

Introduction : fonctions trigonométriques et symboles modulaires

Comme Eisenstein l'explique lui-même dans [30], sa méthode pour construire des fonctions elliptiques s'applique de manière élégante au cas plus simple des fonctions trigonométriques. C'est par là que débute le livre que Weil [65] consacre à ce sujet ; nous suivons son exemple.

1. La relation d'addition pour la fonction cotangente

La méthode d'Eisenstein se base sur la considération de la série

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m \in \mathbf{Z}}^e \frac{1}{x+m} = \frac{1}{2i\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \frac{1}{x+m},$$

où le symbole \sum^e désigne la sommation d'Eisenstein définie par la limite de droite.

Eisenstein démontre que¹ $\varepsilon(x) = \frac{1}{2i} \cot \pi x$ et ce faisant retrouve la *formule d'addition*, originellement découverte par Euler, selon laquelle pour tous les nombres complexes x et y tels que ni x , ni y , ni $x+y$ ne soient entiers, on a

$$(1) \quad \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(x)\varepsilon(x+y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x+y) = -1/4.$$

Le point de départ de la démonstration d'Eisenstein est une identité élémentaire entre fractions rationnelles :

$$(2) \quad \frac{1}{xy} - \frac{1}{x(x+y)} - \frac{1}{y(x+y)} = 0.$$

Formellement on a en effet

$$\begin{aligned} & \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(x)\varepsilon(x+y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x+y) \\ &= \sum_{p,q,r} \left(\frac{1}{(x+p)(y+q)} - \frac{1}{(x+p)(x+y+r)} - \frac{1}{(y+q)(x+y+r)} \right) \end{aligned}$$

où les entiers p, q et r varient dans \mathbf{Z} tout en étant astreints à la relation $p+q-r=0$; les sommes n'étant pas absolument convergente cette décomposition n'a pas de sens, mais la relation (1) se déduit d'une version régularisée de cette observation.

Sczech [55] interprète la relation d'addition (1) comme une "relation de cocycle" ; nous y reviendrons. On relie d'abord cette relation aux *symboles modulaires* dans le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} .

¹La normalisation apparaîtra plus naturellement par la suite ; elle est bien évidemment liée au fait que la forme $dx/(2i\pi x)$ possède un résidu égal à 1 en 0.

2. Symboles modulaires

Notons \mathcal{H}^* l'espace obtenu en adjoignant à \mathcal{H} les points rationnels $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ de son bord à l'infini $\mathbf{P}^1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Étant donné deux points distincts r et s dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$, on note $\{r, s\}$ la géodésique orientée reliant r à s dans \mathcal{H} .

Soit Δ le groupe abélien engendré par les symboles $\{r, s\}$ et soumis aux relations engendrées par

$$\{r, s\} + \{s, r\} = 0 \quad \text{et} \quad \{r, s\} + \{s, t\} + \{t, r\} = 0.$$

On appelle *symbole modulaire* l'image d'un symbole $\{r, s\}$ dans Δ ; on la note $[r, s]$. Manin [42] observe que Δ est engendré par les symboles *unimodulaires*, c'est à dire les $[r, s]$ avec $r = a/c$ et $s = b/d$ tels que $ad - bc = 1$, dont la géodésique associée $\{r, s\}$ est une arête de la triangulation de Farey représentée ci-dessous.

L'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur \mathcal{H} par homographies se prolonge en une action sur \mathcal{H}^* et induit une action naturelle sur Δ de sorte que

$$g \cdot [\infty, 0] = [a/c, b/d], \quad \text{pour tout } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}).$$

Notons

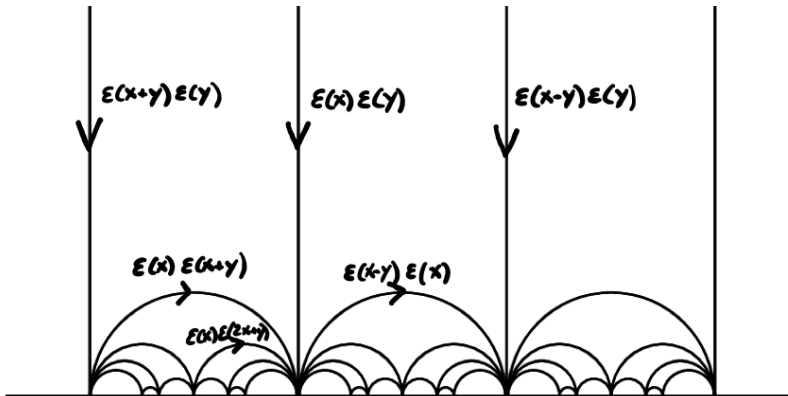
$$\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2) = \mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)/\mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$$

le quotient de l'espace des fonctions méromorphes et \mathbf{Z}^2 -périodiques sur \mathbf{C}^2 par le sous-espace des fonctions constantes. L'action linéaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur \mathbf{C}^2 induit une action sur $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$, et donc sur $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$, et l'observation suivante est simplement une reformulation de la relation d'addition (1).

Observation. L'application $c : \Delta \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ définie sur les symboles unimodulaires par

$c([r, s])(x, y) = \epsilon(dx - by)\epsilon(-cx + ay)$, pour $r = a/c$, $s = b/d$, $ad - bc = 1$, est bien définie et $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ -équivariante.

On dit alors que c est un *symbole modulaire à valeurs dans* $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$.



Cette remarque élémentaire place la relation d'addition dans un nouveau contexte. Elle suggère d'étudier l'action des opérateurs de Hecke sur \mathbf{c} .

3. Opérateurs de Hecke

Les actions du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur Δ et sur $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$ s'étendent naturellement au monoïde $M_2(\mathbf{Z})^\circ = M_2(\mathbf{Z}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$. Cela munit $\mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2))$ d'une action à droite qui étend celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$:

$$\phi|_g([r, s])(x, y) = \phi(g \cdot [r, s]) (g \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}),$$

($\phi \in \mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2))$, $g \in M_2(\mathbf{Z})^\circ$). L'espace

$$\mathrm{Hom}(\Delta, \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2))^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})}$$

des symboles modulaires à valeurs dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ hérite alors d'une action à droite de l'algèbre de Hecke associée à la paire $(M_2(\mathbf{Z})^\circ, \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$: étant donné un élément $g \in M_2(\mathbf{Z})^\circ$ on décompose la double classe de g par $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ en une union finie de classes à gauche

$$\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})g\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})g_j.$$

L'opérateur de Hecke associé à g opère sur un symbole modulaire ϕ à valeurs dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ par

$$\mathbf{T}(g)\phi = \sum_j \phi|_{g_j}.$$

Exemples. Notons \mathbf{T}_p l'opérateur de Hecke associé à la matrice $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $p = 2$, on a

$$(\mathbf{T}_2\mathbf{c})([\infty, 0])(x, y) = \varepsilon(2x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(2y) + \varepsilon(2x)\varepsilon(x+y) + \varepsilon(2y)\varepsilon(x+y).$$

On laisse au lecteur le plaisir coupable de vérifier que, si $2x$, $2y$ et $x+y$ ne sont pas des entiers, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon(2x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(2y) + \varepsilon(2x)\varepsilon(x+y) + \varepsilon(2y)\varepsilon(x+y) \\ - 2\varepsilon(2x)\varepsilon(2y) - \varepsilon(x)\varepsilon(y) = 1/4 \end{aligned}$$

et donc que le symbole modulaire \mathbf{c} , à valeurs dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$, est annulé par l'opérateur

$$\mathbf{T}_2 - 2[2]^* - 1,$$

où l'on note $[m]^*$ le tiré en arrière par l'application $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$ induite par la multiplication par m , autrement dit $(x, y) \mapsto (mx, my)$.

Pour $p = 3$ et $p = 5$, on a respectivement

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_3\mathbf{c})([\infty, 0])(x, y) &= \varepsilon(3x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(3y) + \varepsilon(3x)\varepsilon(x+y) \\ &\quad + \varepsilon(3y)\varepsilon(x+y) + \varepsilon(3x)\varepsilon(y-x) + \varepsilon(3y)\varepsilon(x-y). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_5 \mathbf{c})([\infty, 0])(x, y) &= \varepsilon(5x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x)\varepsilon(5y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(x+y) + \varepsilon(5y)\varepsilon(x+y) \\ &+ \varepsilon(5x)\varepsilon(y-2x) + \varepsilon(5y)\varepsilon(x+2y) - \varepsilon(y-2x)\varepsilon(x+2y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(y+2x) \\ &+ \varepsilon(5y)\varepsilon(x+3y) + \varepsilon(y+2x)\varepsilon(x+3y) + \varepsilon(5x)\varepsilon(y-x) + \varepsilon(x-y)\varepsilon(5y). \end{aligned}$$

Au prix de fastidieux calculs on peut là encore vérifier que dans chacun de ces cas la relation

$$(3) \quad (\mathbf{T}_p - p[p]^* - 1)\mathbf{c} = 0$$

est satisfaite.

4. Un théorème et quelques questions

Il est naturel de conjecturer que les relations (3) sont vérifiées pour tout nombre p premier. Un tel énoncé rappelle une conjecture de Busuioc [16] et Sharifi [58]; la démonstration récente que Sharifi et Venkatesh [59] en ont donnée implique aussi que les relations (3) sont vérifiées pour tout p premier.²

En plus de cela on aimerait relever l'application \mathbf{c} en un symbole modulaire — nécessairement *partiel*, au sens de la thèse de Dasgupta, voir [5, 22] — à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ plutôt que son quotient par les fonctions constantes. Ces deux desiderata font l'objet du théorème ci-dessous qui s'énonce plus naturellement en termes de cohomologie des groupes et requiert en partie d'augmenter le niveau.

L'application $\overline{\mathbf{S}} : g \mapsto \mathbf{c}([\infty, g \cdot \infty])$ définit en effet un 1-cocycle³ de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ à valeurs dans $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ et donc une classe de cohomologie dans

$$H^1(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)).$$

Étant donné un entier N strictement positif, on note comme d'habitude

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ constitué des matrices qui fixent la droite $\langle e_1 \rangle$, engendrée par le premier vecteur de la base canonique de \mathbf{Z}^2 , modulo N . On note enfin $\Delta_N^\circ \subset \Delta$ le sous-groupe engendré par les symboles $[r, s]$ avec $r, s \in \Gamma_0(N) \cdot \infty \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$. Le sous-groupe Δ_N° est donc engendré par les éléments $[a/Nc, b/Nd] \in \Delta$ avec a et b premiers avec N .

On note finalement D_N le groupe abélien libre engendré par les combinaisons linéaires entières formelles de diviseurs positifs de N et D_N° le sous-groupe constitué des éléments de degré 0, c'est-à-dire des éléments $\delta = \sum_{d|N} n_d [d]$ tels que $\sum_{d|N} n_d = 0$.

²Le lien entre les travaux de Sharifi et Venkatesh et les questions abordées ici est expliqué dans le sixième paragraphe de cette introduction.

³La relation de cocycle s'écrit

$$\overline{\mathbf{S}}(hg) = \overline{\mathbf{S}}(h) + h \cdot \overline{\mathbf{S}}(g).$$

THÉORÈME. Il existe un morphisme $\delta \mapsto \mathbf{S}_\delta$ de D_N vers le groupe des 1-cocycles de $\Gamma_0(N)$ à valeurs dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)$ vérifiant les propriétés suivantes.

1. On a

$$[\mathbf{S}_{[1]}] = [\overline{\mathbf{S}}] \neq 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Gamma_0(N), \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)).$$

2. Pour tout entier p premier ne divisant pas N et pour tout $\delta \in D_N$, la classe de cohomologie de \mathbf{S}_δ dans $H^1(\Gamma_0(N), \mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2))$ annule l'opérateur $\mathbf{T}_p - p[p]^* - 1$.

3. Pour tout entier strictement positif N et pour tout $\delta = \sum_{d|N} n_d[d]$ dans D_N° , le 1-cocycle \mathbf{S}_δ est cohomologue à un cocycle explicite \mathbf{S}_δ^* défini par

$$(4) \quad \mathbf{S}_\delta^* \begin{pmatrix} a & * \\ Nc & * \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0, \\ \sum_{d|N} \frac{n_d}{d^c} \sum_{j \bmod d^c} \varepsilon\left(\frac{1}{d^c}(y+j)\right) \varepsilon\left(dx - \frac{a}{d^c}(y+j)\right) & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $dd' = N$.

Remarque. Chaque application \mathbf{S}_δ^* définit en fait un symbole modulaire *partiel* dans

$$\text{Hom}(\Delta_N^\circ, \mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2))^{\Gamma_0(N)}.$$

On le définit sur un symbole $[\infty, a/Nc]$ par $\mathbf{S}_\delta^* \begin{pmatrix} a & u \\ Nc & v \end{pmatrix}$ où u et v sont tels que $av - Ncu = 1$.

Ce texte est consacré à une vaste généralisation de ce théorème. Le but est de répondre aux questions suivantes :

- (1) Que dire des produits de n fonctions cotangentes lorsque $n \geq 3$?
- (2) Y a-t-il des résultats analogues pour des fonctions elliptiques ou, plus simplement, pour des fractions rationnelles ?

Les réponses à ces questions sont énoncées au chapitre 2 qui est une sorte de deuxième introduction dans laquelle les résultats généraux sont énoncés. Avant cela, dans le premier chapitre, on commence par détailler la construction de classes de cohomologie, pour des sous-groupes de GL_n , qui généralisent la classe de $\mathbf{S}_{[1]}$ et ont toutes une origine topologique commune. Les classes que nous construisons sont à coefficients dans une partie de la cohomologie d'arrangements d'hyperplans dans des produits A^n où A est isomorphe au groupe multiplicatif ou à une courbe elliptique. Un point important, pour démontrer le théorème ci-dessus ou les résultats annoncés dans le chapitre 2 est ensuite de montrer que cette partie de la cohomologie d'arrangements d'hyperplans peut être représentée par des formes méromorphes sur A^n . C'est l'objet du théorème 3.5 dont la démonstration occupe le chapitre 3. Le calcul explicite des classes ainsi obtenues occupe le reste de l'ouvrage.

Dans les deux derniers paragraphes de cette introduction on relie les cocycles \mathbf{S}_δ , et leurs généralisations annoncées, à des objets plus classiques en théorie des nombres.

5. Évaluation, terme constant, morphismes de Dedekind–Rademacher

Le slogan suivant, à retenir, distingue les avantages respectifs des cocycles \mathbf{S}_δ et \mathbf{S}_δ^* .

Les cocycles notés \mathbf{S} peuvent être évalués en des points de torsion alors que les cocycles notés \mathbf{S}^ peuvent eux être calculés en le point générique.*

Nous verrons en effet que l’on peut contrôler l’ensemble des points $P \in \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$ en lesquels les fonctions méromorphes $\mathbf{S}_\delta(g)$ sont régulières. Après évaluation en de tels points de torsion de $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$ bien choisis, on retrouve alors des résultats plus classiques.

Exemple. Les fonctions dans l’image de $\mathbf{S}_{[1]}$ sont régulières en les points $(j/N, 0)$, pour tous $j \in \{1, \dots, N-1\}$. L’application

$$(5) \quad \Psi_N : \Gamma_0(N) \rightarrow \mathbf{C}; \quad g \mapsto \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{S}_{[1]}(g)(j/N, 0)$$

définit donc un morphisme de groupes. On retrouve ainsi un multiple du morphisme de Dedekind–Rademacher [51, 44] donné par

$$(6) \quad \Phi_N \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} = \begin{cases} (N-1)b/d & \text{si } c = 0 \\ \frac{(N-1)(a+d)}{Nc} + 12 \cdot \text{sign}(c) \cdot D^N \left(\frac{a}{N|c|} \right) & \text{si } c \neq 0, \end{cases}$$

où, en notant $D : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ la *somme de Dedekind* usuelle

$$D(a/c) = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{c-1} \varepsilon \left(\frac{j}{c} \right) \varepsilon \left(-\frac{ja}{c} \right) \quad \text{pour } c > 0 \quad \text{et} \quad (a, c) = 1,$$

on a $D^N(x) = D(x) - D(Nx)$. De l’expression de $\mathbf{S}_{[1]}$ que l’on donnera au chapitre 7, on peut plus précisément déduire — comme dans [6, §11] — que

$$12 \cdot \Psi_N = \Phi_N.$$

Plutôt que d’évaluer les fonctions méromorphes $\mathbf{S}_\delta^*(g)$ on peut considérer leur terme constant en 0. Le théorème du paragraphe précédent implique alors le corollaire qui suit.

COROLLAIRE. *Soit $\delta \in D_N^\circ$ tel que $\sum_{d|N} n_d d = 0$ et $D^\delta(x) = \sum_{d|N} n_d D(dx)$. Alors l’application $\Psi_\delta : \Gamma_0(N) \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par*

$$(7) \quad \Psi_\delta \begin{pmatrix} a & * \\ Nc & * \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{si } c = 0 \\ \text{sign}(c) \cdot D^\delta \left(\frac{a}{N|c|} \right) & \text{si } c \neq 0, \end{cases}$$

définit un morphisme de groupes.

On notera que le morphisme $12\Psi_\delta$ est à valeurs entières et qu’il coïncide avec le morphisme de Dedekind–Rademacher modifié Φ_δ de Darmon et Dasgupta [22].

6. Relations avec les travaux de Kato et de Sharifi–Venkatesh

Kato [40] construit des unités de Siegel sur les courbes modulaires $Y_1(N)$ à partir de fonctions theta sur la courbe elliptique universelle E au-dessus de $Y_1(N)$.

Il découle en effet de [40, Proposition 1.3] qu'étant donné un entier strictement positif m premier à $6N$, il existe une fonction theta ${}_m\theta$ dans $\mathbf{Q}(E)^\times$ qui est une unité en dehors des points de m -torsion. La fonction ${}_m\theta$ est caractérisée par son diviseur dans $E[m]$ et des relations de distribution associées aux applications de multiplication par des entiers relativement premiers à m . Les unités de Siegel sont alors obtenues en tirant en arrière sur $Y_1(N)$ ces fonctions theta par des sections de N -torsion.

Sharifi et Venkatesh [59] considèrent des analogues des fonctions ${}_m\theta$. Leur méthode permet en fait de construire des 1-cocycles sur des sous-groupes Γ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z})$ à valeurs dans les groupes de K -théorie de degré 2 des corps de fonctions de $\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$ ou du carré E^2 de la courbe elliptique universelle. Les 1-cocycles du premier type sont des applications de la forme $\Gamma \rightarrow K_2(\mathbf{Q}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2))$. En les composant avec

$$K_2(\mathbf{Q}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2)) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2); \quad \{f, g\} \mapsto \frac{d \log(f) \wedge d \log(g)}{dx \wedge dy},$$

où x et y sont les deux coordonnées de \mathbf{C}^2 , on obtient des 1-cocycles dont on peut vérifier qu'ils sont cohomologues aux cocycles du théorème énoncé ci-dessus. Le fait que les relations (3) sont bien vérifiées pour tout nombre premier p découle alors de [59, Lemma 4.2.9].

Un aspect intéressant de notre construction est que nous obtenons ces cocycles à partir d'une classe purement topologique ; l'émergence de fonctions méromorphes se déduit au final d'un théorème “de type Brieskorn” qui permet de représenter certaines classes de cohomologie singulière par des formes méromorphes. La construction est suffisamment maniable pour nous permettre de considérer plus généralement l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{C}^n/\mathbf{Z}^n$ ou sur E^n .

Les 1-cocycles du second type chez Sharifi et Venkatesh sont des applications de la forme $\Gamma \rightarrow K_2(\mathbf{Q}(E^2))$. Comme pour les unités de Siegel, on peut tirer en arrière ces cocycles par des sections de torsion. On obtient ainsi des homomorphismes du premier groupe d'homologie de Γ vers le K_2 d'une courbe modulaire. Goncharov et Brunault [33, 13, 14] avaient déjà construit de tels homomorphismes en associant explicitement à certains symboles modulaires des symboles de Steinberg d'unités de Siegel. Obtenir ces morphismes par spécialisation d'un 1-cocycle à valeurs dans $K_2(\mathbf{Q}(E^2))$ permet de montrer que ces homomorphismes sont Hecke-équivalents.

En composant un 1-cocycle $\Gamma \rightarrow K_2(\mathbf{Q}(E^2))$ avec le symbole différentiel $\partial \log \wedge \partial \log$ puis en tirant le résultat en arrière par une section de torsion, on obtient un homomorphisme du premier groupe d'homologie de Γ vers les formes modulaires de poids 2 sur $Y_1(N)$. Étendu aux symboles modulaires (partiels), ce morphisme associe à un tel symbole une “zeta modular form” au sens de [40, Section 4].

Cette construction s'étend là encore à l'action de $GL_n(\mathbf{Z})$ sur le produit de n courbes elliptiques universelles ; voir chapitre 2. Les cocycles ainsi obtenus révèlent des relations cachées entre des produits de fonctions elliptiques classiques, relations gouvernées par l'homologie de sous-groupes de congruence dans $GL_n(\mathbf{Z})$. On peut tirer de cela un certain nombre de conséquences arithmétiques [6, 7] ; d'autres conséquences sont en préparation.