Résumé. – De nombreux auteurs, parmi lesquels Stevens [62], Sczech [56], Nori [47], Solomon [60], Hill [36] ou plus récemment Charollois–Dasgupta–Greenberg [19, 20], Beilinson–Kings–Levin [4] et Sharifi–Venkatesh [59], ont construit des cocycles différents, mais apparentés, de groupes linéaires que l'on appelle habituellement "cocycles d'Eisenstein".

L'objectif principal de ce texte est de décrire une construction topologique qui est une source commune pour tous ces cocycles. Une caractéristique intéressante de cette construction nouvelle est que, partant d'une classe purement topologique, elle aboutit au monde algébrique des formes méromorphes sur des complémentaires d'hyperplans dans des produits de groupes additifs (complexes), de groupes multiplicatifs ou de courbes elliptiques. Cela conduit à la construction de trois types de "cocycles de Sczech" qui peuvent être regroupés dans le tableau suivant

Type	Additif	Multiplicatif	Elliptique
Groupe	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^\delta$	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$
Espace	$\mathbf{C}^n$	$(\mathbf{C}^\times)^n = (\mathbf{C}/\mathbf{Z})^n$	$(\mathbf{C}/\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})^n$
$(n-1)$-cocycle	$\mathbf{S}_{\mathrm{aff}}$	$\mathbf{S}_{\mathrm{mult}}$	$\mathbf{S}_{\mathrm{ell}}$

Chacun de ces cocycles est à valeurs dans des formes méromorphes sur les espaces correspondants. Nous décrivons en outre explicitement ces formes méromorphes comme des polynômes homogènes de degré n en des 1-formes élémentaires des types suivants

Type	Additif	Multiplicatif	Elliptique
1-formes	$\frac{dz}{z}$	$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{dz}{z+n}$	$\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z}} \frac{dz}{z+\lambda}$

où les séries ci-dessus doivent être convenablement régularisées pour avoir un sens. Ces cocycles révèlent ainsi des relations cachées entre produits de fonctions élémentaires comme ci-dessus, relations qui sont prescrites par l'homologie des groupes linéaires.

Abstract. – Many authors, among which Stevens [62], Sczech [56], Nori [47], Solomon [60], Hill [36], or more recently Charollois–Dasgupta–Greenberg [19, 20], Beilinson–Kings–Levin [4] and Sharifi–Venkatesh [59], have constructed different, but related, linear group cocycles that are usually referred to as "Eisenstein cocycles."

The main goal of this work is to describe a topological construction that is a common source for all these cocycles. One interesting feature of this new construction is that, starting from a purely topological class, it leads to the algebraic world of meromorphic forms on hyperplane complements in n-fold products of either the (complex) additive group, the multiplicative group or an elliptic curve.

This yields the construction of three types of “Sczech cocycles” that can be grouped in the following array

Type	Additive	Multiplicative	Elliptic
Group	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^\delta$	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$	$\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$
Space	$\mathbf{C}^n$	$(\mathbf{C}^\times)^n = (\mathbf{C}/\mathbf{Z})^n$	$(\mathbf{C}/\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z})^n$
$(n-1)$-cocycle	$\mathbf{S}_{\mathrm{aff}}$	$\mathbf{S}_{\mathrm{mult}}$	$\mathbf{S}_{\mathrm{ell}}$

Each of these cocycles takes values in meromorphic n-forms on the corresponding space. We furthermore explicitly describe these meromorphic forms as degree n homogeneous polynomials in elementary 1-forms of the following types

Type	Additive	Multiplicative	Elliptic
1-forms	$\frac{dz}{z}$	$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{dz}{z+n}$	$\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z}} \frac{dz}{z+\lambda}$

where the above series have to be suitably regularised to make sense. These cocycles therefore reveal hidden relations between products of elementary functions as above, relations that are prescribed by the group homology of linear groups.

Chapitre 1

Construction de cocycles : aspects topologiques

1.1. Résumé

Le cocycle $\mathbf{S}$ discuté en introduction est relié aux “cocycles d’Eisenstein” qui interviennent sous différentes formes dans la littérature, par exemple dans [56, 47, 19, 20]. Un cocycle très proche est en fait explicitement considéré par Sczech dans [55, 56].

Le premier but de ce texte est de donner une construction générale de cocycles de “type Sczech” et de montrer qu’ils ont une source topologique commune. La méthode utilisée consiste à relever certaines classes de cohomologie dans $H^{2n-1}(X^*)$, où X est un G-espace et X^* est égal à X privé d’un nombre fini de ses points, en des classes de cohomologie équivariante dans $H_G^{2n-1}(X^*)$. Elle rappelle la méthode proposée par Quillen [50] pour calculer la cohomologie d’un groupe linéaire sur un corps fini.

En pratique on considère essentiellement trois cas :

- Le cas *additif* (ou *affine*). Dans ce cas $X = \mathbf{C}^n$, l’espace épointé X^* est égal à X privé du singleton $D = \{0\}$ et $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^\delta$, le groupe des transformations linéaires de $\mathbf{C}^n$, considéré comme un groupe discret.
- Le cas *multiplicatif* (ou *trigonométrique*). Dans ce cas $X = \mathbf{C}^n/\mathbf{Z}^n$, l’espace épointé X^* est égal à X privé d’un cycle D de degré 0 constitué de points de torsion et G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ qui préserve D.
- Le cas *elliptique*. Dans ce cas $X = E^n$, où est E une courbe elliptique, l’espace épointé X^* est égal à X privé d’un cycle D de degré 0 constitué de points de torsion et G est un sous-groupe d’indice fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$, ou $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ si E est à multiplication par $\mathcal{O}$, qui préserve D.

Dans chacun de ces cas l’action naturelle (linéaire) de G sur X donne lieu à un fibré d’espace total

$$EG \times_G X$$

au-dessus de l’espace classifiant $BG = EG/G$. L’isomorphisme de Thom associe alors à D une classe dans $H^{2n}(EG \times_G X, EG \times_G X^*)$. La construction de Borel identifie ce groupe au groupe de cohomologie *équivariante* $H_G^{2n}(X, X^*)$. On renvoie à l’annexe A pour plus de détails sur la cohomologie équivariante ; elle généralise à la fois la cohomologie des groupes et la cohomologie usuelle. La construction de Borel permet de retrouver les propriétés usuelles, comme par exemple associer une suite exacte longue à une paire de G-espaces. Dans la suite on considère

$$[D] \in H_G^{2n}(X, X^*)$$

et la suite exacte longue associée à la paire (X, X^*) :

$$H_G^{2n-1}(X) \to H_G^{2n-1}(X^*) \to H_G^{2n}(X, X^*) \to H_G^{2n}(X). \tag{1.1}$$

L'origine topologique de nos cocycles repose alors sur le fait suivant :

Fait. *La classe* $[D] \in H_G^{2n}(X, X^*)$ *admet un relevé (privilégié)*

$$E[D] \in H_G^{2n-1}(X^*).$$

Nous démontrons ce fait au cas par cas dans les paragraphes qui suivent. Dans le cas affine il résulte du fait qu'un fibré vectoriel complexe plat possède une classe d'Euler rationnelle triviale, alors que dans le cas elliptique on le déduit d'un théorème de Sullivan qui affirme que la classe d'Euler rationnelle d'un fibré vectoriel à groupe structural contenu dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est nulle.

L'étape suivante part d'une remarque générale : supposons que $Y/\mathbf{C}$ soit une variété *affine*, de dimension n, sur laquelle opère un groupe G, et supposons donnée une classe de cohomologie équivariante $\alpha \in H_G^{2n-1}(Y(\mathbf{C}))$. Puisque $H^i(Y(\mathbf{C}))$ s'annule pour $i > n$, la suite spectrale pour la cohomologie équivariante donne une application

$$H_G^{2n-1}(Y(\mathbf{C})) \to H^{n-1}(G, H^n(Y(\mathbf{C}))).$$

Elle permet donc d'associer à α une classe de cohomologie du groupe G.

Dans les cas qui nous intéressent la variété X^* n'est pas affine, mais on peut restreindre la classe $E[D]$ à un ouvert affine U. On voudrait aussi que U soit invariant par G ; mais un tel U n'existe pas. Dans le cas additif où $X = \mathbf{C}^n$, on peut toutefois formellement prendre $U :=$ "$\mathbf{C}^n - \bigcup_\ell \ell^{-1}(0)$". Plus précisément, étant donné un ensemble fini L de fonctionnelles affines, on pose $U_L = \mathbf{C}^n - \cup_{\ell \in L} \ell^{-1}(0)$. En regardant U comme la limite inverse des U_L, on associe à $E[D]$ une classe dans le groupe

$$H^{n-1}(G, \varinjlim_L H^j(U_L)).$$

La dernière étape de notre construction consiste à représenter $\varinjlim_L H^j(U_L)$ par des formes méromorphes. Dans le cas affine cela résulte d'un théorème célèbre de Brieskorn [12] :

$$\varinjlim_L H^j(U_L) = \begin{cases} 0, \ j > n, \\ \Omega^n_{\mathrm{aff}}, \ j = n, \end{cases}$$

où $\Omega^n_{\mathrm{aff}} \subset \Omega^n_{\mathrm{mer}}(\mathbf{C}^n)$ est une sous-algèbre de formes méromorphes, voir Définition 1.2. Le chapitre 3 est consacré à la démonstration d'un résultat de ce type dans les cas multiplicatif et elliptique.

En admettant pour l'instant ce théorème "de type Brieskorn", on consacre le présent chapitre à détailler la construction esquissée ci-dessus. Elle conduit à des classes

$$\mathbf{S}[D] \in H^{n-1}(G, \Omega^n_{\mathrm{mer}}(X)).$$

1.2. Le cocycle additif

1.2.1. Une classe de cohomologie équivariante. Soit $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^\delta$, le groupe des transformations linéaires de $\mathbf{C}^n$, considéré comme un groupe discret.

La représentation linéaire[1]

$$G \to \mathrm{GL}(\mathbf{C}^n); \quad g \mapsto (z \in \mathbf{C}^n \mapsto gz)$$

donne lieu à un fibré vectoriel $\mathcal{V}$, d'espace total $EG \times_G \mathbf{C}^n$, sur l'espace classifiant BG. On renvoie à l'annexe A pour des rappels sur les espaces classifiants, les espaces simpliciaux et la cohomologie équivariante. Rappelons juste ici que si X est un espace topologique muni d'une action continue de G, on a

$$H^*_G(X) = H^*(EG \times_G X).$$

Lorsque X est contractile, ce groupe se réduit à $H^*(BG) = H^*(G)$, la cohomologie du groupe G.

On peut considérer la classe de Thom du fibré $\mathcal{V}$:

$$u \in H^{2n}_G(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n - \{0\})$$

à coefficients dans $\mathbf{C}$. Dans la suite exacte

$$H^{2n-1}_G(\mathbf{C}^n - \{0\}) \longrightarrow H^{2n}_G(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n - \{0\}) \xrightarrow{\ c\ } H^{2n}_G(\mathbf{C}^n)\ ,$$

l'image de u par l'application c est la classe de Chern équivariante

$$c_{2n}(\mathcal{V}) \in H^{2n}(BG, \mathbf{C}),$$

qui est nulle parce que $\mathcal{V}$ est plat. On peut donc relever la classe u en une classe dans $H^{2n-1}_G(\mathbf{C}^n - \{0\})$.

Remarque. Ce relevé n'est pas unique, mais on peut considérer la suite exacte

$$H^{2n-1}(G) \to H^{2n-1}_G(\mathbf{C}^n - \{0\}) \to H^{2n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\})$$

associée à la fibration $\mathcal{V}^* \to BG$, où $\mathcal{V}^*$ désigne le complémentaire de la section nulle dans $\mathcal{V}$, Chaque relevé de u dans $H^{2n-1}_G(\mathbf{C}^n - \{0\})$ s'envoie sur la classe fondamentale dans $H^{2n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\})$.

Le quotient $EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\})$ est une *variété simpliciale*, c'est-à-dire un ensemble semi-simplicial dont les m-simplexes

$$(EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\}))_m = (EG_m \times (\mathbf{C}^n - \{0\})/G$$

sont des variétés et dont les applications de faces et de dégénérescences sont lisses. La *réalisation grossière* $\|EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\})\|$ de cette variété simpliciale est l'espace topologique

$$\|EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\})\| = \sqcup_{m \geq 0} \Delta_m \times (EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\}))_m / \sim .$$

Ici Δ_m désigne le m-simplexe standard et les identifications sont données par

$$(\sigma^i(t), x) \sim (t, \sigma_i(x)), \quad t \in \Delta_{m-1},\ x \in (EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\}))_m,\ i \in \{0, \ldots, m\},$$

[1]On identifie donc $\mathbf{C}^n$ à l'espace des vecteurs colonnes.

où $\sigma^i : \Delta_{m-1} \to \Delta_m$ désigne l'inclusion de la i-ème face et $\sigma_i : (EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\}))_m \to (EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\}))_{m-1}$ est l'application de face correspondante. On renvoie à l'annexe A pour plus de détails sur ces objets.

Retenons que l'on a une projection continue naturelle de la réalisation grossière vers la réalisation géométrique de $EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\})$ et que cette application est une équivalence d'homotopie. En pratique nous travaillerons avec la réalisation grossière. En tirant en arrière le relevé de u on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1. *La classe de Thom u admet un relevé dans*

$$H^{2n-1}(\|EG \times_G (\mathbf{C}^n - \{0\})\|).$$

Via la théorie de Chern–Weil et les travaux de Mathai et Quillen [**43**], nous construirons au paragraphe 6.1 du chapitre 6 un relevé privilégié de u représenté par une forme différentielle.

1.2.2. Effacer les hyperplans. À tout élément $g \in G$ de premier vecteur ligne $v \in \mathbf{C}^n - \{0\}$, on associe une forme linéaire

$$e_1^* \circ g : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}; \quad z \mapsto vz.$$

Pour tout $(k+1)$-uplet $(g_0, \dots, g_k) \in G^{k+1}$, on note

$$U(g_0, \dots, g_k) = \{z \in \mathbf{C}^n \ : \ \forall j \in \{0, \dots, k\}, \ e_1^*(g_j z) \neq 0\}.$$

C'est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ qui est égal au complémentaire d'un arrangement d'hyperplans :

$$U(g_0, \dots, g_k) = \mathbf{C}^n - \cup_j H_j, \quad H_j = \ker(e_1^* \circ g_j). \tag{1.2}$$

L'action du groupe G sur $\mathbf{C}^n$ préserve l'ensemble de ces ouverts :

$$g \cdot U(g_0, \dots, g_k) = U(g_0 g^{-1}, \dots, g_k g^{-1}).$$

Comme les variétés (1.2) sont affines de dimension n, elles n'ont pas de cohomologie en degré $> n$. Nous montrons dans l'annexe A qu'il correspond alors à la classe de cohomologie fournie par la proposition 1.1 une classe dans

$$H^{n-1}(G, \varinjlim_{H_j} H^n(\mathbf{C}^n - \cup_j H_j)).$$

1.2.3. Une classe de cohomologie à valeurs dans les formes méromorphes. Étant donné une forme linéaire ℓ sur $\mathbf{C}^n$, on définit une forme différentielle méromorphe sur $\mathbf{C}^n$ par la formule

$$\omega_\ell = \frac{1}{2i\pi} \frac{d\ell}{\ell}. \tag{1.3}$$

Pour tout $g \in G$, on a

$$g^* \omega_{g \cdot \ell} = \omega_\ell. \tag{1.4}$$

D'après un théorème célèbre de Brieskorn [**12**, Lemma 5], confirmant une conjecture d'Arnold, l'application naturelle $\eta \mapsto [\eta]$ de la $\mathbf{Z}$-algèbre graduée engendrée par les formes ω_ℓ et l'identité vers la cohomologie singulière à coefficients entiers de (1.2) est un isomorphisme d'algèbre. Cela justifie d'introduire la définition suivante dans notre contexte.

DÉFINITION 1.2. Soit
$$\Omega_{\mathrm{aff}} = \bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p_{\mathrm{aff}}$$
la $\mathbf{Z}$-algèbre graduée de formes différentielles méromorphes sur $\mathbf{C}^n$ engendrée par les formes ω_ℓ, avec $\ell \in (\mathbf{C}^n)^\vee - \{0\}$, et par l'identité en degré 0.

Le théorème de Brieskorn implique que l'application naturelle
$$\Omega_{\mathrm{aff}} \to \varinjlim_{H_j} H^\bullet(\mathbf{C}^n - \cup_j H_j)$$
est un isomorphisme. Finalement, on a démontré :

PROPOSITION 1.3. *La classe de cohomologie fournie par la proposition 1.1 induit une classe*
$$S_{\mathrm{aff}} \in H^{n-1}(G, \Omega^n_{\mathrm{aff}}). \tag{1.5}$$

Nous donnons deux représentants explicites de cette classe de cohomologie au chapitre suivant.

1.3. Les cocycles multiplicatif et elliptique

On considère plus généralement un groupe algébrique A commutatif connexe et de dimension 1. On a trois cas possibles : le cas additif, discuté ci-dessus, et les cas multiplicatifs ou elliptiques. Dans le cas multiplicatif A est égal à $\mathbf{G}_m$ dont le groupe des points complexes est isomorphe à $\mathbf{C}^\times = \mathbf{C}/\mathbf{Z}$, *via* l'application
$$\mathbf{C} \to \mathbf{C}^\times; \quad z \mapsto q_z = e(z) := e^{2i\pi z}.$$
Dans le dernier cas A est une courbe elliptique. Soit T le produit de n copies de A. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ opère sur T par multiplication matricielle : on voit un élément $\mathbf{a} \in T$ comme un vecteur colonne $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ où chaque $a_i \in A$, et un élément $g \in G$ envoie $\mathbf{a}$ sur $g\mathbf{a}$. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$.

DÉFINITION 1.4. Soit c un entier supérieur à 1. Un *cycle invariant de c-torsion* sur T est une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de points de c-torsion de T qui est invariante par G, autrement dit un élément
$$D \in H^0_G(T[c]).$$
On dit de plus que D est *de degré* 0 si la somme de ses coefficients est égale à 0.

Exemple. Lorsque A est une courbe elliptique, l'élément
$$[T[c] - c^{2n}\{0\}] \in H^0_G(T[c])$$
est un cycle invariant de c-torsion de degré 0.

L'isomorphisme de Thom induit un isomorphisme
$$H^0_G(T[c]) \to H^{2n}_G(T, T - T[c]);$$
on pourra se référer à [6, Section 2] pour plus de détails sur cet isomorphisme et la deuxième partie du lemme ci-dessous.

Considérons maintenant la suite exacte longue de la paire $(T, T - T[c])$:

$$H_G^{2n-1}(T) \to H_G^{2n-1}(T - T[c]) \to H_G^{2n}(T, T - T[c]) \xrightarrow{\delta} H_G^{2n}(T). \tag{1.6}$$

LEMME 1.5. (1) *Dans le cas multiplicatif, l'image dans $H_G^{2n}(T)$ d'un cycle invariant de c-torsion D sur T est* rationnellement *nulle.*

(2) (Sullivan [63]) *Dans le cas elliptique, un cycle invariant de c-torsion D sur T est de degré 0 si et seulement si son image dans $H_G^{2n}(T)$, par l'application δ de la suite exacte (1.6), est* rationnellement *nulle. Plus précisément, si D est de degré 0 son image est nulle dans $H_G^{2n}(T, \mathbf{Z}[1/c])$.*

DÉMONSTRATION. 1. Commençons par considérer le cas où $D = \{0\}$. On veut montrer que son image $[0]$ dans $H_G^{2n}(T)$ est nulle. Puisque cette image est contenue dans le noyau du morphisme

$$H_G^{2n}(T) \to H_G^{2n}(T - \{0\})$$

induit par l'application de restriction, il suffit de montrer que son tiré en arrière par la section nulle $e = 0^*[0]$ dans $H^{2n}(BG)$ est rationnellement nul. Par définition e est la classe d'Euler du fibré normal de $\{0\}$ dans $EG \times_G T$ au-dessus de BG. Dans le cas multiplicatif il est isomorphe au fibré

$$EG \times_G \mathbf{C}^n \to BG$$

qui est complexe[2] et plat. Les classes de Chern de ce fibré sont donc nulles et donc la classe d'Euler e aussi. Ainsi l'image de $\{0\}$ dans $H_G^{2n}(T)$ est bien triviale.

Considérons maintenant le cas général où D est un cycle de c-torsion. Son image $[c]_*(D)$, par l'application $[c]$ de multiplication dans les fibres, est égale au cycle $\{0\}$. On vient donc de montrer que l'image de la classe de $[c]_*(D)$ dans $H_G^{2n}(T)$ est nulle. L'application $[c] : T \to T$ étant un revêtement fini de degré c^n, le morphisme $[c]_* : H_G^{2n}(T) \to H_G^{2n}(T)$ est rationnellement injectif. L'image de D dans $H_G^{2n}(T)$ est donc aussi (rationnellement) nulle.

2. Voir par exemple [6, Lemma 9] pour plus de détails. □

Soit D un cycle invariant de c-torsion D sur T que l'on supposera de plus de degré 0 dans le cas où A est une courbe elliptique. On peut alors relever D en un élément de $H_G^{2n-1}(T - T[c])$. Toutefois, en général ce relevé n'est pas uniquement déterminé ; l'ambiguïté est précisément $H_G^{2n-1}(T)$. On réduit cette ambiguïté en considérant la multiplication dans les fibres par un entier s, voir [31]. La multiplication dans les fibres induit une application propre $[s] : T \to T$ qui induit à son tour une application image directe $[s]_*$ en cohomologie (équivariante).

En supposant de plus s premier à c, on a $[s]^{-1}T[c] = T[sc]$. L'immersion ouverte

$$j : T - T[sc] \to T - T[c]$$

induit un morphisme

$$j^* : H^\bullet(T - T[c]) \to H^\bullet(T - T[sc]).$$

[2] Ce n'est plus vrai en famille dans le cas elliptique. Dans ce cas on obtient un fibré en $\mathbf{R}^{2n}$ qui, même plat, peut avoir une classe d'Euler non nulle.

Avec un léger abus de notation, on notera simplement $[s]_*$ la composition

$$H^\bullet(T - T[c]) \xrightarrow{j^*} H^\bullet(T - T[sc]) \xrightarrow{[s]_*} H^\bullet(T - T[c])$$

de l'application de restriction à $T - T[sc]$ par l'application d'image directe en cohomologie, et de même en cohomologie équivariante. On définit de même une application

$$[s]_* : H^\bullet(T, T - T[c]) \to H^\bullet(T, T - T[c])$$

en cohomologie et aussi en cohomologie équivariante.

Noter que, puisque s est premier à c, on a

$$[s]_*([T[c] - c^{2n}\{0\}]) = [T[c] - c^{2n}\{0\}].$$

En général, quitte à augmenter s, on peut supposer que $[s]_*(D) = D$. Cela motive la définition suivante.

DÉFINITION 1.6. Soit

$$H^\bullet_G(T - T[c])^{(1)} \subset H^\bullet_G(T - T[c])$$

l'intersection, pour tout entier $s > 1$ premier à c, des sous-espaces caractéristiques de $[s]_*$ associées à la valeur propre 1, c'est-à-dire le sous-espace des classes de cohomologie complexes qui sont envoyées sur 0 par une puissance de $[s]_* - 1$.

On définirait de même $H^\bullet_G(T)^{(1)}$, $H^\bullet_G(T, T - T[c])^{(1)}$, et leurs analogues $H^\bullet(T - T[c])^{(1)}$ en cohomologie usuelle.

Comme dans le cas affine, la construction de Borel permet de calculer la cohomologie équivariante de T, resp. $T - T[c]$, comme cohomologie d'un espace fibré au-dessus de BG de fibre T, resp. $T - T[c]$. On en déduit des suites spectrales compatibles à l'action de $[s]_*$:

$$H^p(G, H^q(T)) \Longrightarrow H^{p+q}_G(T) \tag{1.7}$$

et

$$H^p(G, H^q(T - T[c])) \Longrightarrow H^{p+q}_G(T - T[c]). \tag{1.8}$$

Dans le cas elliptique, les fibres sont compactes et $H^k_G(T)^{(1)} = \{0\}$ si $k < 2n$. Les valeurs propres de $[s]_*$ sont donc des puissances s^j, avec $j > 1$. Il en résulte que l'on peut projeter un relevé de D sur le sous-espace propre associé à la valeur 1 dans $H^{2n-1}_G(T - T[c])$; on renvoie à [6, §3.2] pour les détails. On obtient ainsi que le cycle D possède un relevé canonique dans $H^{2n-1}_G(T - T[c])^{(1)}$.

Dans le cas multiplicatif il n'est plus vrai que D possède un relevé canonique, le relevé n'est défini que modulo $H^{2n-1}_G(T)^{(1)}$.

Comme expliqué en introduction, on voudrait maintenant restreindre cette classe à un "ouvert affine G-invariant". Un tel ouvert n'existant pas dans T, on considère là encore les réalisations géométriques des espaces simpliciaux correspondants.

Le but du prochain paragraphe est de montrer, en procédant comme dans le cas additif, les deux théorèmes qui suivent. Dans les deux cas on note $\Omega_{\mathrm{mer}}(T)$ l'algèbre graduée des formes différentielles méromorphes sur T et $\Omega(T)$ la sous-algèbre constituée des formes partout holomorphes sur T.

THÉORÈME 1.7. *Supposons que A soit un groupe multiplicatif. Alors, tout cycle G-invariant D donne lieu à une classe*

$$S_{\text{mult}}[D] \in H^{n-1}(G, \Omega^n_{\text{mer}}(T))$$

qui est uniquement déterminée par D modulo $\Omega^n(T)$.

THÉORÈME 1.8. *Supposons que A soit une courbe elliptique. Alors, tout cycle G-invariant D de degré 0 donne lieu à une classe*

$$S_{\text{ell}}[D] \in H^{n-1}(G, \Omega^n_{\text{mer}}(T))$$

qui est uniquement déterminée par D.

Remarque. La construction permet en outre de montrer que si $\mathbf{a} \in T - T[c]$ est G-invariant alors $S_{\text{mult}}[D]$, resp. $S_{\text{ell}}[D]$, est cohomologue à une classe de cohomologie à valeurs dans les formes régulières en $\mathbf{a}$. Le point de vue topologique décrit ci-dessus mène ainsi naturellement à la construction de classes de cohomologie "à la Sczech" comme celle évoquée en introduction.

Sous certaines conditions supplémentaires sur le cycle D, nous décrivons des représentants explicites des classes $S_{\text{mult}}[D]$ et $S_{\text{ell}}[D]$ dans le chapitre suivant.

1.4. Démonstration des théorèmes 1.7 et 1.8

1.4.1. Arrangement d'hyperplans trigonométriques ou elliptiques. On fixe un groupe algébrique A, isomorphe au groupe multiplicatif ou à une courbe elliptique. Soit n un entier naturel et soit $T = A^n$.

On appelle *fonctionnelle affine* toute application $\chi : T \to A$ de la forme

$$t_0 + \mathbf{a} \mapsto \chi_0(\mathbf{a})$$

où t_0 est un élément de T_{tors} et $\chi_0 : A^n \to A$ un morphisme de la forme $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum r_i a_i$ où les r_i sont des entiers.

On dit que χ est *primitif* si les coordonnées $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbf{Z}^n$ de χ_0 sont premières entre elles dans leur ensemble. Dans ce cas le lieu d'annulation de χ est un translaté de l'ensemble

$$\ker(\chi_0) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \ : \ \sum r_i a_i = 0\}.$$

Soit $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ une base du sous-module de $\mathbf{Z}^n$ orthogonal au vecteur $\mathbf{r}$. Les $\mathbf{v}_i$ définissent une application

$$A^{n-1} \longrightarrow A^n$$

qui est un isomorphisme sur son image $\ker(\chi_0)$. (On peut en effet se ramener au cas où $(r_1, \ldots, r_n) = (0, \ldots, 0, 1)$.)

DÉFINITION 1.9. On appelle *hyperplan* le lieu d'annulation (ou abusivement "noyau") d'une fonctionnelle affine primitive. Un *arrangement d'hyperplans* Υ est un fermé de Zariski dans T réunion d'hyperplans. La taille $\#\Upsilon$ est le nombre d'hyperplans distincts de cet arrangement.

Noter que de manière équivalente, un hyperplan est l'image d'une application $A^{n-1} \to T$ linéaire relativement à un morphisme $A^{n-1} \to A^n$ induit par une matrice entière de taille $(n-1) \times n$.

LEMME 1.10. *Si Υ contient n fonctionnelles affines χ dont les vecteurs associés $\mathbf{r} \in \mathbf{Z}^n$ sont linéairement indépendants alors le complémentaire $T - \Upsilon$ est affine.*

Lorsque A est une courbe elliptique, c'est même une équivalence.

DÉMONSTRATION. S'il existe n fonctionnelles affines dans Υ dont les vecteurs de $\mathbf{Z}^n$ associés sont linéairement indépendants alors ces fonctionnelles définissent une application finie $T \to A^n$ et Υ est la pré-image de la réunion des axes de coordonnées dans A^n. Mais $(A - \{0\})^n$ est affine, et la pré-image d'une variété affine par une application finie est encore affine.

Maintenant, si A est une courbe elliptique et que l'espace engendré par les vecteurs des fonctionnelles affines qui définissent Υ est un sous-module propre de $M \subset \mathbf{Z}^n$ alors la donnée d'un point de $T - \Upsilon$ et d'un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ orthogonal à M définit un plongement

$$A \longrightarrow T - \Upsilon.$$

Comme A n'est pas affine, l'espace $T - \Upsilon$ ne l'est pas non plus. $\square$

1.4.2. Opérateurs de dilatation et cohomologie des arrangements d'hyperplans. On appelle *application de dilatation* toute application $[s] : T \to T$ associée à un entier $s > 1$ et de la forme

$$[s] : \mathbf{a} \mapsto s\mathbf{a}.$$

L'image d'un hyperplan par une application de dilatation est encore un hyperplan.

Tout hyperplan est l'image d'un sous-groupe par un translation par point de *torsion* dans T. Étant donné un arrangement d'hyperplans, on peut donc trouver une application de dilatation $[s]$ qui préserve cet arrangement, c'est-à-dire telle que $[s]\Upsilon \subset \Upsilon$.

Puisque $[s]$ préserve Υ, on a une immersion ouverte

$$j : T - [s]^{-1}\Upsilon \to T - \Upsilon.$$

La dilatation $[s]$ induit une application de $T - [s]^{-1}\Upsilon$ vers $T - \Upsilon$ qui est à fibres finies. En abusant légèrement des notations on note $[s]_*$ la composition

$$H^\bullet(T - \Upsilon) \xrightarrow{j^*} H^\bullet(T - [s]^{-1}\Upsilon) \xrightarrow{[s]_*} H^\bullet(T - \Upsilon)$$

de l'application de restriction à $T - [s]^{-1}\Upsilon$ par l'application d'image directe de $[s]$ en cohomologie.

On peut alors poser l'analogue suivant de la définition 1.6.

DÉFINITION 1.11. Soit

$$H^*(T - \Upsilon, \mathbf{C})^{(1)} \subset H^*(T - \Upsilon, \mathbf{C})$$

l'intersection, pour tout entier $s > 1$ tel que la dilatation $[s]$ préserve Υ, des sous-espaces caractéristiques de $[s]_*$ associé à la valeur propre 1, c'est-à-dire le sous-espace des classes de cohomologie complexes qui sont envoyées sur 0 par une puissance de $[s]_* - 1$.

1.4.3. Démonstration des théorèmes 1.7 et 1.8. À tout vecteur ligne $v \in \mathbf{Z}^n$ dont les coordonnées sont premières entre elles dans leur ensemble, il correspond la fonctionnelle linéaire primitive

$$\chi_v : T \to A;\ \mathbf{a} \mapsto v\mathbf{a}.$$

Il découle du lemme 1.5 que, sous les hypothèses des théorèmes 1.7 et 1.8, le cycle D se relève en un élément de

$$H_G^{2n-1}(T - T[c]) = H^{2n-1}(EG \times_G (T - T[c]))$$

et donc de

$$H^{2n-1}(\|EG \times_G (T - T[c])\|).$$

À tout $(k+1)$-uplet $\mathbf{g} \in (EG)_k$ on associe un ouvert

$$U(\mathbf{g}) = \left\{ \mathbf{a} \in T \ \middle|\ \begin{array}{l} \forall j \in \{0, \dots, k\},\ \forall i \in \{0, \dots, n\}, \\ \chi_{e_i g_j}(\mathbf{a}) \notin A[c] \end{array} \right\}.$$

C'est le complémentaire d'un arrangement d'hyperplans dans T :

$$U(\mathbf{g}) = T - \cup_{j=0}^{k} \cup_{i=1}^{n} \cup_{a \in A[c]} \chi_{e_i g_j}^{-1}(a). \tag{1.9}$$

L'action du groupe G préserve l'ensemble de ces ouverts :

$$h \cdot U(\mathbf{g}) = U(\mathbf{g}h^{-1}).$$

Il découle par ailleurs du lemme 1.10 que les variétés (1.9) sont affines ; elles n'ont par conséquent pas de cohomologie en degré $> n$. Comme expliqué dans l'annexe A, il correspond à tout élément dans $H_G^{2n-1}(T - T[c])$ une classe de cohomologie dans

$$H^{n-1}(G, \varinjlim_{\Xi} H^n(T - \cup_{\chi \in \Xi} \cup_{a \in A[c]} \chi^{-1}(a))),$$

où Ξ désigne l'ensemble des translatés par G des morphismes $\chi_{e_1}, \dots, \chi_{e_n}$. Noter que toute classe dans $H^n(U(\mathbf{g}))$ définie un élément de la limite inductive. En pratique, nos cocycles seront représentés par des formes régulières sur des $U(\mathbf{g})$.

Puisque l'élément de $H_G^{2n-1}(T - T[c])$ que nous considérons appartient à $H_G^{2n-1}(T - T[c])^{(1)}$, on obtient une classe de cohomologie dans

$$H^{n-1}(G, \varinjlim_{\Xi} H^n(T - \cup_{\chi \in \Xi} \cup_{a \in A[c]} \chi^{-1}(a)))^{(1)}$$

et même dans

$$H^{n-1}(G, \varinjlim_{\Xi} H^n(T - \cup_{\chi \in \Xi} \cup_{a \in A[c]} \chi^{-1}(a))^{(1)}),$$

car on dispose d'un projecteur sur la partie invariante de la cohomologie des compléments d'hyperplans, cf. Lemme 3.12.

Il nous reste à représenter

$$\varinjlim_{\Xi} H^n(T - \cup_{\chi\in\Xi} \cup_{a\in A[c]} \chi^{-1}(a))^{(1)},$$

par des formes méromorphes. C'est l'objet du chapitre 3 dans lequel nous démontrons un théorème "à la Brieskorn" dans ce contexte, cf. Théorème 3.5.

Finalement le cycle D donne donc lieu à un élément de $H^{n-1}(G, \Omega^n_{\text{mer}}(T))$. Dans le cas elliptique cet élément est uniquement déterminé. Ce n'est pas vrai dans le cas multiplicatif. Alors T est elle-même affine et on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^{2n-1}_G(T)^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & H^{2n-1}_G(T - T[c])^{(1)} \arrow[r] \arrow[d] & H^{2n}_G(T, T - T[c])^{(1)} \\
H^{n-1}(G, H^n(T)^{(1)}) \arrow[r] & H^{n-1}(G, \Omega^n_{\text{mer}}(T))). &
\end{tikzcd}$$

La classe associée à D dans $H^{n-1}(G, \Omega^n_{\text{mer}}(T))$ n'est donc déterminée qu'à un élément de $H^{n-1}(G, H^n(T)^{(1)})$ près. En invoquant encore une fois le théorème 3.5 on identifie cette indétermination à un élément de $H^{n-1}(G, \Omega^n(T))$.

Pour conclure, notons que la remarque qui suit les théorèmes 1.7 et 1.8 se démontre en partant non plus des hyperplans $\chi_{e_j}^{-1}(A[c])$, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, translatés par les éléments de G, mais de n hyperplans ne passant pas par $\mathbf{a}$, ce que l'on peut faire de manière G-équivariante puisque $\mathbf{a}$ est G-invariant.