

Préface

Ce livre est la version étendue des notes de la série de cinq cours donnés par Nicolas Bergeron en octobre 2020 dans le cadre de la Chaire Aisenstadt au Centre de Recherches Mathématiques (CRM) de Montréal, Canada.

Intitulés “Sczech cocycles and hyperplanes arrangements,” ces cours prenaient place au sein de l’atelier “Arithmetic quotients of locally symmetric spaces and their cohomology” et du programme “Cohomology in arithmetic” organisés à l’automne 2020 par le CRM.

Pour cause de pandémie, une grande part de l’atelier a seulement eu lieu virtuellement. Les vidéos des cinq cours de Nicolas Bergeron, ainsi que celles des exposés de l’atelier attendant, sont disponibles en ligne, par exemple à l’adresse web du programme <https://tinyurl.com/5yun9bfk>.

Parmi ces vidéos se trouve également celle du Colloquium du CRM intitulé “Trigonometric functions and modular symbols” donné par N.B. (le 16 octobre 2020), qui peut s’entendre comme une introduction généraliste au présent texte. Le point d’entrée en est le travail désormais classique d’Eisenstein (1847), à commencer par la formule d’addition bien connue de la fonction cotangente :

$$\cot x \cot y - \cot x \cot(x + y) - \cot(x + y) \cot y = 1.$$

A la suite de Robert Sczech, cette identité peut s’interpréter comme le cas particulier d’une famille de relations de symétrie, nommément une relation de cocycle, pour le groupe $GL_2(\mathbf{Z})$ à valeurs dans les fonctions trigonométriques sur $(\mathbf{C}/\mathbf{Z})^2$. L’exposé du Colloquium, les cinq cours et la suite de ce texte s’attachent à développer cette observation et les cocycles d’Eisenstein sous-jacents à des contextes plus généraux, à la jonction de la topologie et de la théorie des nombres.

Remerciements. Ce texte est l’aboutissement d’une réflexion entamée il y a quelques années avec Akshay Venkatesh. Plusieurs idées sont issues de discussions avec lui (ainsi que l’impulsion d’écrire en français), un grand merci à lui pour sa générosité.

De toute évidence, ce travail doit beaucoup aux idées initiées et développées par Robert Sczech. Nous profitons de cette occasion pour lui exprimer notre gratitude.

P.C. exprime sa reconnaissance personnelle à Samit Dasgupta pour lui avoir posé une question étincelle il y a 10 ans.

L.G. remercie l’IHES et le soutien de l’ERC de Michael Harris durant les premiers temps de ce projet.

N.B. tient à remercier Olivier Benoist pour de nombreuses discussions autour du chapitre 3.

Merci à Emma Bergeron pour les dessins.

C'est un plaisir de remercier Henri Darmon, Clément Dupont, Javier Fresán, Peter Xu et les rapporteurs anonymes de leur bienveillance tout au long de l'élaboration de ce texte. Leur lecture attentive et leurs nombreux commentaires ont grandement contribué à l'amélioration de sa qualité. Nous remercions aussi Galia Dafni et les Publications du CRM d'avoir accepté notre manuscrit dans leur collection.

Enfin, nous adressons nos remerciements aux équipes administratives et scientifiques du CRM qui ont permis que nos visites à Montréal se déroulent toujours dans des conditions très agréables, nous donnant l'occasion de profiter de l'atmosphère unique de ce lieu pour y partager nos idées et pour y nouer des collaborations fructueuses.

Nicolas Bergeron, Pierre Charollois, Luis E. García, avril 2023.