Introduction

Cette exposition du cours *Math* 740-741, *Topics in Analysis*, enseigné à l'*Université McGill* (Montréal) en 2005-2006 par M. Paul Koosis, explore des sujets tantôt de base, tantôt spécialisés en théorie des fonctions d'une variable complexe ; quelques applications de cette théorie à l'analyse réelle y sont également étudiées, — à savoir la caractérisation des classes de fonctions quasi-analytiques due à Carleman et Ostrowski, l'approximation pondérée suivant l'approche d'Akhiezer, les théorèmes de Levinson et de Beurling sur la lacunarité. Entre autres faits saillants, mentionnons une preuve inédite du théorème de Levinson–Cartwright, sur les zéros d'une classe précisée de fonctions entières.

La première partie de ce texte, tirée du cours d'automne 2005, est divisée en trois chapitres. Le premier d'entre eux, sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques, présente, dans l'ordre : diverses généralisations du *principe du maximum*, utilisées dans la suite du cours ; le célèbre *théorème de Paley–Wiener* ; une introduction à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(x)|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty,$$

qui est aussi l'occasion de reviser la célèbre *formule de Poisson* pour le demi-plan supérieur. Le principal résultat de cette section, selon lequel, sur l'axe réel, le module d'une fonction de type exponentiel ne peut pas souvent être « petit » sans souvent être « grand », trouve de nombreuses applications en analyse classique (dont une au chapitre suivant). Le deuxième chapitre procède à l'identification des classes de fonctions quasi-analytiques (au sens donné par Carleman et Ostrowski), déjà mentionnées. Finalement, le troisième chapitre présente divers résultats sur les zéros des fonctions de type exponentiel : *formule de Jensen*, *factorisation d'Hadamard*, *théorème de Lindelöf* et *théorème de Levinson–Cartwright*, sans nul doute le plus spécialisé d'entre les quatre. À cela s'ajoutent trois annexes, sur les produits infinis, une inégalité de Bernstein, la convolution de deux mesures, puis six autres, énonçant les devoirs donnés dans cette partie du cours.

La seconde partie, tirée, cette fois, du cours d'hiver 2006, se divise en quatre chapitres. Le premier d'entre eux aborde l'approximation pondérée des éléments de $C_0(\mathbb{R})$ au moyen de combinaisons linéaires finies de la forme $\sum_{-A\leqslant\lambda\leqslant A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$. L'*approche d'Akhiezer*, dans laquelle, en vue d'appliquer le *truc de Riesz–Pollard*, l'ensemble de ces combinaisons linéaires est remplacé par une certaine classe de fonctions entières, est utilisée. Des théorèmes remarquables, dus à Levinson et Beurling, sont déduits : non sans évoquer le principe d'incertitude, ces derniers nous indiquent qu'une mesure convenablement choisie ne peut présenter trop de lacunarité en même temps que sa transformée de Fourier, — à moins d'être identiquement nulle. Le chapitre suivant initie aux mesures harmoniques associées à des domaines convenables — pour lesquels le problème de Dirichlet est résolu. Ces mesures servent à estimer efficacement les fonctions holomorphes sur ces domaines. De telles estimations (plus exactement, le *théorème des deux constantes*) nous permettent, à l'instar de Beurling, de renforcer le théorème de Levinson du chapitre précédent. À l'avant-dernier chapitre, nous démontrons, en suivant l'approche de Garabedian, que le problème de Dirichlet est bel et bien résolu pour les domaines considérés auparavant, — écartant ainsi tout acte de foi. Nous concluons ce cours par une introduction aux longueurs extrémales, qui servent à estimer les mesures harmoniques. En particulier, le *théorème d'Ahlfors* est présenté, puis utilisé dans la démonstration, également due à Ahlfors, de la conjecture de Denjoy. À cela s'ajoutent deux autres annexes, l'une sur l'inégalité de Harnack, l'autre sur les espaces H^1, puis cinq autres devoirs.

Nous espérons que ces leçons sauront vous intéresser.

La traduction. Bien que le cours fut dispensé en anglais, M. Koosis m'a demandé de rédiger ce texte en français. Une première version française fut intégralement relue et corrigée par le professeur ; elle fut légèrement remaniée pour des raisons qui tiennent à la mise en page et à la typographie.

Peut-être serai-je accusé de scrupules excessifs en mentionnant ces quelques dérogations au style académique usuel : utilisation des ponctuations ?, ! et — ; renvois aux notes en bas de page après le point final. Cela ajoute de la clarté dans une exposition mathématique où les parenthèses et les exposants abondent déjà. Finalement, je me suis permis d'utiliser le symbole $\stackrel{?}{=}$ pour les formules à démontrer plus loin, — si peu académique, mais tellement honnête !

Peut-être, à la place, serai-je accusé de présomption pour m'attarder ainsi à des questions linguistiques qui tombent en dehors de ma formation. Puisque je suis, en réalité, formé en mathématiques, M. Koosis m'a aussi permis d'annoter ce texte, — pour mon plus grand bonheur. Ces ajouts personnels sont suivis de l'acronyme *N.d.T.*[1] ; ils furent, dans la première version, relus et corrigés par le professeur.

Plus probablement, le lecteur vigilant rendra sa critique bienfaisante en rapportant ses commentaires à l'adresse électronique suivante :

`poulin.philippe@hotmail.com`.

Je les accueillerai chaleureusement.

[1] Moins pour *note du traducteur* que pour *note du « tapeur »* — à son tour, pour « *tapeur de notes* » !

Remerciements. J'aimerais remercier mon directeur de doctorat, M. Vojkan Jakšić, pour la compréhension dont il a fait preuve lorsque j'ai sacrifié quelques heures de mon travail de recherche au profit du présent projet. J'aimerais tout autant remercier M. Paul Koosis, qui m'a demandé de faire la rédaction. À cela s'ajoutent des remerciements pour l'équipe d'analyse de McGill, qui a financé ce projet. Finalement, je remercie une seconde fois M. Koosis, pour son enseignement, qui ouvre des horizons dans le domaine captivant de l'analyse complexe. Aussi, suis-je comblé que ces horizons soient restés, pour moi, ouverts.

Remerciements pour la deuxième écriture. J'aimerais remercier chaleureusement mes directeurs de postdoctorat, MM. Kristian Seip et Yurii Lyubarskii, pour la liberté qu'ils m'ont donnée sous leurs auspices. Grâce à eux, j'ai pu reprendre ce texte à loisir, — jusqu'à lui donner une forme qui me plaît. Mentionnons qu'en juin et juillet 2007, j'ai donné quelques leçons tirées de la deuxième partie de cette exposition dans le cadre d'une école d'été que j'ai organisée à NTNU (Trondheim) à l'intention de chercheurs et étudiants intéressés. Y ont participé : Ole Jacob Broch, Kari Hag, Marius Irgens, Eugenia Malinnikova, Darko Mitrovic et Xavier Raynaud. La préparation de cette école d'été et les nombreuses remarques qui s'en sont suivies ont aidé à la correction de ce texte ; je remercie tous les participants, — tout spécialement, E. Malinnikova, qui, je crois, saurait à elle seule venir à bout de la *multitude* de mes distractions.

Remerciements pour l'édition. Un grand merci à Mme Galia Dafni et M. André Montpetit, qui m'ont si bien assisté — avec patience — lors de la soumission du manuscrit et lors des derniers remaniements du texte.

Philippe Poulin
février 2015
Al Ain, Émirats Arabes Unis