de la formule tordue, stable ou non – de moyens à portée de main et de théorèmes dont la valeur est indiscutable. Ces moyens et ces théorèmes se trouveront dans deux livres.

Pour des théorèmes importants sur la fonctorialité qui découlent de la formule tordue, on peut consulter le livre de Arthur ; pour les fondations d'un traitement rigoureux et complet de la formule tordue, c'est ce livre de Labesse-Waldspurger qu'il faut consulter. Les deux maîtrisés, le jeune mathématicien peut, s'il le veut, entamer lui-même les problèmes rattachés à la formule simple et décrits, en partie, dans un essai *A prologue to "Functoriality and Reciprocity", Part* I, que j'ai rédigé récemment et qui paraîtra bientôt.

Ceci dit, il me semble que toute conséquence laissée de côté le livre de Labesse-Waldspurger serait en soi un plaisir de lire et peut servir à introduire un novice à la théorie analytique des formes automorphes et à la formule des traces générale.

Robert Langlands