CHAPITRE 1

Fonctions harmoniques et sous-harmoniques

1.1. Trois arguments de Phragmén–Lindelöf

Nous présentons le principe du maximum *pour les fonctions harmoniques ou sous-harmoniques, que nous étendons, grâce à un argument de Phragmén–Lindelöf, au cas d'une fonction bornée, définie sur un domaine dont la frontière n'est pas vide. Par la suite, deux autres arguments de Phragmén–Lindelöf nous permettent d'obtenir des résultats pour des fonctions définies sur un secteur angulaire (ou encore sur un demi-plan). Ceux-ci préludent à l'étude des fonctions de type exponentiel.*

1.1.1. Principe du maximum généralisé.

Cas des fonctions harmoniques.

Définition. Une fonction $u(x, y)$ de classe C^∞, définie sur un ensemble ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$, est dite *harmonique* ssi

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

dans $\mathcal{O}$.

Le plus souvent, nous écrivons $u(z)$ à la place de $u(x, y)$, où $z = x + \mathrm{i}y$. Les fonctions harmoniques vérifient la *propriété de la valeur moyenne*, à savoir : *si $u(z)$ est harmonique dans $\mathcal{O}$, $z_0 \in \mathcal{O}$ et $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\mathcal{O})$, alors*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

De cette dernière propriété découle le *principe du maximum* :

Théorème 1.1. *Soit $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert et* borné. *Envisageons une fonction, $u(z)$, harmonique dans $\mathcal{O}$ et continue sur $\overline{\mathcal{O}}$. Si $u(z) \leqslant M$ sur $\partial\mathcal{O}$, alors $u(z) \leqslant M$ aussi sur $\mathcal{O}$.*

Preuve. Soit $K = \sup_{z \in \overline{\mathcal{O}}} u(z)$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer $M = \sup_{z \in \partial\mathcal{O}} u(z)$, de sorte que $K \geqslant M$. Comme $\overline{\mathcal{O}}$ est compact, il existe un $z_0 \in \overline{\mathcal{O}}$ tel que $u(z_0) = K$. Supposons par l'absurde $K > M$, de sorte que $z_0 \in \mathcal{O}$. Pour $r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\mathcal{O})$, envisageons le cercle, $\mathcal{C}_r$, centré en z_0 et de rayon r. Par la propriété de la valeur moyenne,

$$K = u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

Comme $u(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ est continue en θ et inférieure ou égale à K,

$$u(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = K$$

pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$. Faisons tendre r vers $\mathrm{dist}(z_0, \partial\mathcal{O})$. Pour chaque r considéré, il existe un $z_r \in \mathcal{C}_r$ dont la distance à $\partial\mathcal{O}$ est minimale, — qui vérifie bien sûr $u(z_r) = K$. Quand $r \uparrow \mathrm{dist}(z_0, \partial\mathcal{O})$, certains z_r s'accumulent en un point $\zeta \in \partial\mathcal{O}$. Comme u est continue sur $\overline{\mathcal{O}}$, $u(\zeta) = K > M$, cependant que $u \leqslant M$ sur $\partial\mathcal{O}$, — ce qui est absurde. Donc, $K = M$, d'où le résultat. □

Scolie. Ce raisonnement démontre que, posant $M = \sup_{\zeta\in\partial\mathcal{O}} u(\zeta)$, $u(z)$ est en fait *strictement* inférieure à M sur une composante arbitraire de $\mathcal{O}$, sauf si elle vaut M constamment sur celle-ci. Voilà le *principe fort du maximum.*

L'hypothèse de continuité à la frontière peut être affaiblie de la manière suivante :

Corollaire. *Soient $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert et borné, et $u(z)$ une fonction harmonique dans $\mathcal{O}$. Supposons*

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{O}\\ z\to\zeta}} u(z) \leqslant M \tag{1.1}$$

pour tout $\zeta \in \partial\mathcal{O}$. Alors, $u(z) \leqslant M$ sur $\mathcal{O}$.

Preuve. Posons, pour $\delta > 0$, $\mathcal{O}_\delta = \{z \in \mathcal{O} \,;\, \mathrm{dist}(z, \partial\mathcal{O}) > \delta\}$ et $\Gamma_\delta = \partial\mathcal{O}_\delta$. Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, l'inéquation (1.1) et la compacité de $\partial\mathcal{O}$ entraînent $u(z) \leqslant M + \varepsilon$ sur Γ_δ si δ est suffisamment petit (dépendamment de ε). Donc, $u(z) \leqslant M + \varepsilon$ sur $\mathcal{O}_\delta$, voire sur $\mathcal{O}$, puisque $\bigcup_{0<\delta<\eta} \mathcal{O}_\delta = \mathcal{O}$ quel que soit $\eta > 0$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, le résultat s'ensuit. □

Les résultats précédents reposent tous sur la compacité de $\overline{\mathcal{O}}$, par suite, de $\partial\mathcal{O}$. Qu'en est-il lorsque $\mathcal{O}$ n'est pas borné ? Alors, le principe du maximum fait défaut, comme le montre ce simple exemple : $u(z) = y$ est harmonique dans le demi-plan supérieur, continue sur sa fermeture, nulle sur sa frontière, mais n'est pas bornée. Pour remédier à la situation, nous recourons à un genre d'arguments dits *arguments de Phragmén–Lindelöf*, illustrés ci-après, — en premier lieu, dans la preuve du *principe du maximum généralisé* :

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine dont la frontière n'est pas vide. Considérons une fonction, $u(z)$, harmonique dans $\mathcal{D}$ et majorée par un certain nombre K. Supposons*

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z) \leqslant M$$

pour tout $\zeta \in \partial\mathcal{D}$. Alors, $u(z) \leqslant M$ sur $\mathcal{D}$.

Preuve. Fixons $\zeta_0 \in \partial\mathcal{D}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que $u(z) \leqslant M + \varepsilon$ sur $\mathcal{D}_\delta = \{z \in \mathcal{D}\ ;\ |z - \zeta_0| \leqslant \delta\}$. Montrons que cette inégalité vaut aussi sur $\mathcal{O}_\delta = \{z \in \mathcal{D}\ ;\ |z - \zeta_0| > \delta\}$, de sorte qu'elle vaut sur tout le domaine.

Pour $\eta > 0$ arbitrairement fixé, posons

$$v(z) = u(z) - \eta \log\left|\frac{z - \zeta_0}{\delta}\right|,$$

qui est bien définie, harmonique et inférieure à $u(z)$ dans $\mathcal{O}_\delta$. Envisageons l'ouvert borné $\mathcal{O}_{\delta,R} = \{z \in \mathcal{O}_\delta\ ;\ |z - \zeta_0| < R\}$, où $R > \delta$. Si $\zeta \in \partial\mathcal{O}_{\delta,R}$, tantôt $\zeta \in \partial\mathcal{D}$, dans lequel cas

$$\limsup_{\substack{z \in \mathcal{O}_{\delta,R} \\ z \to \zeta}} v(z) \leqslant \limsup_{\substack{z \in \mathcal{O}_{\delta,R} \\ z \to \zeta}} u(z) \leqslant M\ ;$$

tantôt $\zeta \in \partial\mathcal{D}_\delta$, dans lequel cas

$$\limsup_{\substack{z \in \mathcal{O}_{\delta,R} \\ z \to \zeta}} v(z) \leqslant \limsup_{\substack{z \in \mathcal{O}_{\delta,R} \\ z \to \zeta}} u(z) \leqslant M + \varepsilon\ ;$$

tantôt $\zeta \in \mathcal{O}_\delta$, dans lequel cas $|\zeta - \zeta_0| = R$ et

$$\limsup_{\substack{z \in \mathcal{O}_{\delta,R} \\ z \to \zeta}} v(z) = v(\zeta) \leqslant K - \eta \log \frac{R}{\delta}.$$

En somme, par le principe du maximum,

$$v(z) \leqslant \max\left\{M + \varepsilon, K - \eta \log \frac{R}{\delta}\right\}$$

sur $\mathcal{O}_{\delta,R}$. Par conséquent, toujours sur $\mathcal{O}_{\delta,R}$,

$$u(z) \leqslant \max\left\{M + \varepsilon, K - \eta \log \frac{R}{\delta}\right\} + \eta \log\left|\frac{z - \zeta_0}{\delta}\right|.$$

Fixons $z \in \mathcal{O}_\delta$. Choisissons R suffisamment grand pour qu'à la fois $z \in \mathcal{O}_{\delta,R}$ (de sorte que l'inéquation précédente vaille) et $K - \eta \log(R/\delta) \leqslant M + \varepsilon$. Nous obtenons

$$u(z) \leqslant M + \varepsilon + \eta \log\left|\frac{z - \zeta_0}{\delta}\right|.$$

Comme $\eta > 0$ est arbitraire, il découle $u(z) \leqslant M + \varepsilon$. Cela vaut sur $\mathcal{O}_\delta$, voire sur tout $\mathcal{D}$, par choix de δ. Finalement, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, le théorème est démontré. □

Remarques. (1) Dans ce contexte, la fonction $\log|(z - \zeta_0)/\delta|$ est dite de *Phragmén–Lindelöf.*

(2) Nous avons supposé $u(z) \leqslant K$ pour tout $z \in \mathcal{D}$. Dans quelle mesure cette hypothèse peut-elle être affaiblie ? La précédente preuve fonctionne, sous la supposition plus générale

$$u(z) \leqslant o(\log|z|) \quad \text{quand } z \to \infty.$$

Par contre, la condition $u(z) = O(\log|z|)$ ne suffit pas, comme en fait foi le plus simple exemple : $\log|z|$, défini sur $\mathcal{D} = \{z \,;\, |z| > 1\}$, tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$, mais vaut zéro sur $\partial\mathcal{D}$.

Cas des fonctions sous-harmoniques.

Définition. Une fonction, $u(z)$, définie sur un ensemble borélien $\mathcal{D}$ dont l'image est incluse dans $[-\infty, \infty[$ est dite *semi-continue supérieurement* sur $\mathcal{D}$ ssi, pour tout $z_0 \in \mathcal{D}$,

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to z_0}} u(z) \leqslant u(z_0).$$

Une telle fonction jouit des propriétés suivantes, dont la vérification, aisée, est laissée au lecteur :

(1) *Pour tout $a \in [-\infty, \infty[$, $u^{-1}[a, \infty[$ est fermé pour la topologie induite par $\mathcal{D}$. En particulier, $u(z)$ est borélienne.*

(2) *Si $\mathcal{D}$ est compact, alors $u(z)$ est majorée sur $\mathcal{D}$, où elle atteint son maximum.*

(3) *Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné. Si, pour tout $\zeta \in \partial\mathcal{D}$, les limites supérieures $\limsup_{z\in\mathcal{D}, z\to\zeta} u(z)$ sont finies, alors elles sont uniformément bornées. De plus, définissant*

$$u(\zeta) = \limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z)$$

aux points $\zeta \in \partial\mathcal{D}$, $u(z)$, ainsi prolongée, est semi-continue supérieurement sur $\overline{\mathcal{D}}$.

Les propriétés (1) et (2) assurent que l'intégrale, dans la prochaine définition, est bien définie, — bien qu'elle vaille possiblement $-\infty$:

Définition. Une fonction, $u(z)$, définie sur un domaine $\mathcal{D}$ dont l'image est incluse dans $[-\infty, \infty[$ est dite *sous-harmonique* dans $\mathcal{D}$ ssi

(1) $u(z)$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{D}$.

(2) Pour tout $z_0 \in \mathcal{D}$ et $\rho > 0$ suffisamment petit (dépendamment de z_0),

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Remarques. (1) Si $-u(z)$ est sous-harmonique, $u(z)$ est dite *surharmonique.*

(2) Une fonction est harmonique si et seulement si elle est à la fois sous-harmonique et surharmonique.

(3) Toute combinaison linéaire positive de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique.

Les fonctions de la forme $\log|f(z)|$, où $f(z)$ est analytique dans $\mathcal{D}$, constituent les exemples les plus fréquents de fonctions sous-harmoniques, — en convenant, bien sûr, que $\log|f(z)| = -\infty$ si $f(z) = 0$.

En effet, notons que $\log|f(z)|$ ne prend jamais la valeur $+\infty$ sur $\mathcal{D}$. De plus, pour $z_0 \in \mathcal{D}$ fixé, la continuité de $\log|f(z)|$ en z_0 est claire, que $f(z_0)$ soit nul ou non. Finalement, si $f(z_0) = 0$, la propriété (2) de la définition est trivialement vérifiée. Sinon, $\log f(z)$ possède une détermination holomorphe sur un petit disque centré en z_0 et contenu dans $\mathcal{D}$. Par la formule de Cauchy,

$$\log f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta,$$

l'égalité des parties réelles des deux membres de l'équation donnant

$$\log|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|f(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta.$$

Le principe du maximum et sa généralisation s'étendent au cas des fonctions sous-harmoniques :

Théorème 1.3. *Soit donnée une fonction*, $u(z)$, *sous-harmonique dans un domaine borné* $\mathcal{D}$. *Supposons*

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z) \leqslant M$$

pour tout $\zeta \in \partial\mathcal{D}$. *Alors*, $u(z) \leqslant M$ *sur* $\mathcal{D}$.

Preuve. Définissons

$$u(\zeta) = \limsup_{\substack{z\in\mathcal{D}\\ z\to\zeta}} u(z),$$

pour ζ sur la frontière de $\mathcal{D}$. Par les propriétés mentionnées des fonctions semi-continues, $u(z)$, ainsi prolongée, demeure semi-continue supérieurement et atteint son maximum, K. Supposons que ce maximum soit atteint en un certain $z_0 \in \mathcal{D}$ — autrement, le résultat s'ensuivrait. Par sous-harmonicité,

$$K = u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

pour $0 < \rho < r_0$, — où r_0 est suffisamment petit. Par conséquent,

$$u(z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = K \quad \text{p.p.}^{1}$$

lorsque $0 < \rho < r_0$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$, c'est-à-dire $u(z) = K$ p.p. sur $\mathcal{B}(z_0, r_0)$.

Déduisons que $u(z) = K$ sur tout $\mathcal{B}(z_0, r_0)$. Pour tout z dans cette boule, il existe une suite, $\{z_n\}$, convergeant vers z et vérifiant $u(z_n) = K$. Par semi-continuité supérieure,

$$K = \lim_n u(z_n) \leqslant u(z).$$

Comme K est maximal, il résulte $u(z) = K$ sur tout $\mathcal{B}(z_0, r_0)$.

Étendons le résultat à tout $\mathcal{D}$. Pour ce faire, envisageons l'ensemble

$$\mathcal{G} = \{z \in \mathcal{D}\ ;\ u = K \text{ en un voisinage de } z\},$$

[1] Presque partout.

clairement ouvert, et considérons une suite, $\{z_n\}$, dans $\mathcal{G}$, convergeant vers un point $z^* \in \mathcal{D}$. À nouveau,

$$K = \lim_n u(z_n) \leqslant u(z^*) \leqslant K,$$

c'est-à-dire $u(z^*) = K$. Par ce qui précède, nous avons même $z^* \in \mathcal{G}$. En d'autres mots, $\mathcal{G}$ est fermé pour la topologie induite par $\mathcal{D}$. Étant également ouvert (pour cette même topologie), la connexité de $\mathcal{D}$ entraîne $\mathcal{G} \in \{\varnothing, \mathcal{D}\}$. Comme $z_0 \in \mathcal{G}$, nécessairement $\mathcal{G} = \mathcal{D}$, c'est-à-dire $u(z) = K$ sur tout $\mathcal{D}$.

Finalement, le résultat se prolonge à la frontière de $\mathcal{D}$: pour tout $\zeta \in \partial\mathcal{D}$, il existe une suite $\{z_n\}$ dans $\mathcal{D}$ convergeant vers ζ, vérifiant donc

$$K = \lim_n u(z_n) \leqslant u(\zeta) \leqslant K,$$

d'où $u(\zeta) = K$. Nous avons alors $K \leqslant M$ et le résultat s'ensuit. □

Notre preuve du principe du maximum généralisé (théorème 1.2) repose entièrement sur l'application du principe du maximum à la fonction harmonique

$$v(z) = u(z) - \eta \log\left|\frac{z - \zeta_0}{\delta}\right|.$$

Si plutôt, dans nos hypothèses, $u(z)$ était sous-harmonique, alors $v(z)$ le serait également (car $-\eta \log|(z - \zeta_0)/\delta|$ est harmonique dans la région considérée) et le principe du maximum s'y appliquerait. Pour cette raison,

Théorème 1.4. *Le principe du maximum généralisé vaut, pour les fonctions sous-harmoniques.*

1.1.2. Autres arguments de Phragmén–Lindelöf.

Sur un secteur angulaire. Pour une fonction définie sur un secteur angulaire, plutôt que sur un domaine en général, la condition d'être bornée peut être allégée de la manière suivante, sans affecter la conclusion du principe généralisé du maximum :

Théorème 1.5. *Soit $u(z)$ une fonction sous-harmonique dans un secteur angulaire, $\mathcal{S}$, issu de l'origine et d'angle 2γ, — où $0 < \gamma \leqslant \pi/2$. Supposons, pour tout $\zeta \in \partial\mathcal{S}$,*

$$\limsup_{\substack{z\in\mathcal{S} \\ z\to\zeta}} u(z) \leqslant M.$$

S'il existe un $\alpha < \pi/(2\gamma)$ et une constante $C > 0$ tels que $u(z) \leqslant C|z|^\alpha$, alors $u(z) \leqslant M$ dans $\mathcal{S}$.

Remarque. La conclusion de ce théorème fait défaut pour $\alpha = \pi/(2\gamma)$. Pour cette raison, le nombre $\pi/(2\gamma)$ est dit *exposant critique*, dans ce contexte.

Preuve. Quitte à remplacer z par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}z$ pour le bon β, supposons, sans perte de généralité,

$$\mathcal{S} = \{z \, ; \, z \neq 0 \text{ et } |\arg z| < \gamma\}.$$

Fixons $\alpha < \alpha' < \pi/(2\gamma)$. Comme $\mathcal{S}$, simplement connexe, ne contient pas l'origine, la fonction $z^{\alpha'}$ y est holomorphe. En particulier, sa partie réelle y est harmonique. Comme cette dernière, évaluée en $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, vaut $r^{\alpha'} \cos \alpha'\theta$, les conditions $0 < \alpha' < \pi/(2\gamma)$ et $|\theta| < \gamma$ la rendent non négative, même qu'en réalité $\Re(z^{\alpha'}) \geqslant Dr^{\alpha'}$, en posant $D = \cos(\alpha'\gamma) > 0$.

Définissons, sur $\mathcal{S}$,

$$u_\eta(z) = u(z) - \eta\Re(z^{\alpha'}),$$

où $\eta > 0$ est arbitrairement fixé. Cette fonction est sous-harmonique et vérifie, pour $\zeta \in \partial\mathcal{S}$,

$$\limsup_{\substack{z \in \mathcal{S} \\ z \to \zeta}} u_\eta(z) \leqslant M.$$

De plus, $u_\eta(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \leqslant Cr^\alpha - \eta Dr^{\alpha'}$, où le membre de droite est inférieur à M si $r > R$, — pour un certain R. Donc, $u_\eta(z) \leqslant M$ sur $\{z \in \mathcal{S} \, ; \, |z| \geqslant R\}$, voire sur tout $\mathcal{S}$, — par le principe du maximum.

Ainsi, pour $z \in \mathcal{S}$ arbitrairement fixé,

$$u(z) = u_\eta(z) + \eta\Re(z^{\alpha'}) \leqslant M + \eta\Re(z^{\alpha'}).$$

Comme $\eta > 0$ est arbitraire, il résulte $u(z) \leqslant M$ sur $\mathcal{S}$. □

Cas limite du précédent théorème. Quelle conséquence la méthode de Phragmén–Lindelöf permet-elle de tirer si α vaut l'exposant critique, $\pi/(2\gamma)$, — dans lequel cas la conclusion du théorème précédent faillit ?

Concentrons-nous sur le cas où $\gamma = \pi/2$, c'est-à-dire où le secteur $\mathcal{S}$ est un demi-plan (les autres cas s'y ramènent, par un changement de variables de la forme $z \mapsto z^\beta$). Sans restreindre la généralité, nous supposons $\mathcal{S}$ égal au demi-plan supérieur, à savoir $\Im z > 0$.

Théorème 1.6. *Soit $u(z)$ une fonction sous-harmonique, définie sur $\Im z > 0$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\limsup_{\substack{\Im z > 0 \\ z \to x}} u(z) \leqslant M.$$

Si $u(z) \leqslant C|z|$, alors

$$u(z) \leqslant M + a\Im z,$$

où $a = \limsup_{y\to\infty} u(\mathrm{i}y)/y$.

Preuve. Puisque $u(\mathrm{i}y) \leqslant Cy$ pour $y > 0$, il est clair que $-\infty \leqslant a < \infty$. Pour $a' > a$ arbitrairement fixé, la fonction $a'\Im z$ est harmonique et vérifie trivialement

$$\limsup_{\substack{\Im z > 0 \\ z \to x}} a'\Im z = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction $v(z) = u(z) - a'\Im z$ est sous-harmonique dans $\Im z > 0$ et vérifie

$$\limsup_{\substack{\Im z > 0 \\ z \to x}} v(z) \leqslant M.$$

Considérons le premier quadrant du plan cartésien. Sur sa frontière horizontale, l'inéquation précédente signifie que la limite supérieure de $v(z)$ est majorée par M, tandis que, sur sa frontière verticale, $v(z)$ est majorée par un certain K, par choix de a'. En effet,

$$v(\mathrm{i}y) = \left(\frac{u(\mathrm{i}y)}{y} - a'\right)y \leqslant 0$$

si $y > H$, — pour un certain H. Comme $v(\mathrm{i}y)$ est majorée pour $0 < y \leqslant H$, la précédente affirmation est justifiée.

Puisque le premier quadrant est un secteur d'angle $\pi/2$, l'exposant critique, en vue d'appliquer le théorème 1.5, vaut 2. Or,

$$v(z) \leqslant C|z| - a'\Im z \leqslant (C + |a'|)|z|.$$

Donc, par le théorème cité, $v(z)$ est bornée — par $\max\{M, K\}$ — sur le premier quadrant.

Un argument semblable montre que $v(z)$ est bornée sur le deuxième quadrant, donc, sur tout $\Im z > 0$. Par le principe du maximum généralisé, $v(z) \leqslant M$ sur ce demi-plan. Il découle

$$u(z) = v(z) + a'\Im z \leqslant M + a'\Im z.$$

Comme $a' > a$ est arbitraire, le résultat s'ensuit. □

Remarque. L'hypothèse $u(z) \leqslant C|z|$ peut être remplacée par $u(z) \leqslant C|z| + B$, pour une constante arbitraire B, sans changer le résultat, — ce qui peut être vu en appliquant le théorème précédent à la fonction $u(z) - B$.

De cette remarque et du théorème, il s'ensuit immédiatement :

Corollaire. *Soit $f(z)$ une fonction continue sur $\Im z \geqslant 0$, analytique dans $\Im z > 0$ et vérifiant $|f(x)| \leqslant M$ sur $\mathbb{R}$. Si, pour des constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$,*

$$|f(z)| \leqslant C\mathrm{e}^{\alpha|z|} \tag{1.2}$$

sur $\Im z \geqslant 0$, alors, sur ce demi-plan,

$$|f(z)| \leqslant M\mathrm{e}^{a\Im z},$$

où $a = \limsup_{y\to\infty} y^{-1}\log|f(\mathrm{i}y)|$.

Définition. Les fonctions vérifiant (1.2) sur un ensemble donné sont dites *de type exponentiel* sur cet ensemble.

Le précédent corollaire n'est qu'un premier pas dans leur investigation, poursuivie à la prochaine section.

1.2. Théorème de Paley–Wiener

Le théorème de Paley–Wiener, *que nous démontrons, fournit une condition suffisante pour qu'une fonction soit la transformée de Fourier d'un $\varphi(\lambda)$ à support compact. Nous nous soucions, par la suite, de calculer précisément l'intervalle de support d'un tel $\varphi(\lambda)$.*

Poursuivons l'investigation des fonctions de type exponentiel ; celles-ci sont importantes en analyse de Fourier. Soit, par exemple, $\varphi \in L^1[-a, b]$ et considérons l'intégrale

$$\int_{-a}^{b} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Puisque $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}| = \mathrm{e}^{-\lambda\Im z}$, celle-ci est absolument convergente sur tout le plan, donnant une fonction, $f(z)$, bien définie, voire entière.[2] Cette dernière est aussi de type exponentiel dans $\mathbb{C}$, car $|f(z)| \leqslant \|\varphi\|_1 \mathrm{e}^{a\Im z}$ sur le demi-plan supérieur, tandis que $|f(z)| \leqslant \|\varphi\|_1 \mathrm{e}^{b|\Im z|}$ sur le demi-plan inférieur. Il est intéressant de noter, pour référence ultérieure, que ces précédentes inégalités mènent aux relations suivantes :

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{y} \leqslant a \quad \text{et} \quad \limsup_{y\to-\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{|y|} \leqslant b.$$

Le théorème de Paley–Wiener nous révèlera que les fonctions entières de type exponentiel sont, sous certaines conditions, de la forme précédente. Auparavant,

Théorème 1.7. *Soit $f(z)$ une fonction analytique dans $\Im z > 0$, continue et de type exponentiel sur $\Im z \geqslant 0$. Fixons $H > 0$ arbitrairement. Si*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x + \mathrm{i}y) = 0$$

uniformément sur la bande $\{x + \mathrm{i}y\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant H\}$.

Preuve. Posons $a = \limsup_{y\to\infty} y^{-1}\log|f(\mathrm{i}y)|$, puis fixons arbitrairement $\varepsilon > 0$ et $b > a$. Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, d'une part, il existe un $X > 0$ tel que

$$|\mathrm{e}^{ibx} f(x)| = |f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-bH}\varepsilon \quad \text{si } x \geqslant X. \tag{1.3}$$

D'autre part, il existe un $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le corollaire du théorème 1.6, $|f(z)| \leqslant M\mathrm{e}^{a\Im z}$ sur $\Im z \geqslant 0$. Par conséquent, sur

[2] En effet, puisque $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - 1| \leqslant |z|\mathrm{e}^{|z|}$ pour tout nombre complexe z, l'intégrande de $\int_{-a}^{b}((\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(z+h)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z})/h)\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ est dominée par $|\lambda\varphi(\lambda)|\exp(-\lambda\Im z + \frac{1}{2}|\lambda\Im z|)$ pour h complexe vérifiant $|h| < |\Im z|/2$. Incidemment, ce dominant reste valable pour $b = \infty$ si $\Im z > 0$, ou pour $a = \infty$ si $\Im z < 0$. (*N.d.T.*)

ce demi-plan, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}f(z)| \leqslant M\mathrm{e}^{-(b-a)\Im z}$ et il existe un Y, que nous prenons plus grand que H, tel que

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}f(z)| \leqslant \mathrm{e}^{-bH}\varepsilon \quad \text{si } \Im z \geqslant Y. \tag{1.4}$$

Nous nous intéressons au secteur ouvert suivant :

$$\mathcal{S} = \{x + \mathrm{i}y \; ; \; x > X \text{ et } y > 0\}.$$

Envisageons la fonction, définie sur $\Im z \geqslant 0$,

$$g_K(z) = \frac{z}{z + \mathrm{i}K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}f(z)$$

pour un très grand K, au point où

$$|g_K(X + \mathrm{i}y)| \leqslant \mathrm{e}^{-bH}\varepsilon \quad \text{si } 0 \leqslant y \leqslant Y. \tag{1.5}$$

Puisque $|z/(z + \mathrm{i}K)| < 1$, $g_K(z)$ est de type exponentiel sur $\Im z \geqslant 0$. Pour la même raison — et en vertu des relations (1.3), (1.4) et (1.5), —

$$|g_K(z)| \leqslant \mathrm{e}^{-bH}\varepsilon \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}.$$

Ainsi, le théorème 1.5, — qui s'applique, puisque l'exposant critique vaut 2, — entraîne $|g_K(z)| \leqslant \mathrm{e}^{-bH}\varepsilon$ pour tout $z \in \mathcal{S}$.[3] Par conséquent, si $z = x + \mathrm{i}y$ vérifie $0 \leqslant y \leqslant H$ et $x \geqslant X$, alors

$$|f(z)| = \left|\frac{z + \mathrm{i}K}{z}\right| |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bz}g_K(z)| \leqslant \left|\frac{z + \mathrm{i}K}{z}\right|\mathrm{e}^{by}\mathrm{e}^{-bH}\varepsilon \leqslant \left|\frac{z + \mathrm{i}K}{z}\right|\varepsilon.$$

Or, pour de tels z, $\lim_{x\to\infty} |(z + \mathrm{i}K)/z| = 1$ uniformément en $y \in [0, H]$. Donc, en prenant x suffisamment grand, $|f(x + \mathrm{i}y)| < 2\varepsilon$ pour tout $0 \leqslant y \leqslant H$. Un raisonnement analogue mène à la même conclusion pour $-x$ suffisamment grand (en valeur absolue). Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, ceci complète la démonstration. □

La démonstration du théorème de Paley–Wiener recourt au théorème de Plancherel, — que nous croyons bon de rappeler. Ce dernier stipule que, pour une fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ donnée, les intégrales

$$\hat{f}_A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x) \, \mathrm{d}x,$$

lorsque $A \to \infty$, tendent *en norme* L^2 vers une fonction $\hat{f}(\lambda)$ vérifiant

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Parallèlement, les intégrales

$$f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\lambda} \hat{f}(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$$

[3] À strictement parler, le théorème 1.5 est appliqué à la fonction $\log|g_K(z + X)|$, qui vérifie une inégalité de la forme $\log|g_K(z + X)| \leqslant C|z|$ sur le premier quadrant. (*N.d.T.*)

tendent, toujours en norme L^2, vers $f(x)$. Notons qu'en conséquence, il existe une suite $A_n \to \infty$, qui dépend *a priori* de $f(x)$, — bien qu'une analyse plus profonde montre qu'elle n'en dépend pas, — telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_n}^{A_n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} f(x)\, \mathrm{d}x = \hat{f}(\lambda) \text{ p.p.}$$

Voici enfin le *théorème de Paley–Wiener* :

Théorème 1.8. *Toute fonction entière, de type exponentiel et dont la restriction à l'axe réel est dans $L^2(\mathbb{R})$ est de la forme*

$$f(z) = \int_{-a}^{b} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda,$$

où $\varphi(\lambda) \in L^2[-a, b]$ et

$$a = \limsup_{y\to\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{y}, \quad b = \limsup_{y\to-\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{|y|}.$$

Preuve. Par hypothèse, il existe des constantes $C > 0$ et $A > 0$ telles que

$$|f(z)| \leqslant C\mathrm{e}^{A|z|}. \tag{1.6}$$

Définissons, pour $h > 0$,

$$f_h(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(z+t)\, \mathrm{d}t.$$

Cette fonction jouit des propriétés suivantes, — dont la démonstration est laissée au lecteur :

(1) $f_h(z)$ est entière.
(2) Pour tout $h > 0$, il existe un $C_h < \infty$ tel que $|f_h(z)| \leqslant C_h \mathrm{e}^{A|z|}$, — où la constante A provient de (1.6).
(3) Pour tout $h > 0$, il existe un $M_h < \infty$ tel que $f_h(x) \leqslant M_h$ sur $\mathbb{R}$.
(4) Mieux encore, $\lim_{x\to\pm\infty} f_h(x) = 0$.
(5) $f_h(x)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.
(6) $\lim_{h\to 0} \|f_h(x) - f(x)\|_2 = 0$.

Recourant au théorème de Plancherel, nous définissons

$$\varphi_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f_h(x)\, \mathrm{d}x \tag{1.7}$$

et

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{l.i.m.}_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f(x)\, \mathrm{d}x,$$ [4]

de sorte que

$$\lim_{h\to 0} \|\varphi_h - \varphi\|_2 = 0. \tag{1.8}$$

[4] l.i.m. pour *limit in mean*, la limite en norme L^2.

Démontrons d'abord qu'en dehors de $[-A, A]$, $\varphi_h(\lambda)$ s'annule presque partout, quel que soit $h > 0$. Vu les propriétés (1), (2) et (3) de $f_h(z)$, le corollaire du théorème 1.6 s'applique, entraînant

$$|f_h(z)| \leqslant M_h \mathrm{e}^{A|\Im z|}. \tag{1.9}$$

Vu les propriétés (1), (2), (3) et (4) de $f_h(z)$, le théorème 1.7 s'applique également, de sorte que, pour $L > 0$ arbitrairement fixé,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_h(x + \mathrm{i}y) = 0 \quad \text{uniformément sur } |\Im z| \leqslant L. \tag{1.10}$$

Laissons λ varier en dehors de $[-A, A]$, — pour le moment, dans $]-\infty, -A[$. Par (1.7), il existe une suite, $\{R_k\}$, tendant vers l'infini, telle que

$$\varphi_h(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k\to\infty} \int_{-R_k}^{R_k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f_h(x)\,\mathrm{d}x \text{ p.p.}$$

Il suffit de démontrer, pour tout $\lambda \in\,]-\infty, -A[$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f_h(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} 0$$

pour conclure $\varphi_h(\lambda) = 0$ p.p. dans ce même intervalle. À cette fin, fixons $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in\,]-\infty, -A[$, et posons $\eta = -(A+\lambda) > 0$. Pour $R > 0$, envisageons le chemin d'intégration $\Gamma_R = \mathrm{I} * \mathrm{II} * \mathrm{III}$, où

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= [-R, -R + \mathrm{i}R], \\ \mathrm{II} &= [-R + \mathrm{i}R, R + \mathrm{i}R], \\ \mathrm{III} &= [R + \mathrm{i}R, R], \end{aligned}$$

en convenant de désigner par $[a, b]$ le segment orienté joignant a et b, et par $*$ la concaténation. Par le théorème de Cauchy,

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f_h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z.$$

Or, par (1.9),

$$\left| \int_{\mathrm{II}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant 2RM_h \mathrm{e}^{-\eta R} \leqslant \varepsilon$$

pour R suffisamment grand. De plus, considérons la décomposition

$$\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i} \int_{[0,L]*[L,R]} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(-R+\mathrm{i}y)} f_h(-R + \mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y,$$

où L est si grand que $M_h \mathrm{e}^{-\eta L}/\eta \leqslant \varepsilon$ et où $R > L$. Comme

$$|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(-R+\mathrm{i}y)} f_h(-R + \mathrm{i}y)| \leqslant M_h \mathrm{e}^{-\eta y},$$

nous trouvons

$$\left| \int_{L}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(-R+\mathrm{i}y)} f_h(-R + \mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y \right| \leqslant M_h \int_{L}^{R} \mathrm{e}^{-\eta y}\,\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon$$

par choix de L, tandis que

$$\left|\int_0^L \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(-R+\mathrm{i}y)} f_h(-R+\mathrm{i}y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \mathrm{e}^{|\lambda|L} L \sup_{0\leqslant y\leqslant L} |f_h(-R+\mathrm{i}y)| \leqslant \varepsilon$$

pour R suffisamment grand, — en vertu de la propriété (1.10). Ainsi, pour R grand,

$$\left|\int_{\mathrm{I}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Finalement, un raisonnement analogue montre que, pour R grand,

$$\left|\int_{\mathrm{III}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Donc, au total, $|\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z| \leqslant 5\varepsilon$ pour R suffisamment grand, d'où il s'ensuit

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda z} f_h(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0,$$

et ce, pour $\lambda < -A$, — tel que désiré.

En utilisant plutôt le demi-plan inférieur, c'est-à-dire le chemin d'intégration $[-R, -R-\mathrm{i}R] * [-R-\mathrm{i}R, R-\mathrm{i}R] * [R-\mathrm{i}R, R]$, la même conclusion est tirée pour $\lambda > A$. En somme, pour $\lambda \notin [-A, A]$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} f_h(x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.11}$$

d'où nous inférons, tel qu'annoncé, $\varphi_h(\lambda) = 0$ p.p. en dehors de $[-A, A]$.

La relation (1.8) nous permet de tirer la même conclusion pour $\varphi(\lambda)$ et, comme $f(x) = \text{l.i.m.}_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$, de déduire

$$f(x) = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \text{ p.p.}$$

Mieux encore, $\varphi(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$ entraîne $\varphi(\lambda) \in L^1[-A, A]$, de sorte que la fonction $\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ est bien définie sur $\mathbb{C}$, voire entière. Comme elle est égale à f presque partout sur $\mathbb{R}$, par le principe de permanence,

$$f(z) = \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

partout sur $\mathbb{C}$. Ajoutons que, par le lemme de Riemann–Lebesgue,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Resserrons nos bornes d'intégration. Pour a et b tels que précisés dans l'énoncé, posons $m = (b-a)/2$ et envisageons

$$g(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mz} f(z) = \int_{-A-m}^{A-m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' z}\varphi(\lambda'+m)\,\mathrm{d}\lambda'. \tag{1.12}$$

Il s'agit d'une fonction entière, de type exponentiel, dont la restriction à l'axe réel est à carré sommable et vérifie $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. En particulier, il existe un $M' > 0$ tel que $|g(x)| \leqslant M'$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, cette fois,

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{\log|g(\mathrm{i}y)|}{y} = A' \quad \text{et} \quad \limsup_{y\to-\infty} \frac{\log|g(\mathrm{i}y)|}{|y|} = A',$$

où $A' = (a+b)/2$. Par le corollaire du théorème 1.6, il s'ensuit [5]

$$|g(z)| \leqslant M'\mathrm{e}^{A'|\Im z|}.$$

En raisonnant sur $g(z)$, A' et M' comme nous l'avons fait sur $f_h(z)$, A et M_h, et ce, pour passer de la relation (1.9) à (1.11), nous obtenons, pour $\lambda' \notin [-A', A']$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda' x} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Comme, dans l'équation (1.12), la fonction $\varphi(\lambda' + m)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$, le théorème de Plancherel entraîne alors $\varphi(\lambda' + m) = 0$ p.p. hors de $[-A', A']$, c'est-à-dire

$$g(z) = \int_{-A'}^{A'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda' z} \varphi(\lambda' + m)\,\mathrm{d}\lambda'.$$

De là, la relation $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} g(z)$ implique

$$f(z) = \int_{-a}^{b} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,$$

ce qui complète la démonstration. □

Scolie. S'il arrivait, dans la conclusion du précédent théorème, que $\varphi(\lambda)$, défini sur $[-a, b]$, s'annule au voisinage de $-a$, alors $f(z)$ pourrait aussi s'écrire

$$f(z) = \int_{-a+\delta}^{b} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$$

pour un certain $\delta > 0$. Ainsi, vu les premiers paragraphes de cette section, nous obtiendrions

$$a = \limsup_{y\to\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{y} \leqslant a - \delta,$$

ce qui est absurde. Puisque le même raisonnement tient pour b, ceci montre que, dans la conclusion du théorème de Paley–Wiener, $[-a, b]$ est l'intervalle de support [6] de la fonction $\varphi(\lambda)$.

[5] Ici il devient clair, en invoquant la relation suivante et le théorème de Liouville, que $A' > 0$, — en d'autres mots, que $]-a, b[\, \neq 0$. (*N.d.T.*)

[6] Par *intervalle de support* d'une fonction, nous entendons le plus petit intervalle fermé en dehors duquel la fonction s'annule presque partout.

Complément. Pour $0 < A < \infty$ et $\varphi(\lambda) \in L^1[-A, A]$ donnés, considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Posons, comme toujours,

$$a = \limsup_{y\to\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{y} \quad \text{et} \quad b = \limsup_{y\to-\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{|y|}.$$

Nous l'avons vu au début de cette section, $-A \leqslant -a$ et $b \leqslant A$. Est-il vrai que $[-a, b]$ est l'intervalle de support de $\varphi(\lambda)$ en général ?

Dans le cas où $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, — ce qui revient à dire, par le théorème de Plancherel, que $\varphi(\lambda) \in L^2[-A, A]$, — le théorème de Paley–Wiener permet d'écrire

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z} \tilde{\varphi}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

pour un $\tilde{\varphi}(\lambda) \in L^2[-a, b]$ dont l'intervalle de support est précisément $[-a, b]$. Toujours par le théorème de Plancherel, il découle que $\varphi(\lambda)$ et $\tilde{\varphi}(\lambda)$, prolongés de manière nulle en dehors de leurs domaines de définition respectifs, sont égaux presque partout. En particulier, l'intervalle de support de φ est alors $[-a, b]$.

Si $\varphi \in L^1[-A, A]$ seulement, le hic peut être contourné de la manière suivante.

Théorème 1.9. *Dans le contexte précédent, l'intervalle de support de $\varphi(\lambda)$ vaut $[-a, b]$.*

Preuve. Après avoir prolongé $\varphi(\lambda)$ de manière nulle hors de $[-A, A]$, posons, pour $h > 0$,

$$\varphi_h(\lambda) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \varphi(\lambda - t)\, \mathrm{d}t.$$

Ainsi, $\varphi_h(\lambda)$ s'annule hors de $[-A - h, A + h]$ et vérifie

$$|\varphi_h(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2h} \|\varphi\|_1 < \infty,$$

donc, est intégrable, voire à carré sommable. De plus,

$$\lim_{h\to 0} \|\varphi_h(\lambda) - \varphi(\lambda)\|_1 = 0.$$

Posons

$$f_h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A-h}^{A+h} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \varphi_h(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda,$$

qui est aussi à carré sommable. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\varphi(\lambda-t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda-t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda-t)x}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t \\ &= f(x)\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t = f(x)\frac{\sin hx}{hx}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le prolongement entier de $f_h(x)$ vaut

$$f_h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A-h}^{A+h}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\varphi_h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = f(z)\frac{\sin hz}{hz}. \tag{1.13}$$

De plus, $|f_h(z)| \leqslant C\mathrm{e}^{(A+h)|z|}$ pour une constante C calculable, — de sorte que le théorème de Paley–Wiener s'applique à $f_h(z)$.

Pour h fixé, l'équation (1.13) entraîne

$$|f_h(\mathrm{i}y)| = |f(\mathrm{i}y)|\mathrm{e}^{h|y|}O\Big(\frac{1}{|y|}\Big)$$

quand $|y| \to \infty$, c'est-à-dire

$$\frac{\log|f_h(\mathrm{i}y)|}{|y|} = \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{|y|} + h + O\Big(\frac{\log|y|}{|y|}\Big), \quad |y| \to \infty.$$

En particulier,

$$\limsup_{y\to\infty}\frac{\log|f_h(\mathrm{i}y)|}{y} = a + h.$$

De même,

$$\limsup_{y\to-\infty}\frac{\log|f_h(\mathrm{i}y)|}{|y|} = b + h.$$

Parce que, cette fois, $\varphi_h(\lambda) \in L^2(\mathbb{R})$, le théorème de Paley–Wiener, eu égard à l'équation (1.13), permet de déduire $\varphi_h(\lambda) = 0$ p.p. en dehors de $[-a-h, b+h]$. Comme $\lim_{h\to 0}\|\varphi_h(\lambda) - \varphi(\lambda)\|_1 = 0$, il s'ensuit

$$\varphi(\lambda) = 0 \text{ p.p. en dehors de } [-a, b].$$

En outre, tel qu'établi au début de la section, il ne peut y avoir d'intervalle fermé plus petit que $[-a, b]$ en dehors duquel $\varphi(\lambda)$ s'annule presque partout. La preuve est donc complète. □

Remarque. Ce résultat subsiste en remplaçant $\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ par une mesure complexe, μ, sur $[-A, A]$. Pour l'établir, nous utilisons, à la place de $\varphi_h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$, la convolution de μ et $(2h)^{-1}\chi_{[-h,h]}(\lambda)$. Cette mesure est également de la forme $\varphi_h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ et converge vaguement vers $\mathrm{d}\mu(\lambda)$ quand $h \to 0$, — où $\varphi_h(\lambda)$ est borné et à support dans $[-A-h, A+h]$.

1.3. Introduction à la condition $\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)^{-1}\log^+|f(x)|\,\mathrm{d}x<\infty$

Il est intéressant d'étudier les fonctions de type exponentiel dont le module, sur l'axe réel, est sujet à une certaine contrainte, comme $|f(x)| = O(1)$, $|f(x)| \in L^p(\mathbb{R})$, $|f(x)|/(1+x^2) = O(1)$, $|f(x)|/(1+|x|) \in L^2(\mathbb{R})\ldots$ *La condition ci-dessus embrasse la plupart de ces situations. Nous montrons, au théorème* 1.12, *qu'elle entraîne son analogue pour* $\log^-|f(x)|$; *ce théorème trouve en fait de nombreuses applications dont, par exemple, le critère de Carleman–Ostrowski en analyse réelle, qui fait l'objet du prochain chapitre. Mentionnons aussi l'utilisation fréquente du second corollaire de ce théorème dans la suite de ce cours. Au préalable, nous rappelons la démonstration de la formule de Poisson pour le demi-plan supérieur.*

Formule de Poisson. Notre but est d'investiguer les fonctions harmoniques non négatives définies sur le demi-plan supérieur. Nous voulons, plus exactement, établir la réciproque du théorème suivant :

Théorème 1.10. *Envisageons une fonction*, $v(t)$, *définie sur* $\mathbb{R}$, *mesurable, non négative et vérifiant*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t<\infty, \tag{1.14}$$

et soit $a \geqslant 0$. *Posons, pour* $\Im z > 0$,

$$v(z) = a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors, dans $\Im z > 0$, $v(z)$ *est harmonique et non négative, cependant que* a *est caractérisé par* $\lim_{y\to\infty} v(\mathrm{i}y)/y = a$. *De plus, si* $v(t)$ *est continue en* $t_0 \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\lim_{\substack{\Im z\geqslant 0\\ z\to t_0}} v(z) = v(t_0).$$

Finalement, si $v(t) = O(|t|)$ *quand* $|t|\to\infty$ *sur l'axe réel, alors* $v(z) = O(|z|)$ *quand* $|z|\to\infty$ *sur le demi-plan* $\Im z \geqslant 0$.

Remarques. (1) La condition (1.14) assure la convergence de

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) Notons que, pour $v(t)\equiv 1$, en écrivant $z = x+\mathrm{i}y$,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Preuve. Puisque, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\Im z/|z-t|^2 = \Im\big(1/(t-z)\big)$ est harmonique dans le demi-plan supérieur, le théorème de la convergence dominée entraîne que $v(z)$ l'est également, — en plus d'être trivialement non négative. De plus,

$$\frac{v(\mathrm{i}y)}{y} = a + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t^2+y^2}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui tend vers a quand $y \to \infty$, — par la condition (1.14). La première assertion du théorème est donc établie.

Supposons $v(t)$ continue en $t_0 \in \mathbb{R}$. Comme $(t^2+1)/((t-t_0)^2+1)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, l'hypothèse (1.14) entraîne la finitude de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{(t-t_0)^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t+t_0)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Donc, il suffit, pour démontrer la seconde assertion du théorème, d'envisager $t_0 = 0$; le cas général est alors couvert, en remplaçant $v(t)$ par $v(t+t_0)$. En somme, comme $\lim_{z\to 0} a\Im z = 0$, nous sommes ramenés à démontrer

$$\lim_{\substack{\Im z>0\\ z\to 0}} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,\mathrm{d}t \overset{?}{=} v(0).$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, choisissons $\delta > 0$ pour que

$$|v(t) - v(0)| < \varepsilon \quad \text{si } |t| < 2\delta,$$

puis décomposons l'intégrale étudiée en $\mathrm{I} + \mathrm{II}$, selon les domaines d'intégration respectifs $\{t \,;\, |t| \leqslant 2\delta\}$ et $\{t \,;\, |t| > 2\delta\}$.

Concernant II, si $|z| < \delta$, la condition $|t| > 2\delta$ entraîne $|t-z| \geqslant |t|/2$. Alors, en écrivant $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\mathrm{II} = \frac{1}{\pi}\int_{|t|>2\delta} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4y}{\pi}\int_{|t|>2\delta} \frac{v(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{4yK_\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,$$

où K_δ est une constante dépendant de δ. Les membres aux deux extrémités de cette dernière chaîne de relations sont positifs et, par (1.14), inférieurs à ε quand $|z|$ est suffisamment petit.

Concernant I,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\pi}\int_{-2\delta}^{2\delta} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-2\delta-x}^{2\delta-x} \frac{y}{s^2+y^2} v(x+s)\,\mathrm{d}s.$$

Par choix de δ,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-2\delta-x}^{2\delta-x} \frac{y}{s^2+y^2}(v(0)-\varepsilon)\,\mathrm{d}s < \mathrm{I} < \frac{1}{\pi}\int_{-2\delta-x}^{2\delta-x} \frac{y}{s^2+y^2}(v(0)+\varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

Explicitement, I est donc compris entre ces deux valeurs :

$$(v(0) \pm \varepsilon)\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{2\delta - x}{y} - \arctan\frac{-2\delta - x}{y}\right).$$

Si $|x| < \delta$, alors $2\delta - x$ reste supérieur à δ, tandis que $-2\delta - x$ reste inférieur à $-\delta$, de sorte que, quand $y \downarrow 0$, les précédentes quantités tendent vers $v(0) \pm \varepsilon$ indépendamment de la valeur précise de x. Par conséquent, si $|z|$ est suffisamment petit, $v(0) - 2\varepsilon < \mathrm{I} < v(0) + 2\varepsilon$.

Au total, $|\pi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}(\Im z/|z-t|^2) v(t)\,\mathrm{d}t - v(0)| < 3\varepsilon$ pour $|z|$ petit, d'où il résulte

$$\lim_{\substack{\Im z>0\\ z\to 0}} v(z) = v(0),$$

— ce qui démontre la deuxième assertion du théorème.

Finalement, supposons $v(t)=O(|t|)$ quand $|t|\to\infty$, où t varie dans $\mathbb{R}$. Posons $R=|z|$, où $\Im z\geqslant 0$. Puisque $a\Im z=O(R)$ quand $R\to\infty$, nous sommes ramenés à démontrer

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}v(t)\,\mathrm{d}t\overset{?}{=}O(R)\quad\text{quand } R\to\infty,$$

en écrivant $z=x+\mathrm{i}y$.

Décomposons l'intégrale étudiée en I+II, selon les domaines d'intégration respectifs $\{t\ ;\ |t|<2R\}$ et $\{t\ ;\ |t|\geqslant 2R\}$. Concernant I, $v(t)=O(|t|)$ et $|t|<2R$ entraînent $v(t)=O(R)$, d'où il s'ensuit

$$\mathrm{I}=O(R)\quad\text{quand } R\to\infty.$$

Concernant II, $|t|\geqslant 2R$ entraîne $|t-z|\geqslant|t|/2$, d'où il s'ensuit, en vertu de la condition (1.14),

$$\mathrm{II}\leqslant\frac{4y}{\pi}\int_{|t|\geqslant 2R}\frac{v(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t=o(R)\quad\text{quand } R\to\infty.$$

Au total, $v(z)=O(R)$, ce qui achève la démonstration. □

La réciproque du théorème précédent est la célèbre *représentation de Poisson* des fonctions harmoniques non négatives du demi-plan supérieur, continues jusqu'à la frontière :

Théorème 1.11. *Soit* $v(z)$ *une fonction harmonique dans* $\Im z>0$, *non négative et continue sur* $\Im z\geqslant 0$. *Il existe un* $a\in[0,\infty[$ *tel que*

$$v(z)=a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.15}$$

sur $\Im z>0$. *De plus,* $\int_{-\infty}^{\infty}[v(t)/(t^2+1)]\,\mathrm{d}t<\infty$, *— de sorte que l'intégrale, dans l'équation* (1.15), *est finie.*

Preuve. Montrons d'abord la seconde assertion du théorème. Pour $M>0$ quelconque, définissons, sur $\mathbb{R}$, la fonction $v_M(t)=\min\{v(t),M\}$ et posons, pour $\Im z>0$,

$$v_M(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v_M(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque v_M est continue sur $\mathbb{R}$, le dernier théorème entraîne qu'elle est, en fait, continue sur tout $\Im z\geqslant 0$, — où elle vérifie trivialement $0\leqslant v_M(z)\leqslant M$.

Posons $w_M(z)=v_M(z)-v(z)$, qui est ainsi majorée par M (puisque $v(z)\geqslant 0$) et non positive sur $\mathbb{R}$. Le principe du maximum généralisé entraîne alors $w_M\leqslant 0$ sur tout $\Im z\geqslant 0$, indépendamment de M. En particulier,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v_M(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=v_M(\mathrm{i})\leqslant v(\mathrm{i}).$$

En faisant tendre M vers l'infini, le théorème de la convergence monotone entraîne

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\leqslant v(\mathrm{i})<\infty,$$

tel qu'affirmé.

Plus généralement, $w_M(z) \leqslant 0$ entraîne, pour $\Im z > 0$,

$$v(z) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v_M(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0,$$

ce qui implique, par convergence monotone,

$$v(z) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Ainsi, le membre de gauche de cette inéquation, — que nous désignons par $W(z)$, — est une fonction harmonique non négative sur le demi-plan $\Im z > 0$. Par le théorème précédent, elle est continue sur $\Im z \geqslant 0$, en convenant que $W(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, le principe de réflexion de Schwarz permet de prolonger $W(z)$ pour en faire une fonction harmonique dans tout le plan, — en posant, pour $\Im z > 0$, $W(\bar{z}) = -W(z)$.

Ceci fait, $W(z)$ devient la partie réelle d'une fonction entière. Du développement en série de Taylor de cette dernière, nous tirons

$$W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R^{|n|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.16}$$

sur tout $\mathbb{C}$. Les coefficients de Fourier de cette dernière sommation sont alors donnés par

$$a_n R^{|n|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Comme $W(R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = -W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$, ces coefficients valent en fait

$$-\frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_0^{\pi} W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta$$

(de sorte que les a_n sont tous imaginaires). En particulier, $a_{-n} = -a_n$ et nous trouvons donc

$$W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\sin nt\,\mathrm{d}t\right)\sin n\theta.$$

Posons, pour $n \geqslant 1$,

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\sin nt\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}a_n R^n,$$

de sorte que

$$W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta.$$

Rappelons que, pour $0 < t < \pi$ et $n \geqslant 1$, $|\sin nt| \leqslant n\sin t$. Par conséquent, en utilisant le fait que $W(z) \geqslant 0$ sur $\Im z \geqslant 0$,

$$|B_n| \leqslant \frac{2}{\pi}n\int_0^{\pi} W(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\sin t\,\mathrm{d}t = n|B_1|$$

pour $n \geqslant 1$. Puisque $B_n = 2\mathrm{i}a_n R^n$, il résulte, pour $n \geqslant 2$,

$$|a_n| \leqslant \frac{n|a_1|}{R^{n-1}} \to 0, \quad R \to \infty.$$

Comme les a_n ne dépendent pas de R, force est d'admettre que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. Rapportant ce résultat dans (1.16),

$$W(z) = a\Im z$$

sur tout $\mathbb{C}$, — où $a = 2\mathrm{i}a_1$. Vu la définition de $W(z)$ sur le demi-plan supérieur, ceci achève de démontrer (1.15). □

Scolie. En sachant seulement que $v(z)$ est harmonique dans $\Im z > 0$, sans avoir idée du comportement de cette fonction au voisinage de l'axe réel, le résultat précédent s'applique à la famille de fonctions $v_h(z) = v(z + \mathrm{i}h)$, où $h > 0$ et $\Im z > 0$, — conduisant à

$$v(z+\mathrm{i}h) = a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2} v(t+\mathrm{i}h)\,\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

A priori, la quantité a dépend de h, mais en réalité elle n'en dépend pas, car

$$\lim_{y\to\infty} \frac{v(\mathrm{i}y+\mathrm{i}h)}{y} = \lim_{y\to\infty} \frac{v(\mathrm{i}y)}{y-h} = \lim_{y\to\infty} \frac{v(\mathrm{i}y)}{y}.$$

De plus,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t+\mathrm{i}h)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \leqslant v(\mathrm{i}+\mathrm{i}h),$$

de sorte que le membre de gauche de la précédente inéquation est uniformément borné lorsque $0 < h < \varepsilon$, — pour un certain ε. Par conséquent, les mesures positives suivantes,

$$\mathrm{d}\mu_h(t) = \frac{v(t+\mathrm{i}h)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t,$$

constituent, pour $0 < h < \varepsilon$, un ensemble borné.[7] Il existe donc une suite, $h_n \to 0$, telle que $\mathrm{d}\mu_{h_n}(t)$ converge vaguement vers une certaine mesure, $(1+t^2)^{-1}\,\mathrm{d}\mu(t)$, quand $n \to \infty$. Observons que, pour $y > 0$,

$$\frac{1}{t^2+1} = \frac{y^2-1}{(y^2+t^2)(t^2+1)} + \frac{1}{y^2+t^2}.$$

La relation (1.17) appliquée à $z = \mathrm{i}y$ et $h = h_n$ entraîne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_{h_n}(t) = \frac{y^2-1}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^2+t^2}\frac{v(t+\mathrm{i}h_n)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi v(\mathrm{i}y+\mathrm{i}h_n)}{y} - \pi a.$$

Grâce à la convergence vague sus-mentionnée, il résulte

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu_{h_n}(t) = \frac{y^2-1}{y^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{y^2+t^2}\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{t^2+1} + \frac{\pi v(\mathrm{i}y)}{y} - \pi a$$

[7] Nous équipons l'ensemble des mesures sur $\mathbb{R}$ de sa norme habituelle, à savoir la variation totale.

pour tout $y > 0$. En faisant tendre y vers l'infini, le membre de droite devient $\int_{-\infty}^{\infty}(1+t^2)^{-1}\,\mathrm{d}\mu(t)$. La convergence de $\mathrm{d}\mu_{h_n}(t)$ vers $(1+t^2)^{-1}\,\mathrm{d}\mu(t)$ est donc étroite. En particulier,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}v(t+\mathrm{i}h_n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Comme, de plus, $\lim_{n\to\infty} v(z+\mathrm{i}h_n) = v(z)$, la relation (1.17) appliquée aux h_n donne

$$v(z) = a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\,\mathrm{d}\mu(t)$$

sur le demi-plan supérieur.

Un théorème de finitude. Passons maintenant au vif du sujet. Dans la suite, $\log^+(x)$ et $\log^-(x)$ désignent respectivement les parties positive et négative du logarithme, c'est-à-dire :

$$\log^+(x) = \begin{cases}\log(x) & \text{si } x \geqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad \log^-(x) = \begin{cases}-\log(x) & \text{si } 0 \leqslant x < 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Lemme. *Soit $f(z)$ une fonction continue sur $\Im z \geqslant 0$, analytique dans $\Im z > 0$ et vérifiant $\log|f(z)| = O(|z|)$ quand $|z| \to \infty$ (sur $\Im z \geqslant 0$). Si*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t < \infty,$$

alors

$$\log^+|f(z)| \leqslant a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

sur le demi-plan $\Im z > 0$, où $a = \limsup_{y\to\infty} y^{-1}\log^+|f(\mathrm{i}y)|$.

Preuve. Posons $u(z) = \log^+|f(z)|$. Il s'agit d'une fonction continue sur $\Im z \geqslant 0$, sous-harmonique dans $\Im z > 0$ et $O(|z|)$ quand $|z| \to \infty$ (sur $\Im z \geqslant 0$). Posons également

$$v(z) = a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

où a est défini dans l'énoncé du présent lemme. Par le théorème 1.10, il s'agit d'une fonction harmonique dans $\Im z > 0$, continue et non négative sur $\Im z \geqslant 0$, en posant $v(x) = \log^+|f(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$. Envisageons la différence

$$w(z) = u(z) - v(z).$$

Il s'agit d'une fonction sous-harmonique dans $\Im z > 0$, continue sur $\Im z \geqslant 0$ et $O(|z|)$ quand $|z| \to \infty$, qui s'annule sur l'axe réel. De plus,

$$\limsup_{y\to\infty}\frac{w(\mathrm{i}y)}{y} = 0.$$

Par notre troisième argument de Phragmén–Lindelöf (théorème 1.6), il s'ensuit que $w(z) \leqslant 0$ sur $\Im z > 0$, d'où le résultat. $\square$

Tout ceci pour en venir au prochain théorème, qui trouve de nombreuses applications :

Théorème 1.12. *Soit $f(z)$ une fonction définie sur $\Im z \geqslant 0$, continue et non identiquement nulle sur ce précédent ensemble, y vérifiant $\log|f(z)| = O(|z|)$ quand $|z| \to \infty$, et analytique dans $\Im z > 0$. Si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(t)|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t < \infty,$$

alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^-|f(t)|}{t^2+1}\,\mathrm{d}t < \infty$$

également.

Preuve. Posons à nouveau

$$a = \limsup_{y\to\infty} \frac{\log^+|f(\mathrm{i}y)|}{y} = \max\left\{\limsup_{y\to\infty} \frac{\log|f(\mathrm{i}y)|}{y}, 0\right\}.$$

Considérons la famille de fonctions

$$f_M(z) = Mf(z),$$

où $M \geqslant 1$. Ces fonctions vérifient toutes les propriétés postulées pour $f(z)$, même que

$$a = \limsup_{y\to\infty} \frac{\log^+|f_M(\mathrm{i}y)|}{y}.$$

Désignons par I et II les domaines d'intégration $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |f(t)| \geqslant 1/M\}$ et $\{t \in \mathbb{R}\,;\, |f(t)| < 1/M\}$ respectivement. Par le lemme, en utilisant l'inégalité triviale $\log x \leqslant \log^+ x$ (pour $x \geqslant 0$),

$$\log|f_M(z)| \leqslant a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|Mf(t)|\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\log|f(z)| + \log M \leqslant a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{I}} \frac{\Im z}{|z-t|^2}(\log|f(t)| + \log M)\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(1.18)\quad &\log|f(z)| + \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{II}} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log M\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant a\Im z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{I}} \frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^-|f(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Parce que les zéros de $f(z)$ dans $\Im z > 0$ sont isolés, il exite un $y > 0$ tel que $f(\mathrm{i}y) \neq 0$. Appliquant l'inégalité précédente à $z = \mathrm{i}y$ pour un tel $y > 0$, nous trouvons

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{I}}\frac{y}{y^2+t^2}\log^-|f(t)|\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{II}}\frac{y}{y^2+t^2}\log M\,\mathrm{d}t\leqslant C, \tag{1.19}$$

où

$$C=ay+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+t^2}\log^+|f(t)|\,\mathrm{d}t-\log|f(\mathrm{i}y)|<\infty.$$

Sur la région I, $\log|f(t)|\geqslant-\log M$, ce qui équivaut à $\log^-|f(t)|\leqslant\log M$, c'est-à-dire

$$\min\{\log^-|f(t)|,\log M\}=\log^-|f(t)|.$$

De même, sur II, $\log|f(t)|<-\log M$, ce qui équivaut à $\log^-|f(t)|>\log M$, c'est-à-dire

$$\min\{\log^-|f(t)|,\log M\}=\log M.$$

Aussi, l'inéquation (1.19) s'écrit-elle

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+t^2}\min\{\log^-|f(t)|,\log M\}\,\mathrm{d}t\leqslant C.$$

Par le théorème de la convergence monotone, il résulte

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+t^2}\log^-|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant C.$$

Comme $(y^2+t^2)/(y(t^2+1))$ est bornée sur $\mathbb{R}$ pour y fixé, le résultat s'ensuit. □

De façon immédiate,

Corollaire. *Dans les hypothèses du théorème*,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big|\log|f(t)|\big|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t<\infty.$$

En particulier, l'ensemble des zéros réels de $f(z)$ est de mesure nulle.

De plus, la preuve et le corollaire du théorème précédent entraînent :

Corollaire. *Pour $a=\limsup_{y\to\infty}y^{-1}\log^+|f(\mathrm{i}y)|$, dans les hypothèses du théorème*,

$$\log|f(z)|\leqslant a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

sur le demi-plan $\Im z>0$, — où l'intégrale est absolument convergente.

Preuve. La convergence absolue de l'intégrale provient du précédent corollaire. De plus, l'inéquation (1.18) implique que $\log|f(z)|$ vaut au plus

$$a\Im z+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^+|f(t)|\,\mathrm{d}t-\frac{1}{\pi}\int_{\{|f(t)|\geqslant 1/M\}}\frac{\Im z}{|z-t|^2}\log^-|f(t)|\,\mathrm{d}t,$$

où $M\geqslant1$ est arbitraire. En faisant tendre M vers l'infini, le résultat s'ensuit, — par le théorème de la convergence monotone, en utilisant le fait que les zéros réels de $f(t)$ constituent un ensemble de mesure nulle. □

Bibliographie

1. L. V. Ahlfors, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1973.
2. S. Bernstein, *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
3. A. Beurling, *The collected works of Arne Beurling.* Vol. 1: *Complex analysis* (L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger et J. Wermer, édit.), Contemp. Mathematicians, Birkhäuser, Boston, MA, 1989.
4. ———, *The collected works of Arne Beurling.* Vol. 2: *Harmonic analysis* (L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger et J. Wermer, édit.), Contemp. Mathematicians, Birkhäuser, Boston, MA, 1989.
5. W. H. J. Fuchs, *Topics in the theory of functions of one complex variable*, Van Nostrand Mathematical Studies, vol. 12, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.
6. J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, 1re éd., Grad. Texts in Math., vol. 236, Springer, New York, 2007.
7. P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Montréal, QC, 1996.
8. ———, *Introduction to H_p spaces*, 2e éd., avec deux annexes de V. P. Havin, Cambridge Tracts in Math., vol. 115, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
9. ———. (1999). *A local estimate, involving the least superharmonic majorant, for entire functions of exponential type*, St. Petersburg Math. J. **10**, nº 3, 441–455.
10. P. Koosis et H. L. Pedersen. (1999). *Lower bounds on the values of an entire function of exponential type at certain integers, in terms of a least superharmonic majorant*, St. Petersburg Math. J. **10**, nº 3, 429–439.
11. S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, vol. 43, Gauthier-Villars, Paris, 1935.
12. ———. (1942). *Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions*, Rice Inst. Pamphlet **29**, nº 1.
13. ———, *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952.
14. J. Mashregi, F. L. Nazarov et V. P. Havin. (2006). *The Beurling–Malliavin multiplier theorem: The seventh proof*, St. Petersburg Math. J. **17**, nº 5, 699–744.
15. F. Nazarov. (1996). *The Beurling lemma via the Bellman function*, prépublication, disponible à `http://www.mth.msu.edu/~fedja/Preprints/burl.ps`.
16. Z. Nehari, *Conformal mapping*, Dover Books on Mathematics, Dover, New York, 2012.
17. H. L. Pedersen. (1997). *Uniform estimates of entire functions by logarithmic sums*, J. Funct. Anal. **146**, nº 2, 517–556.
18. ———. (1998). *Entire functions having small logarithmic sums over certain discrete subsets*, Ark. Mat. **36**, nº 1, 119–130.
19. ———. (2000). *Entire functions and logarithmic sums over nonsymmetric sets of the real line*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **25**, nº 2, 351–388.
20. W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3e éd., McGraw-Hill, New York, 1987.
21. E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2e éd., Oxford Univ. Press, Oxford, 1939.