DIFFUSION D'UNE ONDE PAR UN COIN

PATRICK GÉRARD ET GILLES LEBEAU

SOMMAIRE

1. Introduction et énoncé du résultat
2. Réduction au bord
 - 2.1. Estimations L^2 des traces
 - 2.2. Transformation FBI partielle en temps
 - 2.3. Système vérifié par les dérivées normales
3. Réduction deux-microlocale
 - 3.1. Opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe pour les problèmes aux limites
 - 3.2. Régularité deux-microlocale pour le problème de Dirichlet
 - 3.3. Changement d'inconnues et écriture du système
4. Microlocalisation du problème et développements asymptotiques
 - 4.1. Transformation FBI en variable d'espace
 - 4.2. Espaces de fonctions holomorphes
 - 4.3. Développement des termes pseudo-différentiels
 - 4.4. Développement des termes singuliers
 - 4.5. Développement du second membre
 - 4.6. Système microlocalisé
5. Inversion du symbole principal
6. Fin de la démonstration

Appendice A. Calcul pseudo-différentiel complexe à valeurs opérateurs dans une chaîne d'espaces de Banach

Appendice B. Développements asymptotiques

Appendice C. Choix de la chaîne d'espaces

Appendice D. Résolution d'un problème elliptique dans un secteur angulaire

Received by the editors December 24, 1991.

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 35L05, 35S15.

Key words and phrases. Equations d'ondes, dièdre, singularités.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Soient $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞ , analytiques près de l'origine, telles que

$$(1.1) \quad a(0) = b(0) = 0, \quad a'(0) > 0 > b'(0), \quad a(x) > 0 > b(x) \quad \text{pour } x > 0.$$

On considère, dans $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y}^2$, l'ouvert

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R}_t \times (\mathbb{R}^2 \setminus F) \\ F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, b(x) \leq y \leq a(x)\}. \end{aligned}$$

Soit par ailleurs $u_i \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ une solution de $\square = \partial_t^2 - \Delta_{x,y}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, conormale analytique par rapport à une surface Σ_i de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ telle que

$$(1.3) \quad \Sigma_i \cap \{t < 0\} \subset \Omega, \quad \Sigma_i \cap \{t = 0\} \cap \partial\Omega = \{t = x = y = 0\}.$$

On suppose que u_i est supportée du côté de Σ_i ne rencontrant pas $\mathbb{R}_t \times F$ (voir la Figure 1).

Soit $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ telle que

$$(1.4) \quad \square u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t < 0} = u_i|_{t < 0}.$$

On se propose de décrire les singularités de u pour $t > 0$ assez petit, en dehors des rayons diffractés tangentiellement aux demi-courbes $y = a(x)$, $y = b(x)$, $x > 0$.

Dans le cas où le coin est droit (i.e., a et b sont des fonctions linéaires), on peut calculer u en passant en coordonnées polaires de centre $x = y = 0$, et en utilisant les fonctions de Bessel. Ce calcul a été réalisé pour la première fois par Macdonald [M], puis précisé par Garnir [Ga], Varenne [V], Cheeger-Taylor [CT], enfin Rouleux [R] dans le cadre analytique. Dans le cas général, Uchida [U] a récemment obtenu des estimations géométriques a priori sur la diffraction des singularités analytiques.

On va ici donner un résultat *quantitatif*, c'est-à-dire conduisant à un calcul explicite de l'amplitude de diffusion. Avant d'énoncer ce résultat, nous devons

FIGURE 1. Situation à $t < 0$.

introduire quelques notations supplémentaires. On pose

$$(1.5) \quad a'(0) = a = \operatorname{tg} \gamma_+, \quad b'(0) = b = \operatorname{tg} \gamma_-, \quad \pm \gamma_{\pm} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Dans un voisinage de $t = x = y = 0$, on peut écrire

$$(1.6) \quad u_i(t, x, y) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(t-\theta_i(x,y))} \sigma_i(x, y, \tau) d\tau$$

modulo une fonction analytique, où θ_i est une solution analytique réelle de l'équation eikonale

$$(1.7) \quad \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial y} \right)^2 = 1,$$

vérifiant de plus

$$(1.8) \quad \theta_i(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(0, 0) = 1,$$

et où σ_i est un symbole analytique se prolongeant en une fonction holomorphe dans $\operatorname{Im} \tau < 0$, et vérifiant

$$(1.9) \quad \sup_{s \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau|^2) |\sigma_i(x, y, \tau - is)|^2 d\tau < +\infty.$$

Notons par ailleurs

$$\tilde{\Delta}_+ = \{(t, x, y), y = a(x)\}, \quad \tilde{\Delta}_- = \{(t, x, y), y = b(x)\}, \quad \Delta_{\pm} = \tilde{\Delta}_{\pm} \cap \{x > 0\},$$

et désignons par $\delta_{\pm}$ les distributions en (x, y) définies par

$$(1.10) \quad \langle \delta_+, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x, a(x)) dx, \quad \langle \delta_-, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x, b(x)) dx.$$

Enfin, on posera, lorsque les traces ont un sens,

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \partial_+ f(x) &= (\partial_y - a'(x) \partial_x) f|_{y=a(x)=0^+}, \\ \partial_- f(x) &= (b'(x) \partial_x - \partial_y) f|_{y=b(x)=0^-}. \end{aligned}$$

Soient $u_{\pm}$ les solutions de $\square u_{\pm} = 0$, $u_{\pm}|_{\tilde{\Delta}_{\pm}} = 0$, obtenues par réflexion de u_i sur $\tilde{\Delta}_{\pm}$. Ces fonctions sont décrites explicitement par des différences d'intégrales de type (1.6) (voir la §3.3 pour un rappel de ces constructions standards). On note alors u_e la solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ du problème

$$(1.12) \quad \begin{cases} \square u_e = -1_{x>0} (\partial_+ u_+ \delta_+ + \partial_- u_- \delta_-), \\ u_e|_{t<0} = u_i|_{t<0}. \end{cases}$$

La fonction u_e est dans $H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$, et est décrite explicitement par des intégrales de phase. En notant (voir la Figure 2, p. 344) Σ_r la réunion des deux surfaces $\Sigma_{r,\pm}$ obtenues par réflexion de Σ_i sur $\Delta_{\pm}$, et un posant $\Sigma_d = \{(t, x, y), t = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, on peut en particulier montrer que

$$(1.13) \quad \begin{aligned} u_e &\text{ est conormale analytique sur la partie lisse de } \Sigma_i \cup \Sigma_r \cup \Sigma_d, \\ u_e &\in H^{3/2} \text{ près de } \Sigma_d \setminus (\Sigma_i \cup \Sigma_r), \quad t > 0 \end{aligned}$$

FIGURE 2. Situation à $t > 0$ petit.

et calculer les symboles correspondants. Le but de ce travail est de décrire la différence $u - u_e$. On ne pourra en fait la décrire que dans

$$(1.14) \quad \Omega^\varepsilon = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y}^2 \setminus (F \cup \{(x, y), x \geq 0, \operatorname{tg}(\gamma_- - \varepsilon)x \leq y \leq \operatorname{tg}(\gamma_+ + \varepsilon)x\})$$

où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit.

Théorème 1.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour $(t, x, y) \in \Omega^\varepsilon$, $0 < t < \varepsilon_1$,*

$$(1.15) \quad u(t, x, y) = u_e(t, x, y) + u_d(t, x, y),$$

où $u_d \in H_{\text{loc}}^{3/2}(\overline{\Omega}^\varepsilon)$ est conormale analytique par rapport à Σ_d , c'est-à-dire

$$(1.16) \quad u_d(t, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau(t - \sqrt{x^2 + y^2})} \sigma_d(x, y, \tau) \frac{d\tau}{2\pi}.$$

modulo une fonction analytique, σ_d étant un symbole analytique, holomorphe dans $\operatorname{Im} \tau < 0$, vérifiant

$$(1.17) \quad \sup_{s \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\tau|^2)^{3/2} |\sigma_d(x, y, \tau - is)|^2 d\tau < +\infty.$$

De plus, on a

$$(1.18) \quad \sigma_d(x, y, \tau) = \sigma_d^0(x, y, \tau) + r^0(x, y, \tau),$$

où r est un symbole analytique vérifiant

$$(1.19) \quad \sup_{s \geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\tau|^2)^{5/2} |r^0(x, y, \tau - is)|^2 d\tau < +\infty.$$

Le terme principal σ_d^0 pouvant s'écrire

$$(1.20) \quad \sigma_d^0(x, y, \tau) = (\tau \sqrt{x^2 + y^2})^{-1/2} \sigma_i(0, 0, \tau) (K_+(\cos(\theta - \gamma_+)) + K_-(\cos(\theta - \gamma_-))),$$

où $\theta \in]\gamma_+ + \varepsilon, 2\pi + \gamma_- - \varepsilon[$ est défini par $\cos \theta = x/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin \theta = y/\sqrt{x^2 + y^2}$, et où $K_{\pm}$ sont des fonctions analytiques ne dépendant que de γ_+ et γ_- .

On va décrire dans les sections qui suivent une procédure explicite de calcul des fonctions $K_{\pm}$, qui permet également de déterminer tous les termes du développement asymptotique de σ_d . Auparavant, on notera que, compte tenu de (1.13), le théorème ci-dessus entraîne le:

Corollaire 1.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que la fonction u soit conormale analytique sur la partie lisse de $\Sigma_d \cup \Sigma_r \cup \Sigma_i$ dans $\Omega^\varepsilon \cap \{0 < t < \varepsilon_1\}$, et $u \in H^{3/2}$ près de $\Sigma_d \setminus (\Sigma_r \cup \Sigma_i)$ dans $\Omega^\varepsilon \cap \{0 < t < \varepsilon_1\}$.*

On déduira aussi des calculs effectués le Théorème 1.2 suivant de propagation des singularités. Soit L l'arête $L = \{(t; x = y = 0)\}$ et

$$(1.21) \quad T_b^* \Omega = T^* \Omega \cup T^* \Delta_+ \cup T^* \Delta_- \cup T^* L.$$

La topologie sur $T_b^* \Omega$ est définie par la projection naturelle $p: T^* \bar{\Omega} \rightarrow T_b^* \Omega$. Par définition un *rayon* est une application continue

$$\rho: I \rightarrow p((\text{car } \square) \cap (\tau, \xi, \eta) \neq 0),$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, telle que ρ soit un rayon au sens usuel près de $s \in I$ si $\rho(s) \notin T^* L$ (voir [S1]), $\#\{s; \rho(s) \in T^* L\} \leq 1$, et si $t(s), \tau(s)$ sont les coordonnées (t, τ) de $\rho(s)$, on a $\tau(s) = \tau_0 \neq 0$ et $t(s) = t - 2\tau_0 s$.

Soit S le sous-ensemble de $T^* \Omega$ défini par

$$(1.22) \quad S = \{q \in T^* \Omega; \text{ il existe un rayon } \rho, q \in \rho, \text{ et } (\rho \cap t < 0) \subset T_{\Sigma_i}^*\}.$$

On peut écrire S comme la réunion disjointe

$$(1.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = S_i \cup S_r \cup S_d \cup S_g \text{ avec} \\ S_i = T_{\Sigma_i}^* \cap T^* \Omega, \\ S_r = \text{adhérence } \{q \in S; \text{ le rayon associé à } q \text{ n'a que des points d'intersection} \\ \text{transverse avec } \Delta_{\pm}, \text{ et ne coupe pas } T^* L\} \setminus S_i, \\ S_d = \{q \in S; \text{ le rayon associé à } q \text{ intersecte } T^* L \\ \text{et n'est jamais tangent à } \Delta_{\pm}\} \setminus S_r, \\ S_g = S \setminus S_i \cup S_r \cup S_d. \end{array} \right.$$

(On a dessiné sur la Figure 2 la projection sur la base (x, y) de $S \cap (t = t_0 > 0)$ dans le cas a concave, b convexe, u_i onde plane.)

On a alors:

Théorème 1.2. *Le front d'onde analytique de u dans $T^*\Omega$ est contenu dans S près de $x = y = t = 0$.*

Ces résultats sont en accord avec la théorie géométrique de la diffraction de Keller [Ke] (voir aussi Molinet [Mo] pour une introduction à cette théorie et une bibliographie détaillée). En particulier, la relation (1.20) est une illustration de “l’approximation du plan tangent”, qui affirme que la partie principale de l’onde diffractée est la même que si le coin était droit.

La clé du théorème précédent est un théorème de régularité 2—microlocale pour un problème aux limites dans un demi-espace, basé sur la stratégie de déformation microhyperbolique introduite par Kashiwara-Kawai [KK] et Sjöstrand [S2, 3]. Ce résultat permet de faire une analyse asymptotique de l’opérateur de bord associé au problème (1.4), et de se ramener ainsi à l’inversion d’un système d’équations intégrales relié au même problème pour un coin droit. Ce dernier système est lui-même résolu par une méthode de déformation dans le domaine complexe, qui permet de se ramener à la résolution d’un problème elliptique.

Cet article s’organise de la façon suivante. Dans la §2, on prouve que les dérivées normales $v_{\pm}$ de u sur $\Delta_{\pm}$ sont L^2 . On introduit ensuite une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) partielle T_0 dans la variable t , qui permet déjà de microlocaliser le problème près de $t = 0$ et (par exemple) $\tau = 1$. On écrit enfin le système vérifié par $v_{\pm}$, que le caractère singulier des opérateurs de bord oblige à interpréter dans un espace E_1 de distributions supportées dans $t \geq 0$, qui contient strictement L^2 .

La §3 est consacrée au théorème de régularité deux-microlocale évoqué plus haut. Après avoir développé un calcul symbolique pseudo-différentiel dans le domaine complexe pour les problèmes aux limites (qui ne diffère pas essentiellement de celui de Sjöstrand [S1, 2, 3]), on utilise cette technique pour démontrer un résultat de régularité pour les solutions d’un problème de Dirichlet dans un demi-espace, qui sont “sortantes” relativement à une sous-variété involutive de codimension 1 du cotangent au bord. Le résultat s’exprime en termes du second microsupport à croissance le long de V , tel qu’il a été introduit dans [L1]. La fin de la §3 applique ce résultat au problème étudié: on montre que, si l’on enlève à $v_{\pm}$ les contributions des ondes réfléchies $u_{\pm}$, on obtient deux nouvelles inconnues $f_{\pm}$ qui sont deux-microlocalement régulières par rapport à la variété involutive $V = \{x = 0\}$, sauf près des directions qui émettent tangentiellement aux demi-courbes $\Delta_{\pm}$.

La §4 a pour objet la microlocalisation en x du système portant sur $f_{\pm}$. On introduit d’abord une transformation FBI T_1 en x ; le résultat de la section précédente se traduit en termes de croissance modérée, par rapport au grand paramètre λ , de la fonction holomorphe $T_0 \otimes T_1(f_{\pm})(w, z, \lambda)$ dans un domaine $W \times \omega$ de $\mathbb{C}_w \times \mathbb{C}_z$. Le reste de la section consiste à tirer parti de cette estimation pour transformer le système sur $f_{\pm}$ en un système sur $T_0 \otimes T_1(f_{\pm})$, que l’on ramène à un système pseudo-différentiel en w à valeurs opérateurs dans une chaîne d’espaces de fonctions holomorphes en z (au sens d’Ovsjannikov; voir [O], [N], [BG]). Pour inverser ce système, on est alors ramené à prouver l’inversibilité de son symbole principal dans la chaîne d’espaces en question.

Dans la §5, on prouve l'inversibilité du symbole principal en faisant effectuer au contour de cet opérateur intégral une légère rotation dans le domaine complexe. On constate alors que le système "déformé" est équivalent à un problème elliptique dans un secteur angulaire du plan des (x, y) , dont on montre qu'il est bien posé dans l'appendice D.

Enfin, la §6 utilise le calcul pseudo-différentiel à valeurs opérateurs présenté en Appendice A pour en déduire $T_0 \otimes T_1(f_{\pm})$. L'onde diffractée u_d est alors la solution, nulle dans $t < 0$, de l'équation $\square u_d = -(f_+ \delta_+ + f_- \delta_-)$.

Nous terminons cette introduction en rappelant l'inégalité de Hardy suivante, que nous utiliserons à de nombreuses reprises au cours de la démonstration:

Proposition 1.1. *L'opérateur de noyau $1_{x \geq 0, y \geq 0}(1/(x+y))$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.*

Démonstration. Désignons par A l'opérateur en question, et par A_1 l'opérateur de noyau

$$K_1(x, y) = 1_{x \geq y \geq 0} \frac{1}{x+y}.$$

Alors on a $A = A_1 + A_1^*$, et il suffit de montrer que A_1 est borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Or

$$|A_1 f(x)| = \left| \int_0^x \frac{f(y)}{x+y} dy \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(y)| dy,$$

et il suffit de montrer que l'opérateur A_2 défini par

$$A_2 f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy = \int_0^1 f(tx) dt$$

est borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$. Or, si $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$,

$$(A_2 f, g) = \int_0^1 \left(\int_0^\infty f(tx) \overline{g(x)} dx \right) dt \leq \|g\| M,$$

$$M = \int_0^1 \left(\int_0^\infty |f(tx)|^2 dx \right)^{1/2} dt = \|f\| \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\|f\|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. RÉDUCTION AU BORD

2.1. Estimations L^2 des traces. Si u est la solution introduite à la section précédente, on peut définir

$$v_{\pm} = (\partial_{\pm} u)|_{x>0} \in \mathcal{D}'(\Delta_{\pm}).$$

Par hypothèse, $\text{supp}(v_{\pm}) \subset \{t \geq 0\}$, et, par vitesse finie de propagation, on a $\text{supp}(v_{\pm}) \subset \{(t, x), 0 \leq x \leq ct\}$. On désigne par $\underline{u}$ le prolongement de u par 0 en dehors de Ω . On a alors $\underline{u} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y}^2)$. (Voir Grisvard [G].)

Proposition 2.1. *Pour tout $T > 0$ assez petit, $v_{\pm} \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}_+)$, et on a l'identité*

$$(2.1) \quad \square \underline{u} = -v_+ \delta_+ - v_- \delta_-.$$

Démonstration. Soit $\chi \in C_0^\infty([-T, T[\times B(0, r))$ et soit ρ_ε la composée de χ avec une régularisation en temps. Alors $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon u$ est bornée dans H^1 et vérifie

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = [\Delta, \rho_\varepsilon]u + \partial_t^2 \rho_\varepsilon u \in L^2, \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

ce qui rend licites des formules d'intégration par parties sur Ω ([G]). Il s'agit de montrer que $\|\partial u_\varepsilon / \partial n\|_{L^2(\Delta_\pm)}$ est bornée en ε . Pour cela, on choisit un champ réel X sur $\mathbb{R}_{x,y}^2$ tel que $X \cdot n \geq c_0 > 0$ sur $\partial\Omega$, n étant la normale sortante, définie sur $\Delta_+ \cup \Delta_-$, donc presque partout sur $\partial\Omega$. Le calcul ci-dessous est alors essentiellement classique; on y désignera par $0(1)$ toute quantité bornée uniformément en ε , et on fera un usage constant du fait que $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = 0(1)$. On a

$$(2.2) \quad ((\partial_t^2 - \Delta)u_\varepsilon, Xu_\varepsilon) = ([\partial_t^2 - \Delta, \rho_\varepsilon]u, Xu_\varepsilon) = 0(1)$$

car ρ_ε est une famille bornée d'opérateurs d'ordre 0. Par ailleurs,

$$(2.3) \quad \operatorname{Re}((\partial_t^2 - \Delta)u_\varepsilon, Xu_\varepsilon) = -\operatorname{Re}(\partial_t u_\varepsilon, X \partial_t u_\varepsilon) - \operatorname{Re}(\Delta u_\varepsilon, Xu_\varepsilon).$$

Comme $\partial_t u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$ et que X est un champ réel,

$$(2.4) \quad \operatorname{Re}(\partial_t u_\varepsilon, X \partial_t u_\varepsilon) = 0(1).$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re}(\Delta u_\varepsilon, Xu_\varepsilon) + \operatorname{Re}(\nabla u_\varepsilon, \nabla Xu_\varepsilon) - \operatorname{Re}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, Xu_\varepsilon\right)_{\partial\Omega} \\ (2.5) \quad &= \operatorname{Re}(\Delta u_\varepsilon, Xu_\varepsilon) + 0(1) + \operatorname{Re}(\nabla u_\varepsilon, X \nabla u_\varepsilon) \\ &\quad - \operatorname{Re}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, Xu_\varepsilon\right)_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Or, X étant un champ réel,

$$(2.6) \quad \operatorname{Re}(\nabla u_\varepsilon, X \nabla u_\varepsilon) = 0(1) + \frac{1}{2}(X \cdot n \nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)_{\partial\Omega}.$$

En injectant (2.4), (2.5), et (2.6) dans (2.3), et en comparant avec (2.2), il vient

$$\frac{1}{2}(X \cdot n \nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon)_{\partial\Omega} - \operatorname{Re}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}, Xu_\varepsilon\right)_{\partial\Omega} = 0(1),$$

ce qui, puisque $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$, s'écrit

$$-\frac{1}{2} \left\| \sqrt{X \cdot n} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0(1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Passons à la deuxième assertion de la Proposition 1.1.

Puisque $u|_{\Delta_\pm} = 0$, la formule des sauts usuelle entraîne que la distribution $\square \underline{u} + v_+ \delta_+ v_- \delta_-$ est supportée par $x = y = 0$. Or, d'après les informations sur $v_\pm$ et sur $\underline{u}$, c'est un élément de $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Elle est donc nulle. $\square$

Nous allons déduire de la formule (2.1) un système d'équations sur $v_{\pm}$. Pour cela, on désigne par $\square^{-1}$ la solution fondamentale de $\square$ à support dans $t \geq 0$. Puisque $\underline{u}|_{t < 0} = u_i|_{t < 0}$, la formule (2.1) s'écrit

$$(2.7) \quad \underline{u} = u_i - \square^{-1}(v_+ \delta_+ + v_- \delta_-).$$

2.2. Transformation FBI partielle en t . On pose $\mathbb{C}^- = \{\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \tau < 0\}$. Pour $u(t, x)$ distribution tempérée en $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ on note $\hat{u}(\tau, x)$ la transformée de Fourier partielle en t et pour $\lambda \geq 1$, $\hat{u}_{\lambda}(\tau, x) = \hat{u}(\lambda \tau, x)$.

Définition 2.1. Soit $e \in \mathbb{R}_+$. On note E_e l'ensemble des distributions tempérées $u(t, x)$, à support dans $t \geq 0$ telles que

- i) $\forall \tau \in \mathbb{C}^-, \hat{u}(\tau, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d)$;
 - ii) $\exists A, B, \forall \tau \in \mathbb{C}^-, \|\hat{u}(\tau, \cdot)\|_{L^2} \leq \frac{A(1+|\tau|)^B}{|\operatorname{Im} \tau|^e}$.
- Pour $w \in \mathbb{C}$, $\lambda \geq 1$, et $u \in E_e$ on pose

$$(2.8) \quad T_0 u(w, x, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{\operatorname{Im} \tau = -a} e^{i\lambda \tau w - \lambda \tau^2/2} \hat{u}_{\lambda}(\tau, x) d\tau$$

avec $a > 0$, l'intégrale étant indépendante de a .

Pour $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{C}$, on a

$$(2.9) \quad e^{-\lambda \tau^2/2} T_0 u(t - i\tau, x, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{\operatorname{Im} \sigma = -a} e^{i\lambda \sigma t - \lambda(\sigma - \tau)^2/2} \hat{u}_{\lambda}(\sigma, x) d\sigma.$$

Il en résulte qu'il existe des constantes A et B telles qu'on ait

$$(2.10) \quad \begin{aligned} t + \operatorname{Im} \tau < 0 &\Rightarrow \|e^{-\lambda \tau^2/2} T_0 u(t - i\tau, \cdot, \lambda)\|_{L_x^2} \\ &\leq e^{-\lambda t^2/2 - \lambda t \operatorname{Im} \tau} \frac{A(\lambda + |\tau| + |t|)^B}{|t + \operatorname{Im} \tau|^e}, \end{aligned}$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} t + \operatorname{Im} \tau > -1 &\Rightarrow \|e^{-\lambda \tau^2/2} T_0 u(t - i\tau, \cdot, \lambda)\|_{L_x^2} \\ &\leq e^{\lambda(\operatorname{Im} \tau)^2/2} A(\lambda + |\operatorname{Re} \tau|)^B \\ &\quad \times (2 + t + \operatorname{Im} \tau)^e. \end{aligned}$$

En effet, (2.10) s'obtient en choisissant $a = -(t + \operatorname{Im} \tau)$ dans (2.9) et (2.11) en choisissant $a = 1/\lambda(2 + t + \operatorname{Im} \tau)$.

Lemme 2.1. On a la formule d'inversion, pour $u \in E_e$,

$$(2.12) \quad \begin{aligned} &\forall \tau \in \mathbb{C}^-, \\ \hat{u}_{\lambda}(\tau, x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda \tau t} e^{-\lambda \tau^2/2} T_0 u(t - i\tau, x, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Preuve. D'après (2.10), (2.11), et $\operatorname{Im} \tau < 0$ l'intégrale de droite est normalement convergente dans L_x^2 . Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\theta \equiv 1$ près de l'origine. Soit I le

membre de droite de (2.12). D'après (2.9) on a

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau t} \theta(\varepsilon t) \int_{\operatorname{Im} \sigma = \operatorname{Im} \tau} e^{i\lambda\sigma t - \lambda(\sigma - \tau)^2/2} \hat{u}_\lambda(\sigma, x) d\sigma dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \hat{\theta}\left(\frac{\lambda u}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda u^2/2} \hat{u}_\lambda(\tau - u, x) du \end{aligned}$$

et le lemme résulte de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda/2\pi\varepsilon) \hat{\theta}(\lambda u/\varepsilon) = \delta_{u=0}$ dans $\mathcal{S}'_u$. $\square$

Définition 2.2. Pour W ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi \in C^0(W, \mathbb{R})$ on note $H_\varphi(W, L^2)$ l'espace de Sjöstrand des fonctions $f(w, x, \lambda)$ définies pour $w \in W$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \geq 1$, holomorphes en w , L^2 en x , telles que

$$(2.13) \quad \forall K \Subset W, \quad \exists A, B, \quad \sup_{w \in K} \|e^{-\lambda\varphi(w)} f(w, \cdot, \lambda)\|_{L^2_x} \leq A\lambda^B.$$

On notera $\varphi_0 = (\operatorname{Im} w)^2/2$, $\tilde{\varphi}_0 = (\operatorname{Im} w)^2/2 - [(\operatorname{Re} w)_-]^2/2$ où $(\operatorname{Re} w)_- = 0$ pour $\operatorname{Re} w \geq 0$; $(\operatorname{Re} w)_- = \operatorname{Re} w$ pour $(\operatorname{Re} w) \leq 0$. Il résulte de (2.10) et (2.11) qu'on a, pour $u \in E_e$,

$$(2.14) \quad T_0 u \in H_{\tilde{\varphi}_0}(\mathbb{C}, L^2).$$

On choisit un réel $\kappa > 0$ et on pose

$$(2.15) \quad W = \{w, |\operatorname{Re} w| < \kappa, |1 + \operatorname{Im} w| < \kappa\}.$$

Lemme 2.2. Soit $u \in E_e$ avec support $(u) \subset t \geq t_0 > \kappa$. On a

$$T_0 u \in H_\varphi(W, L^2), \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{1}{2}(t_0 - \kappa)^2.$$

Preuve. Soit $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(t) \equiv 1$ pour $t \geq t_0 - \varepsilon$, $\psi(t) \equiv 0$ pour $t \leq t_0 - 2\varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est petit. On a alors $\psi u = u$ et

$$(2.16) \quad T_0 u(w, x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{\substack{\operatorname{Im} \tau = -b \\ \operatorname{Im} \sigma = -a}} e^{i\lambda\tau w - \lambda\tau^2/2} \hat{\psi}_\lambda(\tau - \sigma) \hat{u}_\lambda(\sigma, x) d\sigma.$$

Or on a $|\hat{\psi}_\lambda(\tau)| \leq e^{\lambda \operatorname{Im} \tau(t_0 - 2\varepsilon)} C_N (\lambda|\tau|)^{-N}$ et on conclut en choisissant a près de 0 et $b = t_0 - \kappa + \varepsilon$, avec ε tel que $|\operatorname{Re} w| \leq \kappa - 4\varepsilon$ pour $w \in K \Subset W$.

Soit à présent K_τ une famille d'opérateurs bornés sur L^2_x , dépendant holomorphiquement de $\tau \in \mathbb{C}_-$ telle que

$$(2.17) \quad \exists A, B, e, \quad \forall \tau \in \mathbb{C}_-, \quad \|K_\tau\| \leq A \frac{(1 + |\tau|)^B}{|\operatorname{Im} \tau|^e}.$$

Alors K_τ définit un opérateur K de $E_{e'}$ dans $E_{e+e'}$ par

$$(2.18) \quad \widehat{Ku}(\tau, x) = K_\tau \hat{u}(\tau, x).$$

Proposition 2.2. Pour $u \in E_{e'}$ on a

$$\begin{aligned} (2.19) \quad T_0 Ku - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{t_-}^{t_+} dt \\ \times \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau e^{i\lambda\tau(w-t) - \lambda\tau^2} K_{\lambda\tau} T_0 u(t - i\tau, \cdot, \lambda) \in H_\varphi(W, L^2) \end{aligned}$$

avec $\varphi = \varphi_0 - \kappa^2/4$, $t_{\pm} = \pm 2\kappa$, $\tau_{\pm} = 1 \pm 2\kappa - i/\lambda$.

Preuve. D'après (2.8) et (2.12), on a

$$(2.20) \quad T_0 K u(w, x, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\text{Im } \tau = -a} d\tau \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\lambda\tau(w-t) - \lambda\tau^2/2} K_{\lambda\tau} e^{-\lambda\tau^2/2} T_0 u(t - i\tau, \cdot, \lambda);$$

l'intégrale étant normalement convergente dans L^2 d'après (2.10), (2.11), et (2.17). Choisissons $a = 1/\lambda$; d'après (2.10) et (2.11) les intégrales dans (2.20) calculées dans $|\text{Re } \tau - 1| \geq 2\kappa$ ou $t \leq -2\kappa$ appartiennent à $H_{\varphi_0 - \kappa^2/4}(W, L^2)$. Pour $t \geq 2\kappa$, il suffit alors de choisir comme contour de τ_- à τ_+

$$(2.21) \quad \begin{array}{c} 1 - 2\kappa \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad 1 + 2\kappa \\ \tau_- \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \tau_+ \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \frac{\kappa}{2} \end{array}$$

pour vérifier que la contribution à (2.20) de $\int_{2\kappa}^{\infty} \int_{\tau_-}^{\tau_+}$ appartient à $H_{\varphi_0 - \kappa^2/4}(W, L^2)$. $\square$

2.3. Système vérifié par les dérivées normales. Rappelons que v_+ , v_- sont L_{loc}^2 , à support dans $t \geq 0$ et $0 \leq x \leq ct$. Fixons $t_0 > 0$ petit et choisissons $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in C_0^\infty$, $\varphi_1(t) \equiv 1$ près de $t \leq t_0$, $\varphi_1(t) \equiv 0$ pour $t \geq 2t_0$, $\varphi_2(t) \equiv 1$ pour $t \leq t_0/2$, $\varphi_2(t) \equiv 0$ pour $t \geq t_0$ ainsi que $\psi(x) \in C_0^\infty$ avec $\psi(x) \equiv 1$ près de $|x| \leq 3ct_0$. D'après (2.7), on a l'identité

$$(2.22) \quad \varphi_2 \underline{u} = \varphi_2 u_i - \varphi_2 \square^{-1} (\varphi_1 v_+ \delta_+ + \varphi_1 v_- \delta_-).$$

Pour $\tau \in \mathbb{C}^-$, on définit les opérateurs $K_\tau^{1,+}$, $K_\tau^{2,+}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$(2.23) \quad K_\tau^{1,+}(f) = \psi[\partial_+(-\tau^2 - \Delta)^{-1}(1_{x \geq 0} f \psi \delta_+)],$$

$$(2.24) \quad K_\tau^{2,+}(f) = \psi[\partial_-(-\tau^2 - \Delta)^{-1}(1_{x \geq 0} f \psi \delta_+)],$$

où $(-\tau^2 - \Delta)^{-1}$ est l'o.p.d. de symbole $(\xi^2 + \eta^2 - \tau^2)$ sur $\mathbb{R}^2$. On remarquera que $(-\tau^2 - \Delta)^{-1}(1_{x \geq 0} f \psi \delta_+)$ est solution de l'opérateur $-\tau^2 - \Delta$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus F$, que $\tilde{\Delta}_\pm$ sont non caractéristiques pour Δ , de sorte que $K_\tau^{i,+}$ sont bien définis. On pose

$$(2.25) \quad \mu(x, x') = \frac{a(x) - a(x')}{x - x'}; \quad \nu(x, x') = \frac{b(x) - b(x')}{x - x'}.$$

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \xi_+ &= ((1 + \mu^2)\tau^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \text{Im } \xi_+ > 0; \\ \xi_- &= ((1 + \nu^2)\tau^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \text{Im } \xi_- > 0. \end{aligned}$$

Par un calcul standard dans la théorie des problèmes aux limites elliptiques on trouve

$$(2.27) \quad \begin{cases} K_{\tau}^{1,+}(f)(x) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i(x-x')\xi} \psi(x) \sigma^1(x, x', \tau, \xi) \\ \quad \times 1_{x' \geq 0} f(x') \psi(x') d\xi, \\ \sigma^1(x, x', \tau, \xi) = 1 + \frac{\mu - a'(x)}{1 + \mu^2} \left(\frac{\xi}{\xi_+} - \mu \right). \end{cases}$$

$$(2.28) \quad \begin{cases} K_{\tau}^{2,+}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4\pi} \int e^{i(x-x')\xi} e^{i\phi_{\varepsilon}(x, x', \tau, \xi)} \psi(x) \\ \quad \times \sigma^2(x, x', \tau, \xi) 1_{x' \geq 0} f(x') \psi(x') dx' d\xi, \\ \sigma^2(x, x', \tau, \xi) = \frac{1}{1 + \nu^2} \left[\frac{\xi}{\xi_-} (b'(x) - \nu) + 1 + \nu b'(x) \right], \\ \phi_{\varepsilon}(x, x', \tau, \xi) = [b(x') - a(x') - \varepsilon] \frac{\nu \xi - \xi_-}{1 + \nu^2}. \end{cases}$$

Lemme 2.3. Les opérateurs $K_{\tau}^{i,+}$ sont bornés sur L^2 et vérifient les estimations de (2.17) avec $e = 1$.

Preuve. Dans chacun des cas, on coupe l'intégrale en ξ en deux morceaux, I: $|\xi| \leq C_0(1 + |\tau|)$, II: $|\xi| \geq C_0(1 + |\tau|)$, où C_0 est grand.

Pour traiter I, on remarque qu'on a

$$|\xi| \leq C_0(1 + |\tau|) \Rightarrow \left| \frac{\xi}{\xi_+} \right| + \left| \frac{\xi}{\xi_-} \right| \leq Cte \frac{(1 + |\tau|)}{|\operatorname{Im} \tau|},$$

$$x' \geq 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \phi_{\varepsilon} \geq 0,$$

et on conclut par des estimations L^{∞} brutales.

Pour II on remarque qu'on a les estimations

$$\|\partial_x^k \partial_{x'}^{k'} \psi(x) \sigma^i \psi(x') 1_{|\xi| \geq C_0(1 + |\tau|)}\|_{L_{x, x', \xi, \tau}^{\infty}} \leq C_{k, k'}$$

et le cas $K_{\tau}^{1,+}$ résulte du lemme classique de continuité L^2 suivant.

Lemme 2.4. Si $q(x, x', \xi)$ est à support compact en x, x' et vérifie $\|\partial_x^k \partial_{x'}^{k'} q(x, x', \xi)\|_{L^{\infty}} \leq C_{k, k'}$, l'o.p.d. de symbole q est continu sur $L^2(\mathbb{R})$, et sa norme est estimée par les $C_{k, k'}$ pour $k \leq 2, k' \leq 2, (x \in \mathbb{R})$.

Pour le cas de $K_{\tau}^{2,+}$ on remarque qu'il existe $c_0 > 0$ et pour tout k, C_k tels que $x' \geq 0$ et $|\xi| \geq C_0(1 + |\tau|)$ entraîne $\operatorname{Im} \phi_{\varepsilon} \geq c_0(x' |\xi| + \varepsilon |\xi|)$, $|\partial_x^k \phi_{\varepsilon}| \leq C_k(x' + \varepsilon) |\xi|$ sur le support de $\psi(x')$. On a donc les estimées

$$\forall k, \exists C_k, \forall x' \geq 0,$$

$$\sup_{x, \tau} |\partial_x^k (e^{i\phi_{\varepsilon}} \psi(x) \sigma^2 \psi(x') 1_{|\xi| \geq C_0(1 + |\tau|)})| \leq C_k e^{-c_0(x' + \varepsilon) |\xi|/2},$$

et on conclut en utilisant le:

Lemme 2.5. Soit $q_\varepsilon(x, y, \xi)$ à support compact en (x, y) vérifiant

$$\forall k, \quad \exists C_k, \quad \forall y \geq 0, \quad \sup_x |\partial_x^k q_\varepsilon| \leq C_k e^{-c_0(y+\varepsilon)|\xi|/2}.$$

Alors l'opérateur $Q_\varepsilon f(x) = \int e^{i(x-y)\xi} q_\varepsilon(x, y, \xi) f(y) dy d\xi$ est borné de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R})$, et sa norme est estimée, uniformément en $\varepsilon > 0$, par $c_0, C_k, k \leq 2$.

Preuve. On a, pour un $\theta \in C_0^\infty$ et R grand

$$q_\varepsilon = \theta(x) \sum_n q_{\varepsilon, n}(y, \xi) e^{inx/R},$$

avec

$$|q_{\varepsilon, n}| \leq C \exp\left(-\frac{c_0}{2}|\xi|(\varepsilon + y)\right) \frac{1}{1+n^2} \leq C \exp\left(-\frac{c_0}{2}y|\xi|\right) \frac{1}{1+n^2},$$

la constante ne dépendant que de c_0, C_2 . Il suffit donc de vérifier que l'opérateur de $L^2(\mathbb{R}_+)$ dans $L^2(\mathbb{R}_\xi)$

$$f \mapsto \int_0^\infty \exp\left(-\frac{c_0}{2}y|\xi|\right) \cdot f(y) dy$$

est borné, ce qui résulte de l'inégalité de Hardy prouvée à la Proposition 1.1 et de la formule de Plancherel. Le Lemme 2.3 est alors démontré. $\square$

On définit de même les opérateurs $K_\tau^{i, -}$; avec les notations du §2.2, l'égalité (2.22) entraîne

$$(2.29) \quad \begin{cases} \psi \partial_+ \varphi_2 \underline{u} = \psi \partial_+ \varphi_2 u_i - \varphi_2 K^{1, +}(\varphi_1 v_+) - \varphi_2 K^{2, -}(\varphi_1 v_-), \\ \psi \partial_- \varphi_2 \underline{u} = \psi \partial_- \varphi_2 u_i - \varphi_2 K^{2, +}(\varphi_1 v_+) - \varphi_2 K^{1, -}(\varphi_1 v_-). \end{cases}$$

Comme $\varphi_1 v_\pm \in E_0$, il résulte du Lemme 2.3 que $\varphi_2 K^{1, +}(\varphi_1 v_+) \in E_1$. On a aussi $\psi \partial_\pm \varphi_2 u_i \in L^2$. Soit $\theta(x) \in C^\infty$, $\theta(x) = 0$ pour $x \leq 1$, $\theta(x) = 1$ pour $x \geq 2$. En multipliant (2.29) par $\theta(x/\varepsilon)$, et en faisant tendre ε vers 0 on obtient donc

$$(2.30) \quad \begin{cases} \psi \varphi_2 v_+ = h_+^0 - \varphi_2 1_{x \geq 0} K^{1, +}(\varphi_1 v_+) - \varphi_2 1_{x \geq 0} K^{2, -}(\varphi_1 v_-), \\ \psi \varphi_2 v_- = h_-^0 - \varphi_2 1_{x \geq 0} K^{2, +}(\varphi_1 v_+) - \varphi_2 1_{x \geq 0} K^{1, -}(\varphi_1 v_-), \end{cases}$$

avec

$$(2.31) \quad h_\pm^0 = 1_{x \geq 0} \psi \varphi_2 \partial_\pm u_i.$$

On pose à présent

$$(2.32) \quad \begin{cases} K^{1, \pm} = (-\frac{1}{2}\psi(x) \otimes \psi(x') - \frac{1}{2}Q^\pm) \circ 1_{x' \geq 0}, \\ 1_{x \geq 0} K^{2, +} = -\frac{1}{2}S^{-, +}, \quad 1_{x \geq 0} K^{2, -} = -\frac{1}{2}S^{+, -}, \end{cases}$$

et on introduit les inconnues

$$(2.33) \quad g_\pm = \psi \varphi_1 v_\pm = \varphi_1 v_\pm.$$

Alors (2.30) se réécrit sous la forme

$$(2.34) \quad \begin{cases} g_+ - 1_{x \geq 0} Q^+(g_+) - S^{+, -}(g_-) = 2h_+^0 + r_+, \\ g_- - S^{-, +}(g_+) - 1_{x \geq 0} Q^-(g_-) = 2h_-^0 + r_-, \end{cases}$$

$$(2.35) \quad \begin{cases} r_+ = (1 - \varphi_2)g_+ - (1 - \varphi_2)[1_{x \geq 0} Q^+(g_+) + S^{+, -}(g_-)], \\ r_- = (1 - \varphi_2)g_- - (1 - \varphi_2)[S^{-, +}(g_+) + 1_{x \geq 0} Q^-(g_-)], \end{cases}$$

d'où il résulte que $r_{\pm} \in E_1$, est à support compact en x , et à support dans $t \geq t_0$. De plus, les opérateurs $Q_{\tau}^{\pm}$, $S_{\tau}^{+, -}$, $S_{\tau}^{-, +}$ sont donnés par

$$(2.36) \quad \begin{aligned} & Q_{\tau}^{+}(f)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x-x')\xi} \left(\frac{\xi}{\xi_+} - \mu \right) \left(\frac{\mu - a'(x)}{1 + \mu^2} \right) \psi(x) \psi(x') f(x') dx' d\xi, \end{aligned}$$

$$(2.37) \quad \begin{aligned} & Q_{\tau}^{-}(f)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x-x')\xi} \left(\frac{\xi}{\xi_-} + \nu \right) \left(\frac{b'(x) - \nu}{1 + \nu^2} \right) \psi(x) \psi(x') f(x') dx' d\xi \end{aligned}$$

$$(2.38) \quad \begin{aligned} & S_{\tau}^{+, -}(f)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\psi_{+, -}(x, x', \xi, \tau)} \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) 1_{x \geq 0, x' \geq 0} \psi(x) \psi(x') f(x') dx' d\xi, \end{aligned}$$

$$(2.39) \quad \begin{aligned} & S_{\tau}^{-, +}(f)(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\psi_{-, +}(x, x', \xi, \tau)} \left(1 + b'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) 1_{x \geq 0, x' \geq 0} \psi(x) \psi(x') f(x') dx' d\xi, \end{aligned}$$

avec

$$(2.40) \quad \xi_0 = (\tau^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad \text{Im } \xi_0 > 0,$$

$$(2.41) \quad \psi_{+, -} = (x - x')\xi + (a(x) - b(x'))\xi_0,$$

$$(2.42) \quad \psi_{-, +} = (x - x')\xi + (a(x') - b(x))\xi_0.$$

En effet (2.36) et (2.37) résultent directement de la définition (2.32) de $Q^{\pm}$, de (2.27), et du calcul analogue de Q^{-} . Pour prouver l'identité (2.39) il suffit de vérifier que:

(i) pour $\tau \in \mathbb{C}^{-}$, l'opérateur défini par (2.39) est borné sur $L^2(\mathbb{R})$, et vérifie l'estimation (2.17) avec $e = 1$.

(ii) L'opérateur défini par (2.39) coïncide avec $S_{\tau}^{-, +}$ sur les $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$.

Or (ii) résulte d'un calcul direct à partir des définitions (2.24) et (2.32) des opérateurs. Pour (i), on coupe à nouveau l'intégrale en ξ en deux morceaux, I: $|\xi| \leq C_0(1 + |\tau|)$, II: $|\xi| \geq C_0(1 + |\tau|)$ avec C_0 grand.

Pour I, on remarque que $x \geq 0$ et $x' \geq 0$ entraîne $\operatorname{Im} \psi_{+,-} \geq 0$ et

$$|\xi| \leq C_0(1 + |\tau|) \Rightarrow \frac{|\xi|}{|\xi_0|} \leq \operatorname{Cte} \frac{1 + |\tau|}{|\operatorname{Im} \tau|}.$$

Pour II, on remarque qu'il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |\xi| &\geq C_0(1 + |\tau|) \\ \Rightarrow \left| e^{i\psi_{+,-}} \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \psi(x) \psi(x') 1_{x \geq 0, x' \geq 0} \right| &\leq e^{-c_0(x+x')|\xi|}, \end{aligned}$$

et l'opérateur

$$\int_0^\infty dy \int d\xi e^{-c_0(x+y)|\xi|} f(y) = \frac{2}{c_0} \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dy$$

est borné sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

L'identité (2.38) se prouve de manière analogue.

Terminons cette section en décrivant les coordonnées sur les cotangents aux courbes

$$\tilde{\Delta}_+ = \{(t, x, a(x)), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\tilde{\Delta}_- = \{(t, x, b(x)), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}.$$

Le choix des coordonnées (t, x) sur ces courbes donne lieu à la description suivante des applications canoniques $j_\pm: T^*\mathbb{R}^3|_{\tilde{\Delta}_\pm} \rightarrow T^*\tilde{\Delta}_\pm$,

$$\begin{aligned} j_+(t, x, a(x), \tau, \xi, \eta) &= (t, x, \tau, \xi + a'(x)\eta), \\ j_-(t, x, b(x), \tau, \xi, \eta) &= (t, x, \tau, \xi + b'(x)\eta). \end{aligned}$$

Rappelons (voir [H]) que les zones glancing $\mathcal{G}$, hyperboliques $\mathcal{H}$ et elliptiques $\mathcal{E}$ pour $p = \tau^2 - \xi^2 - \eta^2$ sur $T^*\tilde{\Delta}_\pm$ sont données par les conditions suivantes sur le système $S_\rho^\pm: p(\tilde{\rho}) = 0$, $j_\pm(\tilde{\rho}) = \rho$;

$$\begin{aligned} \rho \in \mathcal{G}^\pm &\Leftrightarrow S_\rho^\pm \text{ a une solution double,} \\ \rho \in \mathcal{H}^\pm &\Leftrightarrow S_\rho^\pm \text{ a deux solutions distinctes,} \\ \rho \in \mathcal{E}^\pm &\Leftrightarrow S_\rho^\pm \text{ n'a pas de solution.} \end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées sur $T^*\tilde{\Delta}_+$ héritées de (t, x) , on en déduit que $(t, x, \tau, \xi) \in \mathcal{G}^+$ (resp. $\mathcal{H}^+$, $\mathcal{E}^+$) si et seulement si la quantité $\xi^2 - (1 + a'(x)^2)\tau^2$ est nulle (resp. négative, positive). On a une description analogue sur $T^*\tilde{\Delta}_-$, en changeant a en b .

Compte tenu de la formule (2.7) et du théorème de propagation des singularités pour $\square$, il suffit de décrire $v_\pm$ microlocalement près de $t = 0$, $x = 0$,

$\tau \neq 0$, $\xi \neq \frac{-\tau}{\cos \gamma_{\pm}}$ pour décrire u sur l'ouvert $\Omega^{\varepsilon} \cap \{0 < t < \varepsilon_1\}$ pour $\varepsilon_1 > 0$ assez petit. Tel est le but des sections suivantes.

3. RÉDUCTION DEUX-MICROLOCALE

3.1. Opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe pour les problèmes aux limites. On note I l'intervalle $[0, t_0]$, où $t_0 > 0$, U un ouvert de $T^*\mathbb{C}^d$, et K un compact $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Definition 3.1. Pour $m \in \mathbb{Z}$, on note $A^m(I, U, K)$ l'espace des séries formelles

$$(3.1) \quad e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(i\lambda)^n} e_n$$

pour lesquelles il existe V voisinage complexe de I , et $A, B > 0$ tels que pour tout n , la fonction $e_n(t, \tau, z, \zeta, \lambda)$ soit définie pour $\lambda \geq 1$, holomorphe en $t \in V$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus K$, $(z, \zeta) \in U$ et vérifie

$$(3.2) \quad |e_n(t, \tau, z, \zeta, \lambda)| \leq AB^n n! (1 + |\tau|)^m.$$

Pour $e \in A^m(I, U, K)$ les e_n sont méromorphes en τ à l'infini, et, si $m_+ = \sup(m, 0)$, on a une décomposition unique

$$(3.3) \quad e_n(t, \tau, z, \zeta, \lambda) = \sum_{j=0}^{m_+} e_n^j(t, z, \zeta, \lambda) \tau^j + e_n^-(t, \tau, z, \zeta, \lambda),$$

où $e^- \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} (i\lambda)^{-n} e_n^- \in A^{-1}(I, U, K)$ et où $e^j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} (i\lambda)^{-n} e_n^j \in A^0(I, U, K)$ est indépendant de τ .

Pour $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) \in \mathbb{C}^d$, on posera $\|\zeta\| = \sup_{1 \leq j \leq d} |\zeta_j|$ et, pour $\zeta_0 \in \mathbb{C}^d$, $R > 0$,

$$(3.4) \quad B(\zeta_0, R) = \{\zeta \in \mathbb{C}^d, \|\zeta - \zeta_0\| < R\}.$$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^d$, $\zeta_0 \in \mathbb{C}^d$, et $R_0 > 0$ tels que $\Omega \times B(\zeta_0, R_0) \subset U$. Pour $e \in A^m(I, U, K)$, on a, par les inégalités de Cauchy,

$$(3.5) \quad |\partial_{\zeta}^{\alpha} e_n(t, \tau, z, \zeta_0, \lambda)| \leq A \frac{\alpha!}{R_0^{|\alpha|}} B^n n! (1 + |\tau|)^m$$

et on pose

$$(3.6) \quad k(e, \zeta_0; n, \alpha)(t, s, z, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-s)\tau} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\zeta}^{\alpha} e_n(t, \tau, z, \zeta_0, \lambda) d\tau,$$

où l'intégrale est oscillante. Si on pose $K_{\pm} = K \cap \{\pm \text{Im } \tau > 0\}$ et

$$(3.7) \quad k^{\pm}(e, \zeta_0; n, \alpha)(t, s, z, \lambda) = k(e, \zeta_0; n, \alpha)(t, s, z, \lambda)|_{\pm(t-s) > 0},$$

alors $k^{\pm}$ est C^{∞} dans $\pm(t-s) \geq 0$, holomorphe en $z \in \Omega$, et vérifie

$$\forall \beta, \quad \exists C_{\beta}, \quad \forall (t, s) \in I^2, \quad \pm(t-s) \geq 0, \quad \forall z \in \Omega, \quad \forall \lambda \geq 1,$$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & |\partial_{s,t}^\beta k^\pm(e, \zeta_0; n, \alpha)(t, s, z, \lambda)| \\ & \leq C_\beta \lambda^{|\beta|+1} B^n R_0^{-|\alpha|} n! e^{-(\lambda/2)|t-s| \text{dist}(K_\pm, \mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et le noyau k est donné par

$$(3.9) \quad \begin{aligned} k(e, \zeta_0; n, \alpha) &= 1_{t \geq s} k^+(e, \zeta_0; n, \alpha) + 1_{t \leq s} k^-(e, \zeta_0; n, \alpha) \\ &+ \sum_{n=0}^{m_+} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha e_n^j(t, z, \zeta_0, \lambda) (i\lambda)^{-j} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^j (\delta_{t=s}). \end{aligned}$$

Définition 3.2. Soit $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. On désigne par $C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$ l'espace des fonctions $u(t, z, \lambda)$ définies pour $\lambda \geq 1$, holomorphes en $z \in \Omega$, C^∞ en $t \in I$, telles que

$$(3.10) \quad \exists M, \quad \forall l, \quad \exists C_l, \quad \forall(t, z, \lambda), \quad |\partial_t^l u(t, z, \lambda)| \leq C_l \lambda^{M+l} e^{\lambda \varphi(z)}.$$

On identifie $\mathbb{C}^d$ à l'espace des formes $\mathbb{R}$ —linéaires de $\mathbb{C}^d$ dans $\mathbb{R}$ par $\zeta \mapsto (w \mapsto -\text{Im}(\zeta \cdot w))$. On a en particulier

$$(3.11) \quad d\varphi(z)(w) = -\text{Im} \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) \cdot w \right).$$

Définition 3.3. Soient $e \in A^m(I, U, K)$, avec $\Omega \times B(\zeta_0, R_0) \subset U$, et C_1, C_2 deux constantes positives. Pour $u \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$, on pose, pour $t \in I$, $z \in \Omega$, $\lambda \geq 1$,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & \text{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2)(u)(t, z, \lambda) \\ &= \sum_{n \leq \lambda/C_1} \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} (i\lambda)^{-n} \int_0^{t_0} k(e, \zeta_0; n, \alpha)(t, s, z, \lambda) u_\alpha^{\zeta_0}(s, z, \lambda) ds, \end{aligned}$$

où

$$(3.12)' \quad \begin{aligned} u_\alpha^{\zeta_0}(s, z, \lambda) &= \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z - \zeta_0 \right)^\alpha u(s, z, \lambda) = e^{i\lambda z \zeta_0} \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\alpha (e^{-i\lambda z \zeta_0} u(s, z, \lambda)), \\ \int_0^{t_0} k(t, s) v(s) ds &= \int_0^t k^+(t, s) v(s) ds + \int_t^{t_0} k^-(t, s) v(s) ds \\ &+ \sum_{n=0}^{m_+} (i\lambda)^{-j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha e_n^j(t) \partial_t^j v(t). \end{aligned}$$

On remarquera que l'opérateur $\text{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2)$ est différentiel en z et que $\text{Op}(1) = \text{Id}$.

Lemme 3.1. Soit $D > 0$ tel que

$$\sup_{z \in \Omega} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) - \zeta_0 \right\| < D.$$

On suppose qu'on a $D < R_0$. Soient $\Omega' \Subset \Omega$, et $C_0 = (D \operatorname{dist}(\overline{\Omega}', \Omega^c))^{-1}$ (où $\operatorname{dist}(a, b) = \|a - b\|$). Pour $C_1 \geq 2B/e$, $C_2 \geq C_0$, $u \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$, on a

$$(3.13) \quad \operatorname{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2)(u) \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega')).$$

De plus, si $C_1, C'_1 \geq 2B/e$, $C_2, C'_2 \geq C_0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(3.14) \quad \operatorname{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2)(u) - \operatorname{Op}(e)(\zeta_0, C'_1, C'_2)(u) \in C^\infty(I, H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega'))$$

pour tout $u \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$.

Démonstration. D'après le choix de C_0 , si $z \in \Omega'$ et $\|w - z\| \leq (DC_0)^{-1}$ on a $w \in \Omega$. Pour $|\alpha| \leq \lambda/C_0$ posons $\rho_{\alpha_j} = \alpha_j(\lambda D)^{-1}$. Alors, si $z \in \Omega'$ et $|w_j - z_j| \leq \rho_{\alpha_j}$, on a $w \in \Omega$. En appliquant les inégalités de Cauchy à la fonction $ue^{-i\lambda z \zeta_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in \Omega'} |u_\alpha^{\zeta_0}(s, z, \lambda) e^{-\lambda \varphi(z)}| \\ & \leq \frac{\alpha! \lambda^{-|\alpha|}}{\prod_{j=1}^d \rho_{\alpha_j}^{\alpha_j}} \sup_{w \in \Omega} |u(s, w, \lambda) e^{-\lambda \varphi(w)}| \sup_{|w_j - z_j| = \rho_{\alpha_j}} |e^{\lambda(\varphi(w) - \varphi(z) + i(z-w)\zeta_0)}|. \end{aligned}$$

Or

$$\operatorname{Re}(\varphi(w) - \varphi(z) + i(z-w)\zeta_0)$$

$$= -\operatorname{Im} \left(\int_0^1 \left(\frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z + \theta(w-z)) - \zeta_0 \right) d\theta \cdot (w-z) \right) \leq \frac{|\alpha|}{\lambda}.$$

En utilisant la formule de Stirling, on en déduit l'estimation suivante:

$$\begin{aligned} & \forall l, \quad \exists C_l, \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq \lambda/C_0, \quad \forall s \in I, \\ (3.15) \quad & \sup_{z \in \Omega'} |\partial_s^l u_\alpha^{\zeta_0}(s, z, \lambda) e^{-\lambda \varphi(z)}| \leq C_l \lambda^{M+l} \alpha! \lambda^{-|\alpha|} e^{|\alpha|} \prod_{j=1}^d \rho_{\alpha_j}^{-\alpha_j} \\ & \leq C'_l \lambda^{M+l} D^{|\alpha|} \prod_{j=1}^d (\alpha_j + 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors de (3.5), (3.8), (3.15), puisque

$$\sum_{n \leq \lambda/C_1} \lambda^{-n} B^n n! \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} \left(\frac{D}{R_0} \right)^{|\alpha|} \leq \operatorname{Cte} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{B}{eC_1} \right)^n \sqrt{n+1} < +\infty,$$

et, si $\gamma < 1$,

$$\sum_{\lambda/C' \leq n \leq \lambda/C} \gamma^n \leq \operatorname{Cte} e^{-\lambda |ln \gamma|/2C'}.$$

Lemme 3.2. On conserve les notations du Lemme 3.1, et on se donne un autre triplet ζ'_0, R'_0, D' tel que

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \Omega \times B(\zeta'_0, R'_0) \subset U, \\ & \sup_{z \in \Omega} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) - \zeta'_0 \right\| < D' < R'_0. \end{aligned}$$

Soit $C'_0 = (D' \operatorname{dist}(\overline{\Omega}', \Omega^c))^{-1}$; alors pour tous $C_1 \geq 2B/e$, $C'_1 \geq 2B/e$, $C_2 \geq C_0$, $C'_2 \geq C'_0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\operatorname{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2)(u) - \operatorname{Op}(e)(\zeta'_0, C'_1, C'_2)(u) \in C^\infty(I, H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega'))$$

pour tout $u \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$.

Démonstration. Il suffit de prouver que, pour tout $z_0 \in \overline{\Omega}'$, il existe $r > 0$ tel que

$$\operatorname{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2)(u) - \operatorname{Op}(e)(\zeta'_0, C'_1, C'_2)(u) \in C^\infty(I, H_{\varphi-\varepsilon}(B(z_0, r))).$$

Posons $\zeta''_0 = 2\partial_z \varphi(z_0)/i$ et soit R''_0 tel que $B(\zeta''_0, 2R''_0) \subset B(\zeta_0, R_0) \cap B(\zeta'_0, R'_0)$. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(z_0, 2r) \times B(\zeta''_0, R''_0) \subset U$ et

$$\sup_{z \in B(z_0, 2r)} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) - \zeta''_0 \right\| < D'' < R''_0.$$

D'après le Lemme 3.1 on peut, en augmentant C_2 et C'_2 , remplacer Ω par $B(z_0, 2r)$, Ω' par $B(z_0, r)$, et supposer que

$$C_2 = C'_2 > \max((Dr)^{-1}, (D'r)^{-1}, (D''r)^{-1}).$$

On peut alors aussi remplacer ζ'_0 par ζ''_0 . Posons

$$(3.17) \quad I_n = \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} \int_0^{t_0} k(e, \zeta_0; n, \alpha) u_{\alpha}^{\zeta_0} - k(e, \zeta''_0; n, \alpha) u_{\alpha}^{\zeta''_0} ds.$$

En utilisant la décomposition (3.9) du noyau k , on a

$$(3.18) \quad I_n = I_n^+ + I_n^- + \sum_{j=0}^{m_+} I_n^j.$$

Si $\gamma_+ \subset \{\operatorname{Im} \tau > 0\}$ entoure K_+ une fois dans le sens positif, on a

$$(3.19) \quad I_n^+ = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t ds \int_{\gamma_+} d\tau \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} e^{i\lambda\tau(t-s)} \frac{1}{\alpha!} \\ \times (\partial_\zeta^\alpha e_n(\zeta_0)(\partial_z/i\lambda - \zeta_0)^\alpha u - \partial_\zeta^\alpha e_n(\zeta''_0)(\partial_z/i\lambda - \zeta''_0)^\alpha u).$$

Or

$$(\partial_z/i\lambda - \zeta_0)^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \alpha_2!} (\zeta''_0 - \zeta_0)^{\alpha_2} (\partial_z/i\lambda - \zeta''_0)^{\alpha_1}, \\ \partial_\zeta^{\alpha_1} e_n(\zeta''_0) = \sum_{\alpha_2} \frac{1}{\alpha_2!} \partial_\zeta^{\alpha_1 + \alpha_2} e_n(\zeta_0) (\zeta''_0 - \zeta_0)^{\alpha_2}.$$

Soit $\gamma = \|\zeta''_0 - \zeta_0\|/R_0 < 1$. On a, pour tout $z \in B(z_0, r)$,

$$(3.20) \quad I_n^+ = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t ds \int_{\gamma_+} d\tau e^{i\lambda\tau(t-s)} \sum_E \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} \partial_\zeta^{\alpha_1 + \alpha_2} e_n(\zeta_0) (\zeta''_0 - \zeta_0)^{\alpha_2} u_{\alpha_1}^{\zeta''_0},$$

où $E = \{(\alpha_1, \alpha_2), |\alpha_1| \leq \lambda/C_2, |\alpha_1 + \alpha_2| > \lambda/C_2\}$. Alors, d'après (3.5), (3.15) et (3.20),

$$(3.21) \quad \begin{aligned} & \forall l, \quad \exists C_l, \quad |\partial_t^l I_n^+(t, z, \lambda)| e^{-\lambda\varphi(z)} \\ & \leq C_l \lambda^{M+l} B^n n! \sum_E \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \frac{(\gamma R_0)^{|\alpha_2|}}{R_0^{|\alpha_1 + \alpha_2|}} D''^{|\alpha_1|} \prod_{j=1}^d (\alpha_{1,j} + 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme $D'' < R_0''$, en traitant de même I_n^- et I_n^j , on obtient

$$(3.22) \quad \begin{aligned} & \forall l, \quad \exists C_l, \quad |\partial_t^l I_n(t, z, \lambda)| e^{-\lambda\varphi(z)} \\ & \leq C_l \lambda^{M+l} B^n n! \sum_E \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \gamma^{|\alpha_2|} \left(\frac{R_0''}{R_0} \right)^{|\alpha_1|}. \end{aligned}$$

Or on a

$$(3.23) \quad \sum_{\alpha_2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \gamma^{|\alpha_2|} = \frac{1}{(1 - \gamma)^{d+|\alpha_1|}}$$

et $R_0''/R_0(1 - \gamma) < 1$. Par suite, dans (3.22), la somme restreinte à $|\alpha_1| \geq \lambda/2C_2$ est dominée par $e^{-\varepsilon\lambda}$. Pour le terme restant, on a $|\alpha_2| \geq \lambda/2C_2$ et le Lemme 3.2 résulte alors de l'inégalité

$$(3.24) \quad \sum_{|\alpha| \geq a} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \gamma^{|\alpha_2|} \leq C_\theta \frac{1}{\theta^{|\alpha_1|}} e^{-(a/2)\log((1-\theta)/\gamma)}$$

avec $\gamma < 1 - \theta$; pour conclure, il suffit de choisir $\theta > R_0''/R_0$.

On s'intéresse à présent aux propriétés de composition des opérateurs, en se restreignant au cas qui va nous intéresser par la suite.

Soient $e \in A^{-2}(I, U, K)$ et $q \in A^0(I, U, K)$ tel que q soit indépendant de τ . On définit comme d'habitude le symbole composé $g = e \circ q$ par

$$(3.25) \quad \begin{aligned} & g_n(t, \tau, z, \zeta, \lambda) \\ & = \sum_{n' + n'' + |\alpha| + l = n} \frac{1}{l! \alpha!} \partial_\tau^l \partial_\zeta^\alpha e_{n'}(t, \tau, z, \zeta, \lambda) \partial_t^l \partial_z^\alpha q_{n''}(t, z, \zeta, \lambda). \end{aligned}$$

Si K_1 est un voisinage compact de K dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et si $U_1 \Subset U$, on a $e, g \in A^{-2}(I, U_1, K_1)$ et $q \in A^0(I, U_1, K_1)$. Soient Ω, ζ_0, R_0, D tels que $\Omega \times B(\zeta_0, R_0) \subset U_1$ et

$$\sup_{z \in \Omega} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) - \zeta_0 \right\| < D < R_0.$$

Lemme 3.3. Soit $\Omega' \Subset \Omega$. Il existe C_1^0, C_2^0 et, pour tous $C_1 \geq C_1^0, C_2 \geq C_2^0$, un $\varepsilon > 0$, tels que, pour tout $u \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$,

$$(3.26) \quad \begin{aligned} & (\text{Op}(e \circ q)(\zeta_0, C_1, C_2) \\ & - \text{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2) \text{Op}(q)(\zeta_0, C_1, C_2)) u \in C^\infty(I, H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega')). \end{aligned}$$

Démonstration. En changeant u en $ue^{-i\lambda z \cdot \zeta_0}$ et φ en $\varphi + \text{Im}(z \cdot \zeta_0)$, on peut supposer $\zeta_0 = 0$. On pose

$$(3.27) \quad e_n^\alpha(t, \tau, z, \lambda) = \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha e_n(t, \tau, z, 0, \lambda),$$

$$(3.28) \quad q_{n,l,\alpha}^\beta(t, z, \lambda) = \frac{1}{l! \beta! \alpha!} \partial_t^l \partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta q_n(t, z, 0, \lambda),$$

$$(3.29) \quad g_n^\gamma(t, \tau, z, \lambda) = \frac{1}{\gamma!} \partial_\zeta^\gamma g_n(t, \tau, z, 0, \lambda),$$

$$(3.30) \quad u_\gamma(t, z, \lambda) = \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z \right)^\gamma u(t, z, \lambda).$$

Il existe alors des constantes A, B telles que pour tous $t \in I$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus K_1$, $z \in \Omega$, on ait

$$(3.31) \quad |\partial_t^l e_n^\alpha| \leq AB^{n+l} n! l! \frac{1}{R_0^{|\alpha|}} (1 + |\tau|)^{-2},$$

$$(3.32) \quad |q_{n,l,\alpha}^\beta| \leq AB^{n+l+|\alpha|} n! \frac{1}{R_0^{|\beta|}},$$

$$(3.33) \quad |g_n^\gamma| \leq AB^n n! \frac{1}{R_0^{|\gamma|}} (1 + |\tau|)^{-2}.$$

De plus, d'après (3.15), pour $z \in \overline{\Omega}'$, $|\gamma| \leq \lambda/C_0$,

$$(3.34) \quad \forall l, \quad \exists C'_l, \quad |\partial_t^l u_\gamma e^{-\lambda \varphi(z)}| \leq C'_l \lambda^{M+l} \tilde{D}^{|\gamma|},$$

pour $D < \tilde{D} < R_0$. Soient $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\psi(r) = 1$ pour $|r| \leq 1/2$, $\psi(r) = 0$ pour $|r| \geq 1$, $\varepsilon_0 > 0$. Pour $\tilde{e} \in A^{-2}$, on définit $\text{Op}_\psi(\tilde{e})$ par (3.12) en remplaçant $k(t, s)$ par $\psi((t-s)/\varepsilon_0)k(t, s)$. D'après (3.8), on a

$$(3.35) \quad \text{Op}(\tilde{e})(0, C_1, C_2)v - \text{Op}_\psi(\tilde{e})(0, C_1, C_2)v \in C^\infty(I, H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega'))$$

dès que $v \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega''))$, $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$, pourvu que C_1, C_2 soient assez grands. Pour prouver (3.26), on peut donc remplacer $\text{Op}(e \circ q)$ et $\text{Op}(e)$ par $\text{Op}_\psi(e \circ q)$ et $\text{Op}_\psi(e)$. On a, par définition,

$$(3.36) \quad \text{Op}_\psi(e) \text{Op}(q)u(t, z, \lambda) = J,$$

$$J = \sum_E (i\lambda)^{-n'-n''} \int_0^{t_0} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon_0}\right) k(e, 0; n', \alpha)(t, s) [q_{n'',0,0}^\beta u_\beta]_\alpha(s) ds,$$

où $E = \{n' \leq \lambda/C_1, n'' \leq \lambda/C_1, |\alpha| \leq \lambda/C_2, |\beta| \leq \lambda/C_2\}$. En choisissant ε_0 assez petit, on a alors

$$J = \int_0^{t_0} \sum_{E'} \mathcal{J}(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l),$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{J}(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l) \\
 (3.37) \quad &= (i\lambda)^{-n'-n''-|\alpha_1|} \psi\left(\frac{t-s}{\varepsilon_0}\right) (s-t)^l k(e, 0; n', \alpha_1 + \alpha_2)(t, s) \\
 & \times \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_2!} q_{n'', l, \alpha_1}^\beta(t) u_{\beta + \alpha_2}(s),
 \end{aligned}$$

$$E' = \{(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l), (n', n'', \alpha_1 + \alpha_2, \beta) \in E, l \geq 0\}.$$

Si $\mathcal{J} = \mathcal{J}^+ + \mathcal{J}^-$ est la décomposition associée à celle de k , on a

$$\begin{aligned}
 & |\partial_{s,t}^{l_0} \mathcal{J}^\pm(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l) e^{-\lambda\varphi(z)}| \\
 (3.38) \quad & \leq C_{l_0} \lambda^{M+l_0} \left(\frac{Bn'}{\lambda}\right)^{n'} \left(\frac{Bn''}{\lambda}\right)^{n''} (\varepsilon_0 B)^l \\
 & \times \alpha_1! \left(\frac{B}{\lambda R_0}\right)^{|\alpha_1|} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \left(\frac{\tilde{D}}{R_0}\right)^{|\beta| + |\alpha_2|}.
 \end{aligned}$$

Or, pour tout $\eta > 0$, il existe A_η, F_η tels que

$$(3.39) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2, \quad \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)!}{\alpha_1! \alpha_2!} \leq A_\eta F_\eta^{|\alpha_1|} (1 + \eta)^{|\alpha_2|}.$$

En choisissant η tel que $(1 + \eta)\tilde{D} < R_0$, il existe alors $\theta < 1$ tel que pour tout l_0 , il existe C_{l_0} vérifiant

$$(3.40) \quad |\partial_{s,t}^{l_0} \mathcal{J}^\pm(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l) e^{-\lambda\varphi(z)}| \leq C_{l_0} \lambda^{M+l_0} \theta^{n'+n''+l+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\beta|}$$

dès que $n', n'', |\alpha_1|, |\alpha_2|, |\beta| \leq \lambda/C$, C assez grand, et pour tout l , en choisissant $\varepsilon_0 B \leq \theta$. On peut donc, dans l'expression (3.37) de J , se restreindre à la somme sur

$$(3.41) \quad E'' = \{(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l), n' + n'' + |\alpha_1| + l \leq \lambda/C_1, |\beta + \alpha_2| \leq \lambda/C_2\},$$

avec C_1 et C_2 assez grands.

Si $\tilde{J} = \int_0^{t_0} \sum_{E''} \mathcal{J}(n', n'', \alpha_1, \alpha_2, \beta, l)$, on a alors $J - \tilde{J} \in C^\infty(I, H_{\varphi-\varepsilon}(\Omega'))$ où $\varepsilon > 0$ est indépendant de u . Or

$$(3.42) \quad (s-t)^l k(e, 0; n', \alpha_1 + \alpha_2) = (i\lambda)^{-l} k(\partial_\tau^l e, 0; n', \alpha_1 + \alpha_2),$$

ce qui conduit à

$$(3.43) \quad \tilde{J} = \text{Op}_\psi(e \circ q)(0, C_1, C_2)u,$$

d'où le lemme.

Soient $e \in A^{-2}(I, U, K)$, Ω, ζ_0, R_0 tels que $\Omega \times B(\zeta_0, R_0) \subset U$. On a $\tau^2 e \in A^0(I, U, K)$. Posons alors

$$(3.44) \quad (\tau^2 e_n)^0(t, z, \zeta, \lambda) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^2 e_n(t, \tau, z, \zeta, \lambda),$$

$$(3.45) \quad K^\pm(t, s)(\zeta_0, C_1, C_2) = \sum_{n \leq \lambda/C_1} \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} (i\lambda)^{-n} k^\pm(e, \zeta_0; n, \alpha)(t, s) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z - \zeta_0 \right)^\alpha.$$

On notera que

$$(3.46) \quad K^+(t, t) - K^-(t, t) \equiv 0,$$

$$(3.47) \quad \frac{1}{\lambda^2} (\partial_s K^+(t, t) - \partial_s K^-(t, t)) = \sum_{n \leq \lambda/C_1} \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} (i\lambda)^{-n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\zeta^\alpha (\tau^2 e_n)^0(t, z, \zeta_0, \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_z - \zeta_0 \right)^\alpha.$$

Par intégration par parties, on a alors le:

Lemme 3.4. Pour $u \in C^\infty(I, H_\varphi(\Omega))$ on a

$$(3.48) \quad \begin{aligned} & \text{Op}(e)(\zeta_0, C_1, C_2) \left[\left(\frac{1}{i\lambda} \partial_t \right)^2 u \right] \\ &= \text{Op}(\tau^2 e)(\zeta_0, C_1, C_2)(u) \\ &+ \frac{1}{\lambda^2} [K^+(t, 0) \partial_t u(0) - \partial_s K^+(t, 0) u(0) \\ &- K^-(t, t_0) \partial_t u(t_0) + \partial_s K^-(t, t_0) u(t_0)]. \end{aligned}$$

Remarque 3.1. Soient $\varphi = \varphi(x)$ une fonction réelle de classe C^2 près de $x_0 \in \mathbb{C}^d$ et

$$Pu(x, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^d \iint_{\Sigma_0} e^{i\lambda(x-y)\xi} p(x, \xi, \lambda) u(y, \lambda) dy \wedge d\xi$$

un opérateur pseudo-différentiel analytique au sens de Sjöstrand [S2], où p est un symbole analytique défini près de x_0 , $\xi_0 = 2\partial_x \varphi(x_0)/i$ et où Σ_0 est un bon contour de la forme

$$y = x_0 + z, \quad \xi = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0) - iC_0 \bar{z}, \quad |z| \leq r,$$

avec r assez petit et C_0 assez grand. Alors, si on pose

$$\text{Op}(p)(\xi_0, C)(u) = \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p(x, \xi_0, \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_x - \xi_0 \right)^\alpha u,$$

on vérifie aisément que, si Ω est un voisinage de x_0 et $u \in H_\varphi(\Omega)$, il existe $\omega \Subset \Omega$ voisinage de x_0 et $C_1 > 0$ tels que $Pu \in H_\varphi(\omega)$, $\text{Op}(p)(\xi_0, C)(u) \in H_\varphi(\omega)$ pour $C \geq C_1$, et $Pu - \text{Op}(p)u \in H_{\varphi-\varepsilon}(\omega)$, où ε dépend de C , mais pas de u . Il n'y a donc pas de différence essentielle entre la présentation des opérateurs pseudo-différentiels analytiques donnée ici et celle de Sjöstrand [S2].

3.2. Régularité deux-microlocale pour le problème de Dirichlet. Soit $M = \{(x, t); x \in \mathbb{R}^n, |x| < a, 0 \leq t < 1\}$, que l'on considère comme une variété analytique à bord $\partial M = M \cap \{t = 0\}$, et soit $P = D_t^2 + R(t, x, D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients analytiques sur M , à symbole principal $p = \tau^2 + r(t, x, \xi)$ réel. On pose $T^*M = T^*\partial M \cup T^*\overset{\circ}{M}$, muni de la topologie naturelle. On pose $r_0(x, \xi) = r(0, x, \xi)$, et on suppose que $\partial r_0 / \partial \xi(x, \xi) \neq 0$ pour $\xi \neq 0$. Les régions elliptique $\mathcal{E}$, glancing $\mathcal{G}$, et hyperbolique $\mathcal{H}$ de $T^*\partial M \setminus \partial M = \dot{T}^*\partial M$ sont définies respectivement par $r_0 > 0$, $r_0 = 0$, et $r_0 < 0$.

Soient $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in \dot{T}^*\partial M$ et s une fonction analytique réelle définie près de ρ_0 , homogène en ξ , et vérifiant

$$(3.49) \quad s(\rho_0) = 0; \quad ds(\rho_0) \wedge \xi_0 dx \neq 0; \quad \{r_0, s\}(\rho_0) \neq 0.$$

On note $V = s^{-1}(0)$. C'est une variété involutive régulière de codimension 1 dans $\dot{T}^*\partial M$, transverse en ρ_0 au champ hamiltonien H_{r_0} .

Si $f \in \mathcal{D}'(\partial M)$, on notera $SS_V^{2,1}(f)$ le deuxième micro-support analytique à croissance de f le long de V . (Cf. [L1].) C'est un fermé conique du fibré normal $T_V(\dot{T}^*\partial M)$ à V dans $\dot{T}^*\partial M$, orienté ici de sorte que $(\rho_0, \pm 1) \notin SS_V^{2,1}(f)$ entraîne $SS(f) \cap \{\pm s > 0\} = \emptyset$ au voisinage de ρ_0 .

Soit $f = f(t, x)$ une distribution prolongeable sur $\overset{\circ}{M}$ vérifiant

$$(3.50) \quad Pf = 0 \quad \text{dans } \overset{\circ}{M}.$$

Définition 3.4. On dit que f est V -sortante en ρ_0 si et seulement si

(i) Si $\rho_0 \in \mathcal{E}$, pas de condition.

(ii) Si $\rho_0 \in \mathcal{H}$ et si $\gamma_{\pm}$ sont les deux demi-bicaractéristiques de p passant au-dessus de ρ_0 et contenues dans $T^*\overset{\circ}{M}$, on a $\gamma_+ \cap SS(f) = \emptyset$ ou $\gamma_- \cap SS(f) = \emptyset$.

(iii) Si $\rho_0 \in \mathcal{G}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $0 \leq t \leq \varepsilon$, $|\rho - \rho_0| \leq \varepsilon$, et $s(\rho) < 0$ entraînent, pour tout τ , $(\rho, t, \tau) \notin SS_b(f)$, où SS_b désigne le front d'onde analytique au bord (cf. [S1]).

Remarque 3.2. L'opérateur P étant à caractéristiques simples réelles, on peut en utilisant le théorème de propagation des singularités à l'intérieur, remplacer (iii) par

(iii)' Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\rho - \rho_0| \leq \varepsilon$, $s(\rho) < 0$, et $0 \leq t \leq C$ dist $(\rho, s^{-1}(0))$ entraînent, pour tout τ , $(\rho, t, \tau) \notin SS_b(f)$ (avec $C > 0$ donné). Cette dernière condition est invariante par changement de coordonnées.

Remarque 3.3. On notera que, si f est V -sortante en un point $\rho_0 \in \mathcal{G}$, alors f en particulier V -sortante en tout point $\rho \in \mathcal{H} \cap V$ dans un voisinage de ρ_0 .

Théorème 3.1. Soit f une distribution prolongeable sur M vérifiant $Pf = 0$ dans $\overset{\circ}{M}$, V -sortante en ρ_0 . On suppose que $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}(f|_{t=0})$. Alors

$$(3.51) \quad (\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0}\right).$$

Remarque 3.4. Si f vérifie la condition de Dirichlet $f|_{t=0} = 0$, on a $SS_b(f) \cap \dot{T}^*\partial M \subset \mathcal{E} \cup \mathcal{H}$. Si $\rho_0 \in \mathcal{E}$, la bicaractéristique de V passant par ρ_0 est transverse à $\mathcal{E}$ d'après (3.49), donc rentre dans $\mathcal{E}$. Par le principe du maximum (cf. [L2]), $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}(\partial f/\partial t|_{t=0})$ entraîne $\rho_0 \notin SS_b(f)$, et l'on retrouve un théorème micro-hyperbolique au bord de J. Sjöstrand [S3].

Démonstration du théorème. Si $\rho_0 \in \mathcal{E} \cup \mathcal{H}$, l'hypothèse $f|_V$ -sortante assure l'existence d'un opérateur pseudo-différentiel analytique d'ordre 1 E tel que

$$\rho_0 \notin SS \left(\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} - E(f|_{t=0}) \right),$$

et le théorème est alors conséquence du fait que les opérateurs pseudo-différentiels sont deux-microlocaux. On peut donc supposer $\rho_0 \in \mathcal{E}$.

Par (iii) et la propagation des singularités à l'intérieur, on sait que

$$(3.52) \quad 0 < t \leq \varepsilon/2, \quad |\rho - \rho_0| \leq \varepsilon/2, \quad s(\rho) \leq 0 \Rightarrow (\rho, t, \tau) \notin SS(f)$$

si ε est assez petit.

Soit $\chi: (T^*\mathbb{C}^d, \rho_0) \rightarrow (T^*\mathbb{C}^d, (z_0, \zeta_0) = (0, 0))$ une transformation canonique complexe locale telle que $\chi(T^*\mathbb{R}^d) = \Lambda_{\varphi_0}$, où

$$(3.53) \quad \begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_1)^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{Im} z')^2, \\ \Lambda_{\varphi_0} &= \left\{ \left(z, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right) \right\} = \{(z_1, z', -i \operatorname{Re} z_1, -\operatorname{Im} z')\}, \end{aligned}$$

et telle que, en notant ν le signe de $\{r_0, s\}(\rho_0)$,

$$(3.54) \quad \nu R_0(z, \zeta) = r_0 \circ \chi^{-1}(z, \zeta) = \zeta_1 + i z_1,$$

$$(3.55) \quad S(z, \zeta) = s \circ \chi^{-1}(z, \zeta) = i \zeta_1 l(z, \zeta), \quad l|_{\Lambda_{\varphi_0}} > 0.$$

Soit aussi T une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer ([S2]) associée à χ ,

$$(3.56) \quad Tf(z, \lambda) = \int e^{i\lambda g(z, x)} f(x) \psi(x) dx,$$

où le graphe de χ est donné par $\{(x, -g'_x; z, g'_z)\}$, $g(0, x_0) = 0$, $\det g''_{zx}(0, x_0) \neq 0$, et où $\psi \in C_0^\infty$ est supportée dans un voisinage de x_0 et vaut 1 près de x_0 . Posons

$$(3.57) \quad u(t, z, \lambda) = T(f(t, \cdot))(z, \lambda).$$

Soit $t_0 \in]0, 1[$. Puisque f est solution prolongeable de $Pf = 0$, on a

$$(3.58) \quad \exists \nu_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall k \geq 0, \quad f \in C^k([0, t_0], H^{\nu_0-k}(|x| < a/2)),$$

et il existe donc un voisinage Ω_0 de $z_0 = 0$ tel que

$$(3.59) \quad u \in C^\infty([0, t_0]; H_{\varphi_0}(\Omega_0)).$$

De plus, il existe un symbole analytique q défini près de $t \in [0, t_0]$, $(z_0, \zeta_0) = (0, 0)$,

$$(3.60) \quad q(t, z, \zeta, \lambda) = \sum_{n \geq 0} (i\lambda)^{-n} q_n(t, z, \zeta), \quad q_0(t, \chi(x, \zeta)) = r(t, x, \zeta),$$

tel que, pour C_1, C_2 assez grands, on ait

$$(3.61) \quad \begin{aligned} & \lambda^2 \text{Op}(q)(0, C_1, C_2) e^{i\lambda g(z, x)} \\ &= {}^t R(t, x, D_x) (e^{i\lambda g(z, x)}) + e^{i\lambda g(z, x)} b(t, x, z, \lambda), \end{aligned}$$

où b est un symbole analytique près de $t \in [0, t_0]$, $x = x_0$, $z = 0$ avec b dominé par $e^{-\varepsilon\lambda}$ pour un $\varepsilon > 0$. Si $\tilde{p} = \tau^2 + q$, on a alors

$$(3.62) \quad \text{Op}(\tilde{p})(0, C_1, C_2) u \in C^\infty([0, t_0]; H_{\varphi_0 - \varepsilon_0}(\Omega_1)), \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Ici $\Omega_1 \Subset \Omega_0$ et C_1, C_2 sont compatibles avec les notations du Lemme 3.1. Pour $z = (z_1, z') \in \mathbb{C}^d$, on pose

$$(3.63) \quad x_1 = \text{Re } z_1, \quad y = (\text{Im } z_1, z'),$$

$$(3.64) \quad \varphi_-(z) \doteq \frac{1}{2}(\text{Im } z')^2 + \frac{1}{2}[(\text{Re } z_1)_+]^2,$$

où x_+ désigne $\max(x, 0)$. Par hypothèse on a $(\rho_0, -1) \notin SS_V^{2,1}(f|_{t=0})$ et on peut donc supposer, si Ω_0 est assez petit,

$$(3.65) \quad \forall z \in \Omega_0, \quad |u(0, z, \lambda)| \leq A\lambda^M e^{\lambda\varphi_-(z)}.$$

On fixe à présent $d_1 > 0$, $t_0 > 0$ petits tels que

$$(3.66) \quad \|z\| \leq 2d_1 \Rightarrow z \in \Omega_1,$$

$$(3.67) \quad \|z\| \leq 2d_1, \quad \text{Re } z_1 < 0 \Rightarrow u \in C^\infty([0, t_0]; H_{\varphi_0 - \varepsilon}) \text{ près de } z$$

$$(3.68) \quad \|z\| \leq 2d_1, \quad \text{Re } z_1 \leq 0, \quad t'_0 > 0 \Rightarrow u \in C^\infty([t'_0, t_0]; H_{\varphi_0 - \varepsilon}) \text{ près de } z,$$

ce qui est possible d'après (3.52).

Soit $\alpha > 0$ à fixer ultérieurement. Il existe trois réels $-d_1 < s_3(\alpha) < s_2(\alpha) < s_1(\alpha) < 0$ et une fonction $\theta_\alpha = \theta_\alpha(s) \in C^\infty([-d_1, +\infty[)$ tels que

$$(3.69) \quad \sup\left(0, \frac{s^2}{2} - \alpha\right) \leq \theta_\alpha(s) \leq \frac{s^2}{2}; \quad s + \alpha \geq \theta'_\alpha(s) \geq s,$$

$$(3.70) \quad \theta_\alpha(s) = \frac{s^2}{2} \quad \text{si } s \in [s_1(\alpha), \infty[,$$

$$(3.71) \quad \theta'_\alpha(s) > s \quad \text{si } s \in [-d_1, s_1(\alpha)[,$$

$$(3.72) \quad \theta_\alpha(s) \equiv 0 \quad \text{si } s \in [s_3(\alpha), s_2(\alpha)].$$

Soit aussi $\phi = \phi(y) \in C^\infty$, positive, ne dépendant que de

$$|y| = ((\text{Im } z_1)^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_d|^2)^{1/2},$$

croissante en $|y|$, nulle pour $|y| \leq d_1/4$, telle que $\phi(d_1) > d_1$. Pour $|\operatorname{Re} z_1| \leq d_1$, $|y| \leq d_1$, posons

$$(3.73) \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) + \theta_\alpha(\operatorname{Re} z_1 + \phi(y)) - \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z_1 + \phi(y))^2.$$

On a

$$(3.74) \quad \begin{aligned} \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} &= -\operatorname{Im} z' + [\theta'_\alpha(\operatorname{Re} z_1 + \phi(y)) - (\operatorname{Re} z_1 + \phi(y))] \frac{2}{i} \frac{\partial \phi}{\partial z'} \\ &= \zeta', \\ \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} &= -i \operatorname{Re} z_1 \\ &\quad + [\theta'_\alpha(\operatorname{Re} z_1 + \phi(y)) - (\operatorname{Re} z_1 + \phi(y))] \frac{1}{i} \left(1 - i \frac{\partial \phi}{\partial y_1}\right) \\ &= \zeta_1, \end{aligned}$$

et

$$(3.75) \quad \varphi(z) \leq \varphi_0(z); \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) \quad \text{si } \operatorname{Re} z_1 + \phi(y) \geq s_1(\alpha).$$

Pour $\delta \in [0, 1]$, on pose

$$(3.76) \quad \varphi_\delta(z) = \delta \varphi(z) + (1 - \delta) \varphi_0(z).$$

On a

$$(3.77) \quad \operatorname{Im}(\zeta_1 + i z_1) = -\theta'_\alpha(\operatorname{Re} z_1 + \phi(y)) + (\operatorname{Re} z_1 + \phi(y)) \leq 0,$$

et, si l'on pose $|\nabla \phi|_\infty = \sup\{|\nabla \phi(y)|, |y| \leq d_1\}$,

$$(3.78) \quad \left| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z}(z) - \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(z) \right| \leq \operatorname{Cte} \delta (1 + |\nabla \phi|_\infty) |\operatorname{Im}(\zeta_1 + i z_1)|,$$

où la constante est indépendante de α . Si $\Omega_2 = \{|\operatorname{Re} z_1| < d_1, |y| < d_1\} \Subset \Omega_1$, on a donc en tenant compte de (3.54),

$$(3.79) \quad \nu \operatorname{Im} \left(q_0 \left(t, z, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z}(z) \right) \right) \leq \delta \operatorname{Im}(\zeta_1 + i z_1) [1 - \operatorname{Cte} t (1 + |\nabla \phi|_\infty)],$$

où la constante est indépendante de α . Soit $t_1 \in]0, t_0[$ tel que

$$1 - \operatorname{Cte} t_1 (1 + |\nabla \phi|_\infty) \geq \frac{1}{2}.$$

D'après (3.67), (3.68), et (3.75), il existe $\alpha_0 > 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $\alpha \in]0, \alpha_0[$,

$$(3.80) \quad u \in C^\infty \left(\left[\frac{t_1}{2}, t_1 \right]; H_\varphi(\Omega_2) \right),$$

$$(3.81) \quad u \in C^\infty([0, t_1]; H_\varphi(\Omega_2 \cap \{\operatorname{Re} z_1 < -d_1/2\})),$$

$$(3.82) \quad u \in C^\infty([0, t_1]; H_\varphi(\Omega_2 \cap \{|y| \geq d_1 - \beta\})).$$

On pose $\Omega_3 = \{|\operatorname{Re} z_1| < 5d_1/6, |y| < d_1 - \beta/3\} \Subset \Omega_2$. D'après le Lemme 3.1 et (3.62), si C'_1 et C'_2 sont assez grands, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$(3.83) \quad \operatorname{Op}(\tilde{p})(0, C'_1, C'_2)u \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_0 - \varepsilon_1}(\Omega_3)).$$

On fixe à présent $\alpha \in]0, \inf(\alpha_0, \varepsilon_1/2)[$ et on va prouver que, pour tout $\delta \in [0, 1]$, on a

$$(3.84) \quad u \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_\delta}(\Omega_2)).$$

D'après (3.67), (3.75), il existe $\beta' > 0$, $s_1(\alpha') - \beta' > s_2(\alpha')$, tel que

$$(3.85) \quad u \in C^\infty([0, t_1]; H_\varphi(\Omega_2 \cap \{\operatorname{Re} z_1 > s_1(\alpha) - \beta'\})),$$

et pour δ assez petit, (3.84) résulte de (3.67).

Soit $\delta_0 \in]0, 1]$ et supposons que u vérifie (3.84) pour tout $\delta < \delta_0$. Soit $z^0 = (z_1^0, y^0) \in \Omega_2$, avec $-3d_1/4 \leq \operatorname{Re} z_1^0 \leq s_1(\alpha) - \beta'/2$, $|y| \leq d_1 - \beta/2$. Soit $\zeta_0 = (2\partial\varphi_\delta/i\partial z)(z^0)$. D'après (3.79), (3.77), et (3.71), il existe un voisinage U de (z^0, ζ^0) et $c > 0$ tels que

$$(3.86) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, t_1], \quad \forall (z, \zeta) \in \overline{U}, \quad |\tau^2 + q_0(t, z, \zeta)| \geq c(1 + |\tau|)^2,$$

et les racines en $\tau \in \mathbb{C}$ de l'équation $\tau^2 + q_0 = 0$ restent dans un compact K de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit

$$(3.87) \quad e = (\tilde{p})^{-1} \in A^{-2}([0, t_1], U, K)$$

l'inverse pseudo-différentiel de $\tilde{p}$; soient $\omega_1 \Subset \omega_0$ deux petits voisinages de z^0 et $R_0 > 0$ tels que

$$\omega_0 \times B(\zeta^0, R_0) \subset U, \quad \sup_{z \in \omega_0} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_{\delta_0}}{\partial z}(z) - \zeta^0 \right\| < D_0 < R_0.$$

Comme on peut toujours supposer que l'on a

$$\sup_{z \in \Omega_2, \delta \in [0, 1]} \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_\delta}{\partial z}(z) \right\| < D < R,$$

où R est un rayon de convergence pour $\tilde{p}$ en $\zeta = 0$, on peut supposer dans (3.83) que $C'_1 \geq 2B/e$, $C'_2 \geq (D \operatorname{dist}(\overline{\Omega}_3, \Omega_2^c))^{-1}$, où B est la constante intervenant dans $\tilde{p}$ pour des estimations du type (3.2).

On a alors

$$(3.88) \quad \operatorname{Op}(\tilde{p})(0, C'_1, C'_2)u \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_{\delta_0 - \varepsilon_1/2}}(\Omega_3)).$$

D'après le Lemme 3.1, si $C''_2 = C'_2 + (D_0 \operatorname{dist}(\overline{\omega}_1, \omega_0^c))^{-1} + (D \operatorname{dist}(\overline{\omega}_1, \omega_0^c))^{-1}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(3.89) \quad \operatorname{Op}(\tilde{p})(0, C'_1, C''_2)u \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_{\delta_0 - \varepsilon}}(\Omega_3)),$$

et, d'après le Lemme 3.2, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$(3.90) \quad \operatorname{Op}(\tilde{p})(\zeta_0, C'_1, C''_2)u \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_{\delta_0 - \varepsilon}}(\omega_1)).$$

Toujours d'après le Lemme 3.1, (3.90) reste vraie, en diminuant éventuellement ε , pour tous $\tilde{C}_1 \geq C'_1$, $\tilde{C}_2 \geq C''_2$. Si $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont assez grandes, on peut alors appliquer les Lemmes 3.3 et 3.4. On obtient

$$(3.91) \quad \begin{aligned} & \text{Op}(1)u - \text{Op}(e)\text{Op}(\tilde{p})(\zeta_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)u \\ & + \frac{1}{\lambda^2} [K^+(t, 0)\partial_t u(0) - \partial_s K^+(t, 0)u(0) \\ & - K^-(t, t_1)\partial_t u(t_1) + \partial_s K^-(t, t_1)u(t_1)] \\ & \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_{\delta_0}-\varepsilon}(\omega_1)). \end{aligned}$$

En faisant $t = 0$ et en utilisant (3.90) et (3.8), on en déduit, pour $z \in \omega_2 \Subset \omega_1$,

$$(3.92) \quad K^+(0, 0)\partial_t u(0) = \partial_s K^+(0, 0)u(0) - \lambda^2 u(0) + w,$$

où $w \in H_{\varphi_{\delta_0}-\varepsilon}(\omega_2)$. Or $K^+(0, 0)$ et $\partial_s K^+(0, 0)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques sur U de degrés 1 et 2. Si $\delta_0 < 1$, on déduit de (3.65) et (3.92), $\partial_t u(0) \in H_{\varphi_{\delta_0}-\varepsilon}(\omega_3)$ si $\omega_3 \Subset \omega_2$, d'où, puisque $\text{Op}(1)u = u$, et d'après (3.91) et (3.80),

$$(3.93) \quad u \in C^\infty([0, t_1]; H_{\varphi_{\delta_0}-\varepsilon}(\omega_3)),$$

d'où (3.84) en utilisant (3.71), (3.72), et (3.87), pour tout $\delta \in]0, 1[$. On a alors encore (3.91) et (3.92) pour $\delta_0 = 1$, d'où il résulte, d'après (3.65), puisque $\varphi = \varphi_1 \geq \varphi_-$,

$$(3.94) \quad |\partial_t u(0, z, \lambda)| \leq A' \lambda^{M+1} e^{\lambda \varphi(z)}$$

pour $z = (z_1, z')$, $\text{Re } z_1 \in [s_3(\alpha), s_2(\alpha)]$, $|y| \leq d_1/4$.

On a $\nu r_0 \circ \chi^{-1}|_{\Lambda_{\varphi_0}} = -\text{Im } z_1$; comme le théorème est déjà démontré aux points elliptiques et hyperboliques, pour tout $z_0 = (z_{1,0}, z'_0)$ près de 0 avec $\text{Im } z_{1,0} \neq 0$, il existe un voisinage V_0 de z_0 tel que

$$(3.95) \quad \forall z \in V_0, \quad |\partial_t u(0, z, \lambda)| \leq \text{Cte } \lambda^{M+1} e^{\lambda \varphi_-(z)}.$$

On a $\varphi(z) = \varphi_-(z) = (\text{Im } z')^2/2$ pour $|y| \leq d_1/4$, $\text{Re } z_1 \in [s_3(\alpha), s_2(\alpha)]$. Si α est assez petit, (3.94), (3.95), et le principe du maximum entraînent au voisinage de $z = 0$

$$(3.96) \quad |\partial_t u(0, z, \lambda)| \leq \text{Cte } \lambda^{M+1} e^{\lambda \varphi_-(z)},$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 3.5. L'identité (3.92) fournit une relation pseudo-différentielle entre les traces dans $\text{Re } z_1 < 0$.

3.3. Changement d'inconnues et écriture du système. Introduisons tout d'abord les ondes réfléchies sur $\Delta_\pm$ à partir de la solution u_i donnée par (1.6).

Soient $\theta_{\pm}$ les fonctions analytiques définies dans un voisinage de $x = y = 0$ par

$$(3.97) \quad \begin{aligned} (\partial_x \theta_{\pm})^2 + (\partial_y \theta_{\pm})^2 &= 1, & \theta_{\pm} - \theta_i|_{\tilde{\Delta}_{\pm}} &= 0, \\ \partial_{\pm} \theta_{\pm}(0, 0) &= -\partial_{\pm} \theta_i(0, 0). \end{aligned}$$

Alors il existe des symboles analytiques $\sigma_{\pm}$ près de $t = x = y = 0$ tels que les fonctions données par

$$(3.98) \quad u_{r,\pm}(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau(t-\theta_{\pm}(x,y))} \sigma_{\pm}(x, y, \tau) d\tau$$

soient solutions de $\square u_{r,\pm} = 0$ (modulo une fonction analytique réelle) et vérifient

$$(3.99) \quad u_{r,\pm}|_{\tilde{\Delta}_{\pm}} = u_i|_{\tilde{\Delta}_{\pm}}.$$

Les symboles $\sigma_{\pm}$ sont entièrement caractérisés par les équations de transport classiques (voir par exemple [H, Théorème 24.2.3]). On a en particulier

$$(3.100) \quad \sigma_{\pm}|_{\tilde{\Delta}_{\pm}} = \sigma_i|_{\tilde{\Delta}_{\pm}}.$$

Posons alors

$$(3.101) \quad u_{\pm} = u_i - u_{r,\pm},$$

$$(3.102) \quad \tilde{f}_{\pm} = v_{\pm} - 1_{x>0} \partial_{\pm} u_{\pm}.$$

De (3.100) et de la première équation de transport, on déduit que $u_{\pm} \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$, $\tilde{f}_{\pm} \in L_{\text{loc}}^2(\Delta_{\pm})$, et $\sigma_{\pm}$ a les mêmes propriétés d'holomorphicité en τ que σ_i , donc

$$(3.103) \quad \text{supp}(\tilde{f}_{\pm}) \subset \{0 \leq x \leq Ct\}.$$

On note $D_+ = \{(t, x, y), y > a(x)\}$, $D_- = \{(t, x, y), y < b(x)\}$. On introduit les sous-variétés involutives $V_{\pm} = \{x = 0\}$ de $T^*\tilde{\Delta}_{\pm}$, dont on oriente les fibrés normaux comme à la §3.2, en choisissant $s(x) = x$. On dira qu'une solution f de $\square f = 0$ dans $D_{\pm}$ est $V_{\pm}$ -entrante si elle est $(-V_{\pm})$ -sortante, où $-V_{\pm}$ est $V_{\pm}$ avec l'orientation opposée.

Proposition 3.1. *Pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que*

$$(3.104) \quad SS(\tilde{f}_{\pm}) \cap \{x > 0, t \leq \varepsilon_1\} \subset \left| \tilde{\xi} + \frac{\tau}{\cos \gamma_{\pm}} \right| < \varepsilon_0.$$

Si $p = (x = 0, t, \tilde{\xi}, \tau)$, $t \leq \varepsilon$, on a

$$(3.105) \quad (\rho, +1) \notin SS_{V_{\pm}}^{2,1}(\tilde{f}_{\pm}) \quad \text{pour} \quad \left| \tilde{\xi} + \frac{\tau}{\cos \gamma_{\pm}} \right| \geq \varepsilon_0.$$

Démonstration. On remarque que $\tilde{f}_{\pm}|_{x>0} = \partial_{\pm}(u - u_{\pm})|_{x>0}$, et que $\square(u - u_{\pm})$ est analytique jusqu'au bord dans $D_{\pm}$, avec, par construction,

$$(3.106) \quad u - u_{\pm}|_{\partial D_{\pm} \cap \{x>0\}} = 0,$$

$$(3.107) \quad u - u_{\pm}|_{t<0} = u_{r,\pm}|_{t<0}.$$

On notera que, si $g_1, g_2 \in \mathcal{D}'(\tilde{\Delta}_\pm)$ sont telles que $g_1|_{x>0} = g_2|_{x>0}$, alors, pour tout $\rho \in V_\pm$, on a $(\rho, +1) \notin SS_{V_\pm}^{2,1}(g_1 - g_2)$. Compte tenu de (3.106) et du Théorème 3.1, (3.105) sera donc prouvé si nous montrons que $u - u_\pm$ est $V_\pm$ -entrante au point ρ . (On vérifie en effet aisément que $V_\pm$ satisfait aux conditions de transversalité requises pour appliquer le Théorème 3.1.) Nous allons prouver cette propriété de $u - u_\pm$ en même temps que (3.104).

Soit $\varepsilon_0 > 0$, et soit $\rho = (x, t, \tilde{\xi}, \tau)$, avec $0 \leq x \leq ct$, $|\tilde{\xi} + \tau/\cos\gamma_\pm| \geq \varepsilon_0$, hyperbolique ou glancing. (Le cas elliptique est sans objet pour (3.105) et, pour (3.104), est conséquence de (3.106) et de la régularité elliptique microlocale.) Supposons d'abord *de plus* $|\tilde{\xi} - \tau/\cos\gamma_\pm| \geq \varepsilon'_0$. Alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, si $t \leq \varepsilon_1$, la demi-bicaractéristique γ issue de ρ , contenue dans $D_\pm$ et dirigée vers $t < 0$ ne recoupe pas $\tilde{\Delta}_\pm$ avant d'entrer dans $t < 0$. Par définition, la distance à $\tilde{\Delta}_\pm$ est décroissante avec t le long de γ près de $\tilde{\Delta}_\pm$. Or $u_{r,\pm}$ a été construite pour que, sur les bicaractéristiques contenues dans $SS(u_{r,\pm}) \cap D_\pm$, la distance à $\tilde{\Delta}_\pm$ soit croissante avec t près de $\tilde{\Delta}_\pm$. La solution $u_{r,\pm}$ est donc régulière le long de γ , et, par le théorème de propagation des singularités et (3.107), on conclut que $\gamma \cap SS(u - u_\pm) = \emptyset$. Si $x = 0$, cela signifie exactement que $u - u_\pm$ est $V_\pm$ -entrante. Si $x > 0$, la condition (3.106) et le théorème de réflexion des singularités ([Sc]) entraînent que $\rho \notin SS(\tilde{f}_\pm)$. Supposons maintenant $|\tilde{\xi} - \tau/\cos\gamma_\pm| \leq \varepsilon'_0$. Alors, pour $\varepsilon'_0 > 0$ assez petit, tout demirayon γ issu de ρ pouvant porter des singularités analytiques et dirigé vers $t < 0$ est localement contenu dans $\{x > 0\}$. Si ε_1 est assez petit, γ possède un point dans $\{t < 0\} \cap \{x > 0\}$, où nous savons que $u_{r,\pm}$ est régulière. Le théorème de propagation des singularités analytiques pour le problème de Dirichlet de Sjöstrand [S1] entraîne donc, au vu de (3.106) et de (3.107), que $SS_b(u - u_\pm) \cap \gamma = \emptyset$. Si $x > 0$, on a donc $\rho \notin SS(\tilde{f}_\pm)$. Si $x = 0$, on en déduit que $u - u_\pm$ est $V_\pm$ -entrante si ρ est hyperbolique. Si ρ est glancing, i.e., $\rho = (0, t, \tau/\cos\gamma_\pm, \tau)$, alors les demi-rayons issus de points proches de ρ avec $x > 0$ (dans $T^*\tilde{\Delta}_\pm$ et dans $T^*D_\pm$) restent dans $x > 0$ avant d'entrer dans $t < 0$, et le même argument de propagation des singularités entraîne que $u - u_\pm$ est $V_\pm$ -entrante au point ρ . $\square$

En tenant compte de (3.102), la formule (2.7) devient, pour (t, x, y) dans Ω ,

$$(3.108) \quad u = u_e - \square^{-1}(\tilde{f}_+ \delta_+ + \tilde{f}_- \delta_-),$$

où $u_e = u_i - \square^{-1}(1_{x>0} \partial_+ u_+ \delta_+ + 1_{x>0} \partial_- u_- \delta_-)$ est explicite. On est donc ramené à décrire microlocalement $\tilde{f}_\pm$ en $(t = x = 0, \tau, \tilde{\xi})$, avec $\tilde{\xi} \neq -\tau/\cos\gamma_\pm$. On utilisera le système suivant, issu de (2.34) et (3.102), avec $f_\pm = \varphi_1 \tilde{f}_\pm$,

$$(3.109) \quad \begin{cases} f_+ - 1_{x>0} Q^+ f_+ - S^{+, -} f_- = h_+ + r_+, \\ f_- - 1_{x>0} Q^- f_- - S^{-, +} f_+ = h_- + r_-, \end{cases}$$

où $h_{\pm}$ sont données par
(3.110)

$$h_{\pm} = 1_{x>0}(2\psi\varphi_2\partial_{\pm}u_i - \varphi_1\partial_{\pm}u_{\pm} + Q^{\pm}(1_{x>0}\varphi_1\partial_{\pm}u_{\pm}) + S^{\pm,\mp}(1_{x>0}\varphi_1\partial_{\mp}u_{\mp}))$$

et où $r_{\pm}$ ont été définis en (2.35).

4. MICROLOCALISATION DU PROBLÈME ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Rappelons que f_{+} , f_{-} ont été introduits en (3.109), le réel $t_0 > 0$ et les fonctions φ_1 , φ_2 , ψ au §2.3, le réel $\kappa > 0$ au §2.1 (2.15). Les fonctions $f_{\pm}(x, t)$ sont L^2 et à support dans $0 \leq x \leq ct$, $t \leq 3t_0$; on supposera de plus $\psi(x) = 0$ pour $|x| \geq 4ct_0$, $0 \leq \psi \leq 1$.

Nous allons dans ce paragraphe effectuer une transformation FBI en variable x sur le système (3.109) pour le ramener à un problème pseudo-différentiel à valeurs opérateurs. Les développements asymptotiques obtenus ici s'appuient sur les techniques usuelles de microlocalisation.

Le choix des différentes constantes intervenant dans la preuve étant assez laborieux, nous noterons toujours D_j ($j = 1, 2, \dots$) des constantes absolues, avec $D_j \geq 1$. On désignera par la même lettre D des constantes vérifiant $D \geq 1$ et dont la valeur exacte est sans importance.

4.1. Transformation FBI en variable x . Soit $\psi_2(x) \in C_0^{\infty}$, égale à 1 sur le support de ψ , nulle pour $|x| \geq 5ct_0$.

Pour $g \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$, support $(g) \subset \mathbb{R}_{+}$, $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$(4.1) \quad T_1 g(z, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{\lambda x z - \lambda x^2/2} \psi_2(x) g(x) dx.$$

Si on définit la fonction poids $\tilde{\varphi}_1(z)$ par

$$(4.2) \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(z) = 0, & \operatorname{Re} z \leq 0, \\ \tilde{\varphi}_1(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Re} z)^2, & \operatorname{Re} z \in [0, 5ct_0], \\ \tilde{\varphi}_1(z) = 5ct_0(\operatorname{Re} z) - \frac{1}{2}(5ct_0)^2, & \operatorname{Re} z \geq 5ct_0, \end{cases}$$

on a les estimations

$$(4.3) \quad \left\| \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^k T_1 g(x - i\alpha, \lambda) e^{-\lambda \tilde{\varphi}_1(x)} \right\|_{L^2(\alpha)} \leq D \lambda^{-1/2} (5ct_0)^k \|\psi_2 g\|_{L^2},$$

et la formule d'inversion

$$(4.4) \quad \psi_2 g(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x \alpha - \lambda x^2/2} T_1 g(x - i\alpha, \lambda) d\alpha,$$

où l'intégrale est oscillante en α . En appliquant la formule (4.4) à $g'(x) = e^{-i\lambda x \cdot \xi} g(x)$, avec $\xi \in \mathbb{C}$, on obtient

$$(4.5) \quad e^{-i\lambda x \cdot \xi} \psi_2 g(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x \alpha - \lambda x^2/2} T_1 g(x - i\xi - i\alpha, \lambda) d\alpha.$$

Soit $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq ct\}$. Pour $(w, z) \in \mathbb{C}^2$, on définit la fonction poids Φ par

$$(4.6) \quad \sup_G -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[(w-t)^2] + x \operatorname{Re} z - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} (\operatorname{Im} w)^2 + \Phi(\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z).$$

On obtient

$$(4.7) \quad \begin{cases} \Phi(v, u) = 0; & v \geq 0, u \leq 0, \\ \Phi(v, u) = \frac{u^2}{2}; & v \geq 0, 0 \leq u \leq cv, \\ \Phi(v, u) = -\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2} \frac{(cu+v)^2}{1+c^2}; & u \geq 0, -cu \leq v \leq \frac{u}{c}, \\ \Phi(v, u) = -\frac{1}{2}v^2; & v \leq 0, u \leq -\frac{v}{c}. \end{cases}$$

Alors $\Phi(v, u)$ est croissante en v et on posera, pour $\delta > 0$,

$$(4.8) \quad \Phi_\delta(u) = \Phi\left(\frac{\delta}{c}, u\right)$$

d'où

$$(4.9) \quad \begin{cases} \Phi_\delta(u) = 0; & u \leq 0, \\ \Phi_\delta(u) = \frac{u^2}{2}; & u \in [0, \delta], \\ \Phi_\delta(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2(1+c^2)}(u-\delta)^2; & u \geq \delta. \end{cases}$$

Rappelons que la transformation T_0 a été introduite au §2.1. Pour $f(t, x) \in L^2$ avec support $(f) \subset \{0 \leq x \leq ct; 0 \leq t \leq 2t_0\}$ on pose

$$(4.10) \quad \begin{aligned} F(w, z, \lambda) &= (T_0 \otimes T_1)(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{\lambda(xz-x^2/2-(w-t)^2/2)} f(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

On relie δ et κ par

$$(4.11) \quad \delta = 3\kappa c.$$

En utilisant la définition de Φ, Φ_δ , on obtient alors:

Lemme 4.1. Pour $w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} w \leq 3\kappa$, et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(4.12) \quad \begin{cases} \left\| \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^k F(w, x - i\alpha, \lambda) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_\alpha)} \leq D(2ct_0)^k \|f\|_{L^2} e^{\lambda(\operatorname{Im} w)^2/2 + \lambda\Phi_\delta(x)}, \\ \left\| \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^k F(w, x - i\alpha, \lambda) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\alpha)} \leq D(2ct_0)^k \|f\|_{L^2} e^{\lambda(\operatorname{Im} w)^2/2 + \lambda\Phi_\delta(x)}. \end{cases}$$

Posons

$$(4.13) \quad W_\kappa = \{w \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} w| < \kappa, |1 + \operatorname{Im} w| < \kappa\}$$

et fixons $\varepsilon_0 > 0$. D'après la Proposition 3.1, la caractérisation du deuxième micro-support à croissance par transformation FBI [L] et les estimées (4.12), on obtient:

Lemme 4.2. *Il existe $\varepsilon_1 > 0$, $A, B, d > 0$ tels que si $F_\pm = (T_0 \otimes T_1)f_\pm$, on ait pour $\kappa \leq \varepsilon_1$, $w \in W_{3\kappa}$, $z \in \mathbb{C}$,*

$$(4.14) \quad |F_\pm(w, z, \lambda)| \leq A\lambda^B e^{\lambda(\operatorname{Im} w)^2/2 + \lambda\Phi_\delta^\pm(z)}$$

avec $\Phi_\delta^\pm(z) = 0$ pour $\operatorname{Re} z \in [0, d]$, $|\operatorname{Im} z - 1/\cos \gamma_\pm| \geq \varepsilon_0$, $|z| \leq 10/|\cos \gamma_\pm|$, et $\Phi_\delta^\pm(z) = \Phi_\delta(\operatorname{Re} z)$ ailleurs.

On prendra garde au fait que les constantes ε_1, A, B, d dépendent de t_0 , puisque $f_\pm = \varphi_1 \tilde{f}_\pm$, et φ_1 dépend de t_0 . On supposera dans la suite $d \leq ct_0$.

4.2. Espaces de fonctions holomorphes. Pour $A > 0$, $\varepsilon > 0$ petit, soit $\Gamma_\varepsilon =]\pi/2 + \varepsilon, 3\pi/2 - \varepsilon[$ et $\omega[\varepsilon, A] = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg}(z) \in \Gamma_\varepsilon, |z| \geq A\}$. On dira qu'un ouvert ω connexe et simplement connexe de $\mathbb{C}$ est un ε -secteur s'il est de la forme $\omega = \omega[\varepsilon, A] \cup \omega'$ avec ω' ouvert borné. Si ω_1 (resp. ω_2) est un ε_1 (resp. ε_2)-secteur on écrira $\omega_1 \Subset \omega_2$ si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ et $\overline{\omega_1} \subset \omega_2$.

Si ω est un ε -secteur, on note H_ω l'espace des fonctions $g(z, \lambda)$ définies pour $\lambda \geq \lambda_0$, holomorphes en $z \in \omega$, telles qu'on ait

$$(4.15) \quad \exists C \quad \sup_{z \in \omega} |g(z, \lambda)| + \sup_{\theta \in \Gamma_\varepsilon} \left(\int_A^\infty |g(\rho e^{i\theta}, \lambda)|^2 d\rho \right)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \|g(\cdot, \lambda)\|_\omega \leq C\lambda^C.$$

On dira que $g \in H_\omega$ est *négligeable* s'il existe $C > 0$ telle que $\|g\|_\omega \leq Ce^{-\lambda/C}$.

Pour $g(z, \lambda)$ holomorphe en z , $\rho > 0$, on pose

$$(4.16) \quad J_\rho(g)(z, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-\lambda y^2/2} g(z + y, \lambda) dy,$$

$$(4.17) \quad J_\rho^{-1}(g)(z, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-\lambda y^2/2} g(z + iy, \lambda) dy$$

(lorsque ces expressions ont un sens).

Alors pour $\omega' \Subset \omega$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que, pour $\rho \in]0, \rho_0]$, J_ρ et J_ρ^{-1} envoient H_ω dans $H_{\omega'}$ et ces opérateurs sont indépendants de ρ modulo un opérateur négligeable R , i.e., vérifiant

$$(4.18) \quad \exists C, \quad \forall g \in H_\omega, \quad \|R(g)\|_{\omega'} \leq Ce^{-\lambda/C} \|g\|_\omega.$$

Il existe aussi des opérateurs négligeables $R_\rho^{1,2}$ tels qu'on ait les égalités d'opérateurs de H_ω dans $H_{\omega'}$

$$(4.19) \quad J_\rho \circ J_\rho^{-1} = \operatorname{Id} + R_\rho^1; \quad J_\rho^{-1} \circ J_\rho = \operatorname{Id} + R_\rho^2.$$

On remarquera que J_ρ est une quantification de la transformation canonique $(x, \xi) \mapsto (z, \zeta)$, $z = x - i\zeta$, $\zeta = \xi$, qui laisse stable la section nulle.

Lemme 4.3. Soient $\rho > 0$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(x) \equiv 1$ près de $x = 0$. Il existe $C > 0$ tel que pour $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z < -1$ on ait

$$(4.20) \quad \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\rho}^{\rho} e^{-\lambda y^2/2} \frac{dy}{z + iy} = \lambda \int_0^\infty e^{\lambda x z - \lambda x^2/2} \psi(x) dx + r(z, \lambda)$$

avec

$$(4.21) \quad |r(z, \lambda)| \leq \frac{C}{|z|} e^{-\lambda/C}.$$

Preuve. On a $\int_0^\infty e^{\lambda x z - \lambda x^2/2} (\psi - 1) dx = -\frac{1}{\lambda z} \int_0^\infty e^{\lambda x z - \lambda x^2/2} g(x, \lambda) dx$ avec $g = \psi'(x) - \lambda x(\psi - 1)$ nul près de $x = 0$ et

$$\left| \int_\rho^\infty e^{-\lambda y^2/2} \frac{dy}{z + iy} \right| \leq \frac{1}{|z|} \int_\rho^\infty e^{-\lambda y^2/2} dy \quad \text{si } \operatorname{Im} z \geq 0$$

et

$$\left| \int_\rho^\infty e^{-\lambda y^2/2} \frac{dy}{z + iy} \right| = \left| \int_{\rho + \mathbb{R}_+ e^{i\pi/6}}^\infty e^{-\lambda y^2/2} \frac{dy}{z + iy} \right| \leq \frac{1}{C|z|} e^{-\lambda/C} \quad \text{si } \operatorname{Im} z \leq 0.$$

On peut donc pour vérifier (4.21) faire $\rho = \infty$ et $\psi \equiv 1$ dans (4.20), qui devient une égalité avec $r \equiv 0$. $\square$

Si ω est un ε -secteur, X un ouvert de $\mathbb{C}^2$, $\varphi_0(w) = (\operatorname{Im} w)^2/2$, on note $H(\varphi_0, X, \omega)$ l'espace des fonctions $g(t, \tau, z, \lambda)$ holomorphes en $(t, \tau) \in X$, à valeurs dans H_ω telles que

$$(4.22) \quad \exists C, \quad \forall (t, \tau) \in X, \quad \|g(t, \tau, \cdot, \lambda)\|_\omega \leq C \lambda^C e^{\lambda \varphi_0(t - i\tau)}.$$

On définit comme précédemment les éléments négligeables de $H(\varphi_0, X, \omega)$.

Soit alors $(\omega_\sigma)_{\sigma \in [0, 1]}$ une famille de δ_σ -secteurs, où $\delta_\sigma = (1 - \sigma)\delta_0 + \sigma\delta_1$, $0 < \delta_1 < \delta_0$, tels que, si $\sigma < \sigma'$, $\omega_\sigma \subseteq \omega_{\sigma'}$, et, plus précisément, tels qu'il existe $d_1 > 0$ avec

$$(4.23) \quad \sigma < \sigma' \Rightarrow d(\omega_\sigma, \omega_{\sigma'}^c) = d_1(\sigma' - \sigma).$$

On impose de plus qu'il existe des constantes ε_2, c_2, d_2 , telles que pour tout σ

$$(4.24) \quad d(i, \omega_\sigma) \geq \varepsilon_2,$$

$$(4.25) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |y - 1| \geq 2\varepsilon_2, \quad |y| \leq 5, \quad d(iy, \omega_\sigma^c) \geq c_2,$$

$$(4.26) \quad \forall z \in \omega_\sigma, \quad \operatorname{Re} z \leq d_2,$$

de sorte que ω_σ ait l'allure représentée dans la Figure 3 (voir p. 376).

On demande de plus que, si ε_0, d sont les constantes intervenant dans le Lemme 4.2, on ait

$$(4.27) \quad \varepsilon_0 \cos \gamma_\pm < \varepsilon_2, \quad d_2 \cos \gamma_\pm < d.$$

On pose alors $H_\sigma = H_{\omega_\sigma}$. On introduit alors

$$(4.28) \quad \omega_\sigma^\pm = \frac{1}{\cos \gamma_\pm} \omega_\sigma, \quad H_\sigma^\pm = H_{\omega_\sigma^\pm},$$

FIGURE 3

et on pose

$$(4.29) \quad \|f\|_{\sigma} = \|f\|_{\omega_{\sigma}}, \quad \|f\|_{\sigma}^{\pm} = \|f\|_{\omega_{\sigma}^{\pm}}.$$

En utilisant (4.23) et la croissance de (δ_{σ}) , on vérifie alors aisément l'existence d'une constante $B > 0$ telle que

$$(4.30) \quad \forall \sigma < \sigma', \quad \forall f \in H_{\sigma'}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\partial_z^n f\|_{\sigma} \leq B \left(\frac{Bn}{\sigma' - \sigma} \right)^n \|f\|_{\sigma'}.$$

On a la même estimation pour les normes $\| \cdot \|_{\sigma}^{\pm}$.

Dans ce qui suit, on supposera en outre que ω_{σ} a un bord C^1 par morceaux $\partial \omega_{\sigma}$.

4.3. Développement des termes pseudo-différentiels. Le but de ce paragraphe est de calculer le développement asymptotique en λ de

$$(4.31) \quad I(t, \tau, z, \lambda) = T_1(1_{x>0} Q_{\lambda\tau}^+ T_0 f_+)(t - i\tau, z, \lambda),$$

où Q_{τ}^+ est l'opérateur défini en (2.36). On posera

$$(4.32) \quad \sigma(x, x', \xi, \tau) = \left(\frac{\xi}{\xi_+} - \mu \right) \left(\frac{\mu - a'(x)}{1 + \mu^2} \right).$$

On fixe A, ε avec $A \sin \varepsilon > 4$ et on pose $U = \omega[\varepsilon, A]$. Pour $\kappa > 0$, on posera

$$(4.33) \quad X_{\kappa} = \{(t, \tau) \in \mathbb{C}^2, \quad |\tau - 1| < 3\kappa, \quad t - i\tau \in W_{3\kappa}\}.$$

Lemme 4.4. *Il existe D_1 tel que, pour $\xi \in \mathcal{E}_1$, où $\mathcal{E}_1$ est le contour représenté dans la Figure 4 avec $a' \ll t_0 \ll 1/D_1$, $a'' = 1 + 4ct_0$, la fonction $\sigma(x, x', \tau, \xi)$ est holomorphe en (x, x', τ) pour $\max\{|\operatorname{Re} x|, |\operatorname{Re} x'|\} \leq 5ct_0$,*

$$\max\{|\operatorname{Im} x|, |\operatorname{Im} x'|\} \leq 2 \frac{a'}{D_1}, \quad |\tau - 1| < 4 \frac{a'}{D_1},$$

et vérifie $|\sigma| \leq D_1/a'$.

FIGURE 4

Preuve. Le lemme résulte de (4.32) et de $\xi_+ = ((1 + \mu^2(x, x'))\tau^2 - \xi^2)^{1/2}$. $\square$

Proposition 4.1. *Il existe t_0^1 , et, pour $t_0 \in]0, t_0^1[$, a', ρ, C_2^0 , tels que, avec $\kappa = a'/D_1$, on ait $I \in H(\varphi_0, X_\kappa, U)$ et*

$$(4.34) \quad I - J_\rho^{-1} \left(\sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \frac{d\xi}{z + i\xi} \frac{\partial_x^n \partial_{x'}^m}{n!m!} \sigma(0, 0, \tau, \xi) \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^m J_\rho F_+(-i\xi) \right)$$

est négligeable dans $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$, avec $C_1 \geq eD_1/a'$, $C_2 \geq C_2^0$.

Les constantes seront choisies telles qu'on ait $t_0^1 \ll 1$, $a' \ll \inf(t_0, d, c_2)$ où d est défini au Lemme 4.2. En particulier on aura $\kappa = a'/D_1 \ll \varepsilon_1$. Compte tenu des estimations (4.12), (4.14) et de $|z + i\xi| \geq 1$ pour $z \in U$, $\xi \in \mathcal{C}_1$, la série de (4.34) définit un élément de $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$ ne dépendant de ρ (petit) et de C_2 (grand) que modulo un terme négligeable, puisque l'opérateur de noyau $(z + i\xi)^{-n-1}$ est borné (uniformément en n) de $L^2(\mathcal{C}_1)$ dans H_U .

Pour la preuve de cette proposition, voir Appendice B.

D'après la Proposition 2.2, on a

$$(4.35) \quad T_0 \otimes T_1(1_{x \geq 0} Q^+ f_+)(w, z, \lambda) \\ = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{t_-}^{t_+} \int_{\tau_-}^{\tau_+} e^{i\lambda\tau(w-t) - \lambda\tau^2} I(t, \tau, z, \lambda) dt d\tau + R,$$

où R est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$, puisque T_1 envoie continûment L^2 dans H_U .

Par ailleurs, chaque intégrale dans la somme (4.34) peut être déformée sur le contour frontière de $i\omega_\sigma^+$:

$$(4.36) \quad \mathcal{C}^\sigma = i\partial\omega_\sigma^+.$$

Pour $|\tau - 1| < 3k$ et $n \in \mathbb{N}$, considérons l'opérateur $q_n^+(\tau, \lambda): H_0^+ \rightarrow H_U$ défini

par

$$(4.37) \quad q_n^+(\tau, \lambda)f(z) = \sum_{j+m=n} \partial_z^j \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}^0} \frac{d\xi}{z+i\xi} \frac{\partial_x^j \partial_{x'}^m}{j!m!} \sigma(0, 0, \tau, \xi) \partial_z^m f(-i\xi) d\xi \right).$$

On notera que, compte tenu de (4.32), $q_0^+ = 0$. Alors, pour tous $\sigma, \sigma' \in [0, 1]$, $\sigma < \sigma'$, on constate, en déformant $\mathcal{E}^0$ sur $\mathcal{E}^{(\sigma+\sigma')/2}$, que q_n^+ envoie $H_{\sigma'}^+$ dans H_σ^+ , avec

$$(4.38) \quad \|q_n^+(\tau, \lambda)\|_{\sigma, \sigma'} \leq D \left(\frac{Dn}{\sigma' - \sigma} \right)^n.$$

En effet, compte tenu de l'inégalité (4.30), il suffit d'étudier l'opérateur sur $H_{\sigma'}^+$

$$(4.39) \quad K_n: g \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}^{(\sigma+\sigma')/2}} \frac{d\xi}{z+i\xi} \sigma_n(\tau, \xi) g(-i\xi)$$

où $\sigma_n(\tau, \xi) = (\partial_x^j \partial_{x'}^m / j!m!) \sigma(0, 0, \tau, \xi)$; les points de ramification de δ_n sont définis, d'après (4.32) et (2.26) par

$$(4.40) \quad \xi^2 = \frac{\tau^2}{(\cos \gamma_+)^2}$$

et sur toute branche de détermination de σ_n on a

$$(4.41) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists D, \quad |\sigma_n(\tau, \xi)| \leq D^{n+1}, \quad \forall n, \\ |\tau - 1| \leq 3\varepsilon_1, \quad \left| \xi^2 - \frac{\tau^2}{(\cos \gamma_+)^2} \right| \geq \varepsilon.$$

Posons

$$(4.42) \quad V_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| \operatorname{Im} z + \frac{1}{\cos \gamma_+} \right| \leq \frac{1}{\rho \cos \gamma_+}, \quad |\operatorname{Re} z| \leq \frac{c_2}{\rho \cos \gamma_+} \right\}.$$

Pour $z \in V_4$, on a $\operatorname{dist}(z, \partial\omega^+) \geq c_2/4 \cos \gamma_+$, donc

$$(4.43) \quad |K_n(g)(z)| \leq D^{n+1} \|g\|_{\sigma'}^+.$$

Comme $|\tau - 1| \leq 3\kappa = 3a'/D_1 \ll \inf(t_0, d, c_2)$, les points de ramification de $\sigma_n(\tau, \xi)$ près de $\xi = 1/\cos \gamma_+$ vérifient $-i\xi \in V_8$. Pour $z \notin V_4$ on déforme alors $\mathcal{E}^{(\sigma+\sigma')/2}$ sur un contour entourant V_6 , ayant l'allure suivante

FIGURE 5

et pouvant faire apparaître un résidu au point z .

En utilisant l'inégalité de Hardy (Proposition 1.1), on obtient alors, compte tenu de (4.43)

$$(4.45) \quad \exists D, \quad \forall \sigma \leq \sigma', \quad \|K_n\|_{\sigma, \sigma'} \leq D^{n+1}.$$

On a donc prouvé que le symbole

$$(4.46) \quad q^+(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^+(\tau, \lambda) \lambda^{-n}$$

était un symbole à valeurs opérateurs dans la chaîne H_σ^+ (au sens de l'Appendice A), et les formules (4.34) et (4.35) expriment que

$$(4.47) \quad T_0 \otimes T_1(1_{x \geq 0} Q^+ f_+)(w, z, \lambda) = J_p^{-1} \text{Op}(q_+) J_p F_+$$

modulo un élément négligeable de $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$.

4.4. Développement des termes singuliers. Dans ce paragraphe, on étudie la transformée FBI de $S^{+, -} f_-$ pour $w \in W_\kappa$, $z \in U$. D'après la Proposition 2.2, on sait que

$$(4.48) \quad (T_1 \otimes T_0)(S^{+, -} f_-)(w, z, \lambda) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau e^{i\lambda\tau(w-t) - \lambda\tau^2} T_1 S_{\lambda\tau}^{+, -} T_0 f_-(t - i\tau, \lambda)$$

est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$.

Pour $l > 0$, $\kappa \ll l \ll 1$, on introduit le contour $\mathcal{C}(l, b)$ représenté dans la Figure 5. On a alors le résultat suivant (voir Appendice B).

Proposition 4.2. *Il existe $t_0^1 > 0$, et, pour tout $t_0 \in]0, t_0^1]$, $l, \kappa_0, C_1^0, C_2^0$, tels que, pour tout $\kappa \in]0, \kappa_0]$, on ait*

$$\tilde{I} = T_1(S_{\lambda\tau}^+ T_0 f_-)(t - i\tau, z, \lambda) \in H(\varphi_0, X_\kappa, U),$$

et

$$(4.49) \quad \tilde{I} + \sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}(l, b)} \frac{d\xi}{z + i(\xi + a\xi_0)} \frac{\partial_x^n}{n!} \left(e^{\lambda\phi_+} \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ \times \frac{\partial_{x'}^m}{m!} \left(e^{\lambda\phi_-} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^m F_- \right) \Big|_{x'=0, z=-i(\xi+b\xi_0)}$$

est négligeable dans $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$, où l'on a noté

$$(4.50) \quad F_- = F_-(t - i\tau, x' + z, \lambda),$$

$$(4.51) \quad \begin{aligned} \phi_+ &= i(a(x) - ax)\xi_0 - \frac{x^2}{2}, \\ \phi_- &= -i(b(x') - bx')\xi_0 - \frac{x'^2}{2}, \end{aligned}$$

et où $C_1 \geq C_1^0$, $C_2 \geq C_2^0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $|\tau - 1| < 3\kappa$, considérons l'opérateur $s_n^{+, -}(\tau, \lambda): H_0^- \rightarrow H_U$ défini par

$$(4.52) \quad \begin{aligned} s_n^{+, -}(\tau, \lambda)f &= - \sum_{j+m=n} \partial_z^j \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}(l, b)} \frac{d\xi}{z + i(\xi + a\xi_0)} \frac{\partial_x^j}{j!} \left(e^{\lambda\phi_+} \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ &\quad \times \frac{\partial_{x'}^m}{m!} (e^{\lambda\phi_-} \partial_z^m f(x' + z)) \Big|_{x'=0, z=-i(\xi+b\xi_0)}. \end{aligned}$$

Pour étudier cet opérateur, déformons le contour $\mathcal{E}(l, b)$ sur le contour

$$(4.53) \quad \mathcal{E}_b, \quad \xi = \frac{\zeta - b\xi_0}{\sqrt{1+b^2}} = \zeta \cos \gamma_- - \xi_0 \sin \gamma_-,$$

où ζ décrit le contour Γ suivant, supposé contenu dans $\overline{\omega}_0$, avec $\delta > \delta_0$, $\gamma = \gamma_+ - \gamma_- \in]0, \pi[$

$$(4.54)$$

Ce contour Γ est précisé dans l'Appendice C.

Le contour $\mathcal{E}_b$ a l'allure représentée dans la Figure 6 et on a, puisque $\xi_0 = \sin \gamma_- \zeta + \cos \gamma_- \xi_0$,

$$(4.55) \quad \xi + b\xi_0 = \frac{1}{\cos \gamma_-} (\xi \cos \gamma_- + \xi_0 \sin \gamma_-) = \frac{\zeta}{\cos \gamma_-} \in \overline{\omega}_0^-$$

tandis que,

$$(4.56) \quad \begin{aligned} \xi + a\xi_0 &= \frac{1}{\cos \gamma_+} (\xi \cos \gamma_+ + \xi_0 \sin \gamma_+) \\ &= \frac{1}{\cos \gamma_+} (\zeta \cos \gamma + \xi_0 \sin \gamma), \quad \zeta \in \Gamma, \end{aligned}$$

FIGURE 6

décrit un contour d'allure suivante

On montre dans l'Appendice C que l'on peut choisir la famille (ω_σ) de sorte que le contour Γ soit contenu dans $i\overline{\omega}_0$ et que le contour (4.57) défini par (4.56) reste à l'extérieur de $i\overline{\omega}_1^+$. On en déduit que

$$(4.58) \quad s_n^{+,-}(\tau, \lambda): H_0^- \rightarrow H_1^+,$$

$$(4.59) \quad \|s_n^{+,-}(\tau, \lambda)\|_{1,0} \leq D^{n+1} n!.$$

Alors la série formelle

$$(4.60) \quad s^{+,-}(\tau, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{+,-}(\tau, \lambda) \lambda^{-n}$$

est un symbole analytique à valeurs dans l'espace des opérateurs bornés de H_0^-

dans H_1^+ , et la Proposition 4.2 jointe à la formule (4.48) expriment que

$$(4.61) \quad (T_1 \otimes T_0)(S^{+, -} f_-) = \text{Op}(s^{+, -}) F_- + R,$$

où R est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$.

4.5. Développement du second membre. On donne maintenant le développement de la transformée FBI du second membre de (3.109). Notons que, d'après le Lemme 2.2.2, l'image par $T_0 \otimes T_1$ d'une fonction supportée dans $t \geq t_0$ est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$. Modifiant h_+ par une telle fonction, on est ramené à étudier $T_0 \otimes T_1(h_+)$, avec, selon les notations du §3.3,

$$(4.62) \quad h_+ = 1_{x \geq 0}[s_1 + Q_+(1_{x \geq 0}s_2) + S^{+, -}(s_3)],$$

avec

$$(4.63) \quad s_j(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau(t-\theta_a(x))} p_j(x, \tau) d\tau, \quad j = 1, 2$$

$$(4.64) \quad s_3(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau(t-\theta_b(x))} p_3(x, \tau) d\tau,$$

$$(4.65) \quad \theta_a(x) = \theta_i(x, a(x)), \quad \theta_b(x) = \theta_i(x, b(x)),$$

$$(4.66) \quad p_1(x, \tau) = \partial_+ \sigma_i(x, \tau) + \partial_+ \sigma_+(x, \tau),$$

$$(4.67) \quad p_2(x, \tau) = -2i\tau \partial_+ \theta_i(x) \sigma_i(x, a(x), \tau) + \partial_+ \sigma_i(x, \tau) - \partial_+ \sigma_+(x, \tau),$$

$$(4.68) \quad p_3(x, \tau) = -2i\tau \partial_- \theta_i(x) \sigma_i(x, b(x), \tau) + \partial_- \sigma_i(x, \tau) - \partial_- \sigma_-(x, \tau).$$

Étudions d'abord la contribution de s_1 . On a

$$(4.69) \quad \begin{aligned} & T_0 \otimes T_1(1_{x \geq 0}s_1) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda w\tau - \lambda\tau^2/2} \int_0^\infty \psi_2(x) e^{\lambda xz - \lambda x^2/2 - i\lambda\tau\theta_a(x)} p_1(x, \lambda\tau) dx d\tau. \end{aligned}$$

Puisque $\text{Re } z < 0$ dans U , on peut remplacer le domaine d'intégration en τ par $[1 - 2\kappa, 1 + 2\kappa]$, puis développer l'intégrale en x pour obtenir

$$(4.70) \quad \begin{aligned} & T_0 \otimes T_1(1_{x \geq 0}s_1) \\ & \sim \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{1-2\kappa}^{1+2\kappa} e^{i\lambda w\tau - \lambda\tau^2/2} \sum_{n \leq \lambda/C} \lambda^{-n-1} \\ & \quad \times \left(\frac{-1}{z - i\tau} \right)^{n+1} \partial_x^n (e^{-\lambda x^2/2 - i\lambda\tau\tilde{\theta}_a(x)} p_1(x, \lambda\tau))|_{x=0} \end{aligned}$$

modulo un élément négligeable de $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$, avec $\tilde{\theta}_a(x) = \theta_a(x) - \theta'_a(0)x = \theta_a(x) - x$. On posera de même $\tilde{\theta}_b(x) = \theta_b(x) - x$.

Les deux autres termes font l'objet de la proposition suivante, démontrée dans l'Appendice B.

Proposition 4.3. *On pose*

$$I_2(t, \tau, z, \lambda) = T_1(1_{x \geq 0} Q_{\lambda \tau}^+(1_{x \geq 0} s_2))(t - i\tau, z, \lambda),$$

et

$$I_3(t, \tau, z, \lambda) = T_1(S_{\lambda \tau}^{+, -}(s_3))(t - i\tau, z, \lambda).$$

Alors il existe $t_0^1 > 0$, et, pour tout $t_0 \in]0, t_0^1]$, $\kappa, a', l, C_1^0, C_2^0, \rho$, tels que, pour $C_1 \geq C_1^0, C_2 \geq C_2^0$, on ait, modulo un élément négligeable de $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$,

$$(4.71) \quad I_2 \sim \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{1-4\kappa}^{1+4\kappa} e^{i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} \times \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_1} j_2(t, \tau, z, \tau', \xi, \lambda) d\xi d\tau',$$

$$(4.72) \quad j_2 = J_\rho^{-1} \sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left(\frac{1}{z + i\xi} \right) \frac{\lambda^{-m-1}}{(i(\xi + \tau'))^{m+1}} \\ \times \frac{\partial_x^n}{n!} \partial_{x'}^m (\sigma(x, x', \xi, \tau) p_2(x', \lambda\tau') e^{-i\lambda\tau\tilde{\theta}_a(x')}) \Big|_{x=x'=0},$$

$$(4.73) \quad I_3 \sim \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{1-4\kappa}^{1+4\kappa} e^{i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}(l, b)} j_3(t, \tau, z, \tau', \xi, \lambda) d\xi d\tau',$$

$$(4.74) \quad j_3 = - \sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left(\frac{1}{z + i(\xi + a\xi_0)} \right) \frac{\lambda^{-m-1}}{(i(\xi + b\xi_0 + \tau'))^{m+1}} \\ \times \frac{\partial_x^n}{n!} \left(e^{\lambda\phi_+} \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ \times \partial_{x'}^m (e^{\lambda\phi_- - i\lambda\tau'\tilde{\theta}_b(x')} p_3(x', \lambda\tau')) \Big|_{x'=0}.$$

Par la Proposition 2.2, on a par ailleurs, modulo des éléments négligeables dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$,

$$(4.75) \quad (T_0 \otimes T_1)(1_{x \geq 0} Q^+(1_{x \geq 0} s_2)) \sim \frac{\lambda}{2\pi} \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau e^{i\lambda(w-t)\tau - \lambda\tau^2} I_2,$$

$$(4.76) \quad (T_0 \otimes T_1)(S^{+, -}(s_3)) \sim \frac{\lambda}{2\pi} \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{\tau_-}^{\tau_+} d\tau e^{i\lambda(w-t)\tau - \lambda\tau^2} I_3.$$

Nous allons maintenant comparer le développement asymptotique de $T_0 \otimes T_1(h_+)$ ainsi obtenu dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$ à un élément de $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_1^+)$. Dans les développements qui suivent, C désignera une constante assez grande, dont on se réserve la possibilité d'augmenter la valeur, et r un élément négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$.

Commençons par (4.70), et appliquons à l'intégrale en τ la formule de la phase stationnaire suivante

$$(4.77) \quad \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{1-2\kappa}^{1+2\kappa} e^{i\lambda\tau w - \lambda\tau^2/2} q(\tau) d\tau \sim e^{-\lambda w^2/2} \sum_{k \leq \lambda/C} (2\lambda)^{-k} \frac{1}{k!} \partial_\tau^{2k} q(iw),$$

modulo un élément négligeable de $H_{\varphi_0}(W_\kappa)$. En regroupant les puissances de $(z+w)^{-1}$ ainsi obtenues, on a

$$(4.78) \quad T_0 \otimes T_1(1_{x \geq 0} s_1) = e^{-\lambda w^2/2} \sum_{n \leq \lambda/C} \frac{1}{(z+w)^{n+1}} s_{1,n}(w, \lambda) + r,$$

$$(4.79) \quad n \leq \frac{\lambda}{C} \Rightarrow |s_{1,n}(w, \lambda)| \leq D\lambda^D \theta(C)^n, \quad \theta(C) \xrightarrow{C \rightarrow +\infty} O^+.$$

Passons au développement donné par (4.71), (4.72), (4.75). On écrit

$$(4.80) \quad \int_{\mathcal{E}_1} j_2 d\xi = \int_{\mathcal{E}_2} j_2 d\xi + 2i\pi j'_2,$$

où $\mathcal{E}_2$ est le contour suivant,

(4.81)

avec $\eta \ll 1$, de sorte que $\mathcal{E}_2$ soit à l'extérieur de ω_1^+ , et où j'_2 est le résidu de j_2 en $\xi = -\tau'$, soit

$$(4.82) \quad j'_2 = J_\rho^{-1} \sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_\xi \right)^m \\ \times \left(\frac{(i\lambda)^{-1}}{z + i\xi} \frac{\partial_x^n}{n!} \frac{\partial_{x'}^m}{m!} (\sigma(x, x', \xi, \tau) p_2(x', \lambda\tau') e^{-i\lambda\tau' \bar{\theta}_a}) \right) \Big|_{x=x'=0, \xi=-\tau'}.$$

Notons

$$(4.83) \quad \phi(w, t, \tau, \tau') = \tau(w - t) + i\tau^2 + \tau'(t - i\tau) + i\frac{\tau'^2}{2},$$

et désignons par Σ le contour en t, τ, τ'

$$(4.84) \quad \Sigma: t \in [t_-, t_+], \quad \tau \in [\tau_-, \tau_+], \quad \tau' \in [1 - 4\kappa, 1 + 4\kappa].$$

La valeur critique de ϕ étant $iw^2/2$, on pose

$$(4.85) \quad \varphi_1(w) = -\text{Im} \left(i \frac{w^2}{2} \right) = \frac{1}{2} [(\text{Im } w)^2 - (\text{Re } w)^2].$$

et une déformation de Σ sur $\tilde{\Sigma}$ assure que $l_3^+ \in H_{\varphi_1}(W_\kappa, H_1^+)$.

En conclusion, on peut écrire

$$(4.94) \quad (T_0 \otimes T_1)(h_+)(w, z, \lambda) = l_2^+(w, z, \lambda) + l_3^+(w, z, \lambda) + \sum_{n \leq \lambda/C} \frac{r_n(w, \lambda)}{(z+w)^{n+1}} + r,$$

où r est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$, et où

$$(4.95) \quad n \leq \frac{\lambda}{C} \Rightarrow |r_n(w, \lambda)| \leq D \lambda^D e^{\lambda \varphi_1(w)} \theta(C)^n, \quad \theta(C) \xrightarrow{C \rightarrow +\infty} O^+.$$

4.6. Système microlocalisé. Appliquons maintenant l'opérateur $T_0 \otimes T_1$ à la première équation du système (3.109). Compte tenu des identités (4.47), (4.61), et (4.94), et en utilisant le Lemme 2.2 pour traiter le cas de r_+ , on obtient

$$(4.96) \quad R(w, z, \lambda) + \sum_{n \leq \lambda/C} \frac{r_n(w, \lambda)}{(z+w)^{n+1}} = \tilde{R}(w, z, \lambda),$$

où $\tilde{R}$ est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$, les r_n satisfont à (4.95), et où

$$(4.97) \quad R = F_+ - J_\rho^{-1} \text{Op}(q^+) J_\rho F_+ - \text{Op}(s^{+, -}) F_- - l_2^+ - l_3^+.$$

Or les estimations sur $F_\pm$, l'étude des opérateurs q^+ et $s^{+, -}$ faite aux §§4.3 et 4.4, et les estimations sur l_2^+, l_3^+ obtenues en §4.5 permettent d'affirmer que

$$(4.98) \quad R \in H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_1^+).$$

Fixons par ailleurs $\alpha > 0$ petit tel que le disque fermé D de centre i et de rayon α soit contenu dans ω_1^+ , et posons $\tilde{\omega} = \omega_1^+ \setminus D$. Alors pour κ assez petit, $-W_\kappa \subset D$, et, compte tenu des estimations (4.95) sur les r_n , on a, si C est assez grand pour que $\theta(C) < \alpha$,

$$(4.99) \quad \tilde{R} \in H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_{\tilde{\omega}}).$$

En appliquant le principe du maximum [L2] à la fonction holomorphe

$$(4.100) \quad z \in \tilde{\omega} \mapsto \tilde{R}(w, z, \lambda)$$

on conclut que $\tilde{R}$ est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_{\tilde{\omega}'})$ pour tout $\tilde{\omega}' \Subset \tilde{\omega}$; en particulier, si C est un cercle de centre i et de rayon $\beta > \alpha$ contenu dans $\tilde{\omega}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(4.101) \quad \left| \frac{1}{2i\pi} \int_C (z+w)^n \tilde{R}(w, z, \lambda) dz \right| \leq D e^{\lambda \varphi_0(w) - \lambda/D},$$

soit, en revenant à (4.96), et en utilisant (4.98),

$$(4.102) \quad |r_n(w, \lambda)| \leq D e^{\lambda \varphi_0(w) - \lambda/D}.$$

Mais alors (4.96) entraîne que R est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_U)$. En choisissant l'angle δ_1 , associé à ω_1^+ supérieur à l'angle ε associé à U , on constate

que $\omega_1^+ \setminus U$ est borné, et, en appliquant à nouveau le principe du maximum [L2] à $z \in \omega_1^+ \mapsto R(w, z, \lambda)$, on conclut que R est négligeable dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_\sigma^+)$ pour tout $\sigma < 1$.

On peut évidemment reprendre les §§4.3, 4.4, 4.5 et l'argument précédent pour la seconde équation de (3.109). On obtient finalement le système suivant:

$$(4.103) \quad \begin{cases} F_+ - J_\rho^{-1} \text{Op}(q^+) J_\rho F_+ - \text{Op}(s^{+, -}) F_- = l_2^+ + l_3^+ + R^+, \\ F_- - J_\rho^{-1} \text{Op}(q^-) J_\rho F_- - \text{Op}(s^{-, +}) F_+ = l_2^- + l_3^- + R^-, \end{cases}$$

où $R^\pm$ sont négligeables dans $H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_\sigma^\pm)$, $\forall \sigma < 1$, $F_\pm \in H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_1^\pm)$, q^+ , $s^{+, -}$ et l_2^+ , l_3^+ ont été définis en ((4.37), (4.46)), ((4.52), (4.60)), et ((4.72), (4.86)), ((4.74), (4.93)) respectivement. On a de même:

$$(4.104) \quad q^-(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^-(\tau, \lambda) \lambda^{-n},$$

où q_n^- est donné par (4.37), en remplaçant σ par

$$(4.105) \quad \sigma' = \left(\frac{\xi}{\xi_-} + \nu \right) \left(\frac{b'(x) - \nu}{1 + \nu^2} \right),$$

et où $\mathcal{E}^0$ est remplacé par $i\partial\omega_0^-$ de sorte que q_n^- est un symbole à valeurs opérateurs dans la chaîne H_σ^- ,

$$(4.106) \quad s^{-, +}(\tau, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{-, +}(\tau, \lambda) \lambda^{-n},$$

$$(4.107) \quad \begin{aligned} & s_n^{-, +}(\tau, \lambda) f(z) \\ &= - \sum_{j+m=n} \partial_z^j \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}_{-a}} \frac{d\xi}{z + i(\xi - b\xi_0)} \frac{\partial_x^j}{j!} \left(e^{\lambda\phi_-} \left(1 + b'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ & \quad \times \frac{\partial_{x'}^m}{m!} (e^{\lambda\phi_+} \partial_z^m f(x' + z)) \Big|_{x'=0, z=-i(\xi - a\xi_0)}, \end{aligned}$$

où les phases $\phi_\pm$ ont été définies en (4.51), et où $\mathcal{E}_{-a}$ désigne le contour suivant:

$$(4.108) \quad \mathcal{E}_{-a}: \quad \xi = \frac{\zeta + a\xi_0}{\sqrt{1+a^2}} = \zeta \cos \gamma_+ + \xi_0 \sin \gamma_+,$$

où ζ décrit le contour Γ défini en (4.54).

Ainsi on vérifie que $s^{-, +}$ est un symbole à valeurs opérateurs de H_0^+ dans H_1^- . Enfin, l_2^- , l_3^- sont donnés par

$$(4.109) \quad l_2^-(w, z, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{3/2} \iiint_{\Sigma} e^{i\lambda\phi} \left(\int_{\mathcal{E}_2'} j_4 \frac{d\xi}{2\pi} \right) dt d\tau d\tau',$$

$$(4.110) \quad j_4 = J_\rho^{-1} \sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left(\frac{1}{z + i\xi} \right) \frac{\lambda^{-m-1}}{(i(\xi + \tau'))^{m+1}} \frac{\partial_x^n}{n!} \\ \times \partial_{x'}^m (\sigma'(x, x', \xi, \tau) p_3(x', \lambda \tau') e^{-i\lambda \bar{\theta}_b(x')})|_{x=x'=0},$$

où $\mathcal{E}'_2$ est le contour (4.81), a étant remplacé par b , ϕ est définie en (4.83),

$$(4.111) \quad l_3^-(w, z, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{3/2} \iiint_{\Sigma} e^{i\lambda \phi} \left(\int_{\mathcal{E}(l, -b)} j_5 \frac{d\xi}{2\pi} \right) dt d\tau d\tau',$$

$$(4.112) \quad j_5 = - \sum_{\substack{n \leq \lambda/C_1 \\ m \leq \lambda/C_2}} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left(\frac{1}{z + i(\xi - b\xi_0)} \right) \frac{\lambda^{-m-1}}{(i(\xi - a\xi_0 + \tau'))^{m+1}} \frac{\partial_x^n}{n!} \\ \times \left(e^{\lambda \phi_-} \left(1 + b'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right) \Big|_{x=0} \times \partial_{x'}^m (e^{\lambda \phi_+ - i\lambda \tau' \bar{\theta}_a(x')} p_2(x', \lambda \tau'))|_{x'=0},$$

où $\mathcal{E}(l, -b)$ est le contour (4.91), a étant remplacé par b .

On a $l_2^-, l_3^- \in H_{\varphi_1}(W_\kappa, H_1^-)$. Posons alors

$$(4.113) \quad G_\pm = J_\rho F_\pm, \quad L_\pm = J_\rho (l_2^\pm + l_3^\pm + R^\pm), \quad \tilde{s}^{\pm, \mp} = J_\rho s^{\pm, \mp} J_\rho^{-1}.$$

Pour ρ assez petit, on a

$$(4.114) \quad G_\pm \in H_{\varphi_0}(W_\kappa, H_{2/3}^\pm), \\ L_\pm \in H_{\varphi_1}(W_\kappa, H_{2/3}^\pm), \tilde{s}^{\pm, \mp}: H_{1/3}^\mp \rightarrow H_{2/3}^\pm;$$

de plus, (4.103) devient

$$(4.115) \quad \begin{cases} G_+ - \text{Op}(q^+)G_+ - \text{Op}(\tilde{s}^{+, -})G_- = L_+, \\ G_- - \text{Op}(q^-)G_- - \text{Op}(\tilde{s}^{+, -})G_+ = L_- \end{cases}$$

qui est un système pseudo-différentiel à valeurs opérateurs dans la chaîne $H_\sigma^+ \oplus H_\sigma^-$, $\sigma \in [1/3, 2/3]$. Compte tenu des formules précédentes, le symbole principal de ce système est $I - \tilde{A}(\tau, \lambda)$ où

$$(4.116) \quad \tilde{A}(\tau, \lambda) = J_\rho \begin{pmatrix} 0 & s_0^{+, -}(\tau) \\ s_0^{-, +}(\tau) & 0 \end{pmatrix} J_\rho^{-1},$$

et en posant

$$(4.117) \quad M_\pm f(z) = f(\cos \gamma_\pm z),$$

de sorte que $M_\pm: H_\sigma \rightarrow H_\sigma^\pm$, on a

$$(4.118) \quad s_0^{\pm, \mp}(\tau) = M_\pm S(\tau) M_\mp^{-1},$$

$$(4.119) \quad S(\tau)g(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\cos \gamma - \zeta \sin \gamma / \zeta_0}{z + i(\zeta \cos \gamma + \zeta_0 \sin \gamma)} g(-i\zeta) d\zeta.$$

Enfin, en vue d'identifier, à la §6, le terme principal de $F_{\pm}$, il est utile de calculer celui de $L_{\pm}$, à l'aide des formules ((4.86), (4.72)), ((4.93), (4.74)), ((4.109), (4.110)), ((4.111), (4.112)), (4.67), (4.68), soit, après avoir éliminé les variables t, τ, τ' par la formule de la phase stationnaire,

$$(4.120) \quad L_{\pm}^0 = J_{\rho}(m_{\pm})\sigma_i(0, 0, i\lambda w)e^{-\lambda w^2/2},$$

$$(4.121) \quad m_+(w, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}(l, a)} \frac{1 - a\xi/\xi_0}{z + i(\xi + a\xi_0)} \frac{2b}{\xi + b\xi_0 + iw} d\xi,$$

$$(4.122) \quad m_-(w, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}(l, -b)} \frac{1 + b\xi/\xi_0}{z + i(\xi - b\xi_0)} \frac{2a}{\xi - a\xi_0 + iw} d\xi,$$

où ξ_0 est relatif à $\tau = iw$, i.e., $\xi_0 = (-w^2 - \xi^2)^{1/2}$.

5. INVERSION DU SYMBOLE PRINCIPAL

Le but de cette section est de prouver que le système pseudo-différentiel (4.115) est elliptique, ce qui, compte tenu de la Proposition A.3 de l'Appendice A, équivaut à prouver que l'opérateur $I - \tilde{A}(\tau, \lambda)$ est inversible de $H_{\sigma'}^+ \oplus H_{\sigma'}^-$ dans $H_{\sigma}^+ \oplus H_{\sigma}^-$ ($\sigma' > \sigma$) pour tout τ dans un voisinage de 1, et pour λ assez grand. En fait, compte tenu des propriétés régularisantes de $\tilde{A}(\tau, \lambda)$ on peut travailler à l'intérieur d'un même espace $H_{\sigma}^+ \oplus H_{\sigma}^-$, par exemple $H_0^+ \oplus H_0^-$. Enfin, les formules (4.116), (4.117), et (4.118) montrent que l'on est ramené à étudié l'inversibilité sur $H_0 \oplus H_0$ de l'opérateur $I - A(\tau)$, où

$$(5.1) \quad A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & S(\tau) \\ S(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

et $S(\tau)$ est donné par (4.119). Notons que, comme les notations le suggèrent, $S(\tau)$ ne dépend pas de λ . On peut donc supposer dans ce paragraphe que les éléments de l'espace H_0 sont des fonctions holomorphes indépendantes de λ . Enfin l'argument usuel de perturbation permet de supposer $\tau = 1$, ce que nous ferons dans tout ce paragraphe. On a donc $\xi_0 = (1 - \xi^2)^{1/2}$.

Désignons par L l'espace des fonctions φ holomorphes dans $\text{Re } z < 0$, vérifiant

$$(5.2) \quad \sup_{s < 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s + i\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Le théorème de Paley-Wiener affirme que L coïncide avec les fonctions de la forme

$$(5.3) \quad \varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{zx} \Phi(x) dx,$$

où $\Phi \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et φ est une fonction holomorphe sur un domaine D , $R_{\alpha}\varphi$ désigne la fonction holomorphe sur le domaine $e^{-i\alpha}D$ définie par

$$(5.4) \quad R_{\alpha}\varphi(z) = \varphi(e^{i\alpha}z).$$

FIGURE 7

Lemme 5.1. *Il existe $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que l'opérateur $R_\alpha S(1)$ soit borné de H_0 dans L .*

Démonstration. Reprenons l'expression (4.119) avec $\tau = 1$. Lorsque ζ décrit Γ , le point $z = -i(\zeta \cos \gamma + \zeta_0 \sin \gamma)$ décrit un contour du type représenté dans la Figure 7.

Il existe $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que ce contour ne rencontre pas le demi-plan $e^{i\alpha}\{\operatorname{Re} z \leq 0\}$. On en déduit le Lemme 5.1. $\square$

On va utiliser le lemme précédent pour déformer le problème initial sur un problème elliptique. Soit α comme ci-dessus, et soit $g \in H_0$ telle que $R_\alpha g \in L$. En déformant le contour Γ sur le contour $e^{i\alpha}\mathbb{R}$, on obtient

$$(5.5) \quad R_\alpha S(1)g = S_\alpha R_\alpha g,$$

où

$$S_\alpha \varphi(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos \gamma - \zeta \sin \gamma / \zeta_\alpha)}{z + i(\zeta \cos \gamma + \zeta_\alpha \sin \gamma)} \varphi(-i\zeta) d\zeta$$

avec $\zeta_\alpha = (e^{-2i\alpha} - \zeta^2)^{1/2}$, $\operatorname{Im} \zeta_\alpha > 0$.

L'intérêt du système $I - A_\alpha$, avec $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & S_\alpha \\ S_\alpha & 0 \end{pmatrix}$ est qu'il est aisément inversible sur L , car il s'exprime comme un problème elliptique sur l'ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = ax, x \geq 0\} \setminus \{y = bx, x \geq 0\}$. En effet, si $\varphi_\pm \in L$, définissons $\Phi_\pm \in L^2(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \Phi_\pm \subset \mathbb{R}_+$, par

$$(5.6) \quad \varphi_\pm(-i\zeta) = \widehat{\Phi}_\pm \left(\frac{\zeta}{\cos \gamma_\pm} \right)$$

en vertu de la formule (5.3). Alors on vérifie aisément la formule

$$(5.7) \quad \frac{1}{2} S_\alpha \varphi_\mp(-i\xi) = \mathcal{F}[1_{x>0} \partial_\pm (\Delta + e^{-2i\alpha})^{-1} (\Phi_\mp \delta_\mp)] \left(\frac{\xi}{\cos \gamma_\pm} \right),$$

où $\partial_\pm \psi(x) = \pm(\partial_y - \operatorname{tg} \gamma_\pm \partial_x) \psi|_{y-\operatorname{tg} \gamma_\pm x=0^\pm}$.

On introduit de façon analogue $\partial'_\pm$ par

$$\partial'_\pm \psi(x) = \pm(\partial_y - \operatorname{tg} \gamma_\pm \partial_x) \psi|_{y-\operatorname{tg} \gamma_\pm x=0^\mp}.$$

Considérons le système

$$(5.8) \quad \begin{cases} (\Delta + e^{-2i\alpha})U = 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ U|_{y-\operatorname{tg} \gamma_\pm x=0^+} = U|_{y-\operatorname{tg} \gamma_\pm x=0^-}, \\ \partial'_\pm U = -\frac{\Phi_\pm}{2}. \end{cases}$$

Le Théorème D.1 de l'Appendice D, assure que (5.8) est bien posé dans le sous-espace E de $H^1(\mathbb{R}^2)$ défini en coordonnées polaires par

$$U \in C_\theta(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, H_r^1(\mathbb{R}_+)), \\ \frac{1}{r} \partial_\theta U \in C_\theta([\gamma_-, \gamma_+], L^2(\mathbb{R}_+)) \cap C_\theta([\gamma_+, 2\pi + \gamma_-], L^2(\mathbb{R}_+)).$$

On pose alors

$$(5.9) \quad \Psi_\pm = 1_{x>0} (\partial_\pm - \partial'_\pm) U \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

de sorte que, dans $\mathbb{R}^2$ tout entier,

$$(\Delta + e^{-2i\alpha})U = \Psi_+ \delta_+ + \Psi_- \delta_-.$$

En posant

$$(5.10) \quad \psi_\pm(-i\xi) = \widehat{\Psi}_\pm \left(\frac{\xi}{\cos \gamma_\pm} \right)$$

et en appliquant la formule (5.7) à $\psi_\pm$, on en déduit

$$\psi_\pm - \frac{\varphi_\pm}{2} = \frac{1}{2} \psi_\pm + \frac{1}{2} S_\alpha \psi_\mp$$

soit encore

$$(5.11) \quad (I - A_\alpha) \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}.$$

Inversement, si $\psi_\pm$ est solution de (5.11), la fonction

$$U = (\Delta + e^{-2i\alpha})^{-1} (\Psi_+ \delta_+ + \Psi_- \delta_-)$$

est solution du système (5.8), en remontant les calculs. On a donc prouvé le:

Lemme 5.2. *Le système (5.11) est bien posé dans $L \times L$.*

Passons à l'inversion de $I - A(1): H_0 \oplus H_0 \rightarrow H_0 \oplus H_0$. Montrons d'abord l'injectivité. Si $g = (g_+, g_-)$ vérifie

$$(5.12) \quad (I - A(1))g = 0,$$

alors $g = A(1)g$ donc $R_\alpha g \in L$ par le Lemme 5.1, et on peut écrire, en vertu de (5.4),

$$R_\alpha A(1)g = A_\alpha R_\alpha g.$$

En appliquant R_α à (5.12), on en déduit

$$(I - A_\alpha)R_\alpha g = 0,$$

et le Lemme 5.2 entraîne que $R_\alpha g = 0$, donc $g = 0$.

Soit maintenant $h = (h_+, h_-) \in H_0 \oplus H_0$. Posons

$$(5.13) \quad g_1 = R_{-\alpha}(I - A_\alpha)^{-1}R_\alpha A(1)h.$$

A priori $g_1 \in R_{-\alpha}(L) \oplus R_{-\alpha}(L)$ seulement, et n'est donc pas dans $H_0 \oplus H_0$. Cependant, on a le:

Lemme 5.3. *Pour $k \in R_{-\alpha}(L)$, on définit*

$$S(1)k(z) = R_{-\alpha}S_\alpha R_\alpha k \in R_{-\alpha}(L).$$

Alors, si n est un entier tel que $n \geq \pi/2\gamma$, on a

$$S(1)^n: R_{-\alpha}(L) \rightarrow H_0.$$

Supposons ce lemme prouvé, et terminons la construction de $(I - A(1))^{-1}h$. On pose, pour n comme dans le Lemme 5.3,

$$(5.14) \quad g = h + A(1)h + \cdots + A(1)^n h + A(1)^n g_1.$$

Alors $g \in H_0 \times H_0$ d'après le Lemme 5.3, et on a, grâce à une déformation de Γ sur $\mathbb{R}e^{i\alpha}$,

$$g - A(1)g = h - A(1)^{n+1}h + A(1)^n(g_1 - A(1)g_1).$$

Par construction,

$$g_1 - A(1)g_1 = R_{-\alpha}(I - A_\alpha)(I - A_\alpha)^{-1}R_\alpha A(1)h = A(1)h,$$

donc $g - A(1)g = h$.

En résumé, on aura donc prouvé la:

Proposition 5.1. *L'opérateur $I - A(1): H_0 \times H_0 \rightarrow H_0 \times H_0$ est inversible, et*

$$(I - A(1))^{-1} = \sum_{\kappa=0}^n A(1)^\kappa + A(1)^n R_{-\alpha}(I - A_\alpha)^{-1}R_\alpha A(1),$$

où n est un entier $\geq \pi/2\gamma$, et où $(I - A_\alpha)^{-1}$ est décrit par les relations (5.11), (5.6), (5.10), (5.9), (5.8).

Il reste à prouver le Lemme 5.3. Pour $k \in R_{-\alpha}(L)$, on a

$$S(1)k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}e^{i\alpha}} \frac{(\cos \gamma - \zeta \sin \gamma / \zeta_0)}{z + i(\xi \cos \gamma + \zeta_0 \sin \gamma)} k(-i\zeta) d\zeta.$$

FIGURE 8

FIGURE 9

Supposons d'abord $\gamma < \pi/2$. Lorsque ζ décrit $\mathbb{R}e^{i\alpha}$, on constate que $z = -i(\zeta \cos \gamma + \zeta_0 \sin \gamma)$ décrit un contour du type représenté dans la Figure 8.

On en déduit que $S(1)k$ est holomorphe, L^2 à l'infini, sur un domaine du type représenté dans la Figure 9.

L'épaisseur de ce domaine dans $\text{Re } z > 0$ peut être supposée grande par rapport à celle de ω_0 .

Si $\sin \gamma \geq \cos \gamma$, on peut alors calculer $S(1)^2 k$ au moyen du contour Γ (voir (4.54)), et conclure que $S(1)^2 k \in H_0$.

Sinon, on calcule $S(1)^2 k$ avec le contour en ζ représenté dans la Figure 10, p. 394.

En général supposons que l soit holomorphe, L^2 à l'infini, dans un domaine du type représenté dans la Figure 11, p. 394, avec $\theta \in [0, \pi/2 - \gamma[$. Alors, en intégrant sur le contour en ζ représenté sur la Figure 12, p. 394, on constate que $S(1)l$ est holomorphe dans un domaine du même type, θ étant remplacé par $\theta + \gamma$. On en déduit que, si $n\gamma < \pi/2$, $S(1)^n R_{-\alpha}$ envoie L dans les fonctions holomorphes dans un domaine de ce type, avec $\theta = n\gamma$. Si $\sin n\gamma \geq \cos \gamma$,

FIGURE 10

FIGURE 11

FIGURE 12

FIGURE 13

i.e., $(n+1)\gamma \geq \pi/2$, alors on peut déformer sur le contour Γ et conclure que $S(1)^{n+1}R_{-\alpha}$ envoie L dans H_0 .

Si maintenant $\gamma \geq \pi/2$, on déforme $\mathbb{R}e^{i\alpha}$ sur un contour passant par $-\cos \gamma$ (voir la Figure 13) et on conclut immédiatement que $S(1)R_{-\alpha}: L \rightarrow H_0$.

6. FIN DE LA DÉMONSTRATION

D'après la §5 et la Proposition A.3 de l'Appendice A, le système (4.115) se résout suivant

$$(6.1) \quad (G_+, G_-) = \mathcal{B}(L_+, L_-),$$

où $\mathcal{B}$ est un opérateur pseudo-différentiel à valeurs opérateurs dans la chaîne $H_\sigma^+ \oplus H_\sigma^-$, de symbole principal $(I - \tilde{A}(\tau, \lambda))^{-1}$, où $\tilde{A}(\tau, \lambda)$ a été défini en (4.116). En appliquant J_ρ^{-1} , on en déduit que

$$(6.2) \quad (F_+, F_-) = \mathcal{A}(l_2^+ + l_3^+, l_2^- + l_3^-)$$

modulo un élément négligeable de $H_{\varphi_0}(W_{\kappa/2}, H_0^+ \oplus H_0^-)$, avec $\mathcal{A} = J_\rho^{-1} \mathcal{B} J_\rho$, dont le symbole principal est, compte tenu de (4.116), (4.118), (5.1):

$$(6.3) \quad \sigma_0(\mathcal{A})(\tau) = M(I - A(\tau))^{-1} M^{-1},$$

$$(6.4) \quad M = \begin{pmatrix} M_+ & 0 \\ 0 & M_- \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition A.1 de l'Appendice A avec $\varphi = \varphi_1$, les estimations sur $l_2^\pm, l_3^\pm$, on conclut que

$$(6.5) \quad F_\pm \in H_{\varphi_1}(W_{\kappa/2}, H_0^+ \oplus H_0^-).$$

Une telle estimation signifie exactement (voir [L1]) que $f_\pm$ est conormale analytique par rapport à $\{t = x = 0\}$ près de $\tau > 0$, en dehors d'un voisinage d'ordre ε_2 de la direction $\xi + \tau/\cos \gamma_\pm = 0$. Posons alors

$$(6.6) \quad u_d(t, x, y) = -\square^{-1}(f_+ \delta_+ + f_- \delta_-).$$

D'après (3.108), on a, près de $t = 0$,

$$(6.7) \quad u = u_e + u_d.$$

D'autre part, en écrivant la paramétrix de $\square$ dans les espaces H_φ (voir [S2]) et en utilisant l'action des transformations canoniques quantifiées sur le second micro-support à croissance relativement à une lagrangienne (voir [L1]) on conclut que u_d est conormale analytique par rapport à $\{t = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, près de $t > 0$, et, si ε_2 a été choisi assez petit par rapport à ε , pour $(t, x, y) \in \Omega^\varepsilon$, et $t < \varepsilon_1$, pour ε_1 assez petit.

En reprenant la démonstration en microlocalisant près de $\tau = -1$, $t = 0$, on démontre le même résultat près de $\tau < 0$. Ceci entraîne qu'il existe un symbole analytique $\sigma_d = \sigma_d(x, y, \tau)$ tel que, modulo une fonction analytique, on ait, dans $\Omega^\varepsilon \cap \{0 < t < \varepsilon_1\}$,

$$(6.8) \quad u_d(t, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(t - \sqrt{x^2 + y^2})} \sigma_d(x, y, \tau) \frac{d\tau}{2\pi},$$

où, compte tenu de la vitesse finie de propagation,

$$(6.9) \quad \sup_{s \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \tau^2)^{-D} |\sigma_d(x, y, \tau - is)|^2 d\tau < +\infty,$$

pour un certain réel D . Ceci prouve le point (1.16) du Théorème 1.1 et le fait que u_d est conormale analytique sur Σ_d . Pour vérifier les points (1.17) à (1.20) il suffit à présent d'identifier σ_d .

Fixons (x_0, y_0) , avec $(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, x_0, y_0) \in \Omega^\varepsilon \cap \{t < \varepsilon_1\}$, $x_0 = t_0 \cos \theta_0$, $y_0 = t_0 \sin \theta_0$, $t_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Soit $\sigma_+(\tau, \xi)$ un symbole analytique de degré d , au sens L^2 , défini au voisinage conique de (τ_0, ξ_0) , $\tau_0 = 1$, $\xi_0 = -\cos(\theta_0 - \gamma_+) \tau_0 / \cos \gamma_+$, $(\theta_0 - \gamma_+) \neq 0$ tel que microlocalement près de $t = x = 0$, $\tau = \tau_0$, $\xi = \xi_0$ on ait

$$(6.10) \quad f_+ = (2\pi)^{-2} \int e^{i\tau t + i x \xi} \sigma_+ d\tau d\xi.$$

Alors près de $(t_0, x_0, y_0, \tau_0, \xi_0 = -\cos \theta_0, \eta_0 = -\sin \theta_0)$ on obtient microlocalement par un calcul classique sur les paramétrix des opérateurs à caractéristiques simples

$$(6.11) \quad g_+ = -\square^{-1}(f_+ \delta_+) = \int e^{i\tau(t - \sqrt{x^2 + y^2})} \sigma_{d,+}(x, y, \tau) \frac{d\tau}{2\pi}$$

avec, r désignant un symbole de degré $\leq d - 3/2$,

$$(6.12) \quad \sigma_{d,+}(x, y, \tau) = \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\tau}} (x^2 + y^2)^{-1/4} \sigma_+ \left(\tau, -\tau \frac{x + ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + r$$

et d'autre part, près de $w = -i\tau_0$, $z = i\tau_0(x_0 + ay_0)/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$,

$$(6.13) \quad F_+(w, z, \lambda) = e^{-\lambda w^2/2} \sum_{\substack{m \leq \lambda/C, \\ n \leq \lambda/C}} (2\lambda)^{-(n+m)} \frac{\partial_\tau^{2n}}{n!} \frac{\partial_\xi^{2m}}{m!} \sigma_+(\lambda\tau, \lambda\xi) \Big|_{\tau=iw, \xi=iz} \\ + \mathcal{O}(e^{\lambda\varphi_0(w) - \lambda/D}).$$

En comparant (6.12) et (6.13), on obtient donc au premier ordre

$$(6.14) \quad \sigma_{d,+}(x, y, \tau) \sim \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi\tau}} (x^2 + y^2)^{-1/4} e^{-\tau/2} F_+ \left(-i, i \frac{x + ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tau \right)$$

et, en utilisant les formules (6.2), (6.3), (6.4) et la Remarque A.2 de l'Appendice A, on a, au premier ordre

$$(6.15) \quad (F_+, F_-)(-i, \tau) \sim M(1 - A(1))^{-1} M^{-1}(l_2^+ + l_3^+, l_2^- + l_3^-)(-i, \tau),$$

et, compte tenu de (4.120), (4.121), (4.122),

$$(6.16) \quad (l_2^\pm + l_3^\pm)(-i, z, \tau) \sim \sigma_i(0, 0, \tau) m_\pm(-i, z) e^{\tau/2}.$$

On en déduit que le terme principal de $\sigma_{d,+}$ pour $\tau > 0$ est, en posant $x/\sqrt{x^2 + y^2} = \cos \theta$, $y/\sqrt{x^2 + y^2} = \sin \theta$,

$$(6.17) \quad \sigma_{d,+}^0(x, y, \tau) = (\tau \sqrt{x^2 + y^2})^{-1/2} K_+(\cos(\theta - \gamma_+)) \sigma_i(0, 0, \tau),$$

où K_+ est une fonction spéciale que nous caractérisons ci-dessous. De même la contribution principale de $-\square^{-1}(f_- \delta_-)$ à $\sigma_d(x, y, \tau)$ est donnée par

$$(6.18) \quad \sigma_{d,-}^0(x, y, \tau) = (\tau \sqrt{x^2 + y^2})^{-1/2} K_-(\cos(\theta - \gamma_-)) \sigma_i(0, 0, \tau).$$

Enfin les fonctions K_+, K_- sont données par les formules suivantes:

$$(6.19) \quad (K_+, K_-) = \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} (1 - A(1))^{-1} (\hat{m}_+, \hat{m}_-),$$

où $1 - A(1)$ a été inversé au paragraphe 5, et

$$(6.20) \quad \tilde{m}_{\pm}(z) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}_{\pm}} \frac{\cos \gamma_{\pm} \mp (\xi \sin \gamma_{\pm})/\xi_0}{z + i(\xi \cos \gamma_{\pm} \pm \xi_0 \sin \gamma_{\pm})} \frac{2 \sin \gamma_{\mp} d\xi}{\xi \cos \gamma_{\mp} \pm \xi_0 \sin \gamma_{\mp} + \cos \gamma_{\mp}},$$

où $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}(l, a)$, $\mathcal{E}_- = \mathcal{E}(l, -b)$, ont été définis en (4.91).

Pour $\tau < 0$, les formules (6.17), (6.18) sont les mêmes, puisque σ_d est holomorphe dans $\text{Im } \tau < 0$. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.1.

Montrons à présent le Théorème 1.2. Soit $q \in T^*\Omega \cap WF_a(u)$. On peut supposer $q = (t_0, x_0, y_0; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ avec $t_0 > 0$ (car $u = u_i$ dans $t < 0$) et $\tau_0 > 0$ (quitte à changer u en $\bar{u}$). Soit $\varepsilon > 0$ petit. D'après le théorème de propagation de J. Sjöstrand ([S1]), il existe un demi-rayon maximal ρ , tourné vers les temps négatifs, défini sur $I = [0, s_0[$, contenu dans $t > -\varepsilon$, avec $\rho(s) \notin T^*L$, et contenu dans le front d'onde analytique jusqu'au bord de u . Si $t(s_0) = -\varepsilon$ on a bien $q \in S$ par définition de S . Sinon on a nécessairement $\rho(s_0) \in T^*L$ et il s'agit de prouver $t(s_0) = 0$. Comme on a $u = u_e + u_d$, $u_d = -\square^{-1}(f_+ \delta_+ + f_- \delta_-)$ près de $t = 0$, u_e étant défini par (1.12), il suffit de vérifier qu'on a, pour tout ξ , $(t, \tau_0, 0, \xi) \notin WF_a(f_{\pm})$ pour $t \neq 0$. Or d'après ce qui précède, cela est vrai pour $t \neq 0$ petit et $|\xi + \tau_0/\cos \gamma_{\pm}| > \varepsilon_2$. Comme $f_{\pm}$ est à support dans $x \geq 0$, le résultat est donc conséquence du théorème du Watermelon de M. Kashiwara.

APPENDICE A. CALCUL PSEUDO-DIFFÉRENTIEL COMPLEXE À VALEURS OPÉRATEURS DANS UNE CHAÎNE D'ESPACES DE BANACH

Soit (H_{σ}) une chaîne d'espaces de Banach au sens de [O, N, BG]. On note $|\cdot|_{\sigma}$ la norme sur H_{σ} , $|\cdot|_{\sigma', \sigma}$ la norme d'opérateur de H_{σ} dans $H_{\sigma'}$. Si U est un ouvert de $T^*\mathbb{C}^d$, un *symbole à valeurs opérateurs* sur U et sur la chaîne (H_{σ}) est une série formelle

$$a(w, \tau, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w, \tau, \lambda) (i\lambda)^{-n},$$

où, pour tout n , a_n est une fonction holomorphe de $(w, \tau) \in U$ à valeurs dans les opérateurs bornés de H_{σ} dans $H_{\sigma'}$ pour tout $\sigma' < \sigma$, telle que

$$\sup_{(w, \tau) \in U} |a_n(w, \tau, \lambda)|_{\sigma', \sigma} \leq AB^n \left(\frac{n}{\sigma - \sigma'} \right)^n,$$

avec A, B indépendants de λ .

On quantifie de tels symboles de la même manière qu'à la §3.1. Soient W un ouvert de $\mathbb{C}^d$, $\tau_0 \in \mathbb{C}^d$ et $R_0 > 0$ tels que $W \times B(\tau_0, R_0) \subset U$. Si $\varphi \in C^1(W)$ et $m \in \mathbb{R}$, on désigne par $H_\varphi^m(W, H_\sigma)$ l'espace de Sjöstrand des fonctions holomorphes f sur W , à valeurs dans H_σ , et dépendant d'un paramètre $\lambda \geq 1$ de sorte que

$$\forall w \in W, \quad |f(w, \lambda)|_\sigma \leq C \lambda^m e^{\lambda \varphi(w)}.$$

On note $H_\varphi(W, H_\sigma) = \bigcup_m H_\varphi^m(W, H_\sigma)$.

On suppose enfin que

$$\forall w \in W, \quad \left\| \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial w}(w) - \tau_0 \right\| \leq D < R_0.$$

Définition-Proposition A.1. Soit a un symbole à valeurs opérateurs sur (H_σ) , et soient C_1, C_2 deux constantes positives. Pour $\sigma' < \sigma$, on pose

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\sigma', \sigma}(a)(\tau_0, C_1, C_2) \\ = \sum_{n \leq \lambda(\sigma - \sigma')/C_1} \sum_{|\alpha| \leq \lambda/C_2} (i\lambda)^{-n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\tau^\alpha a_n(w, \tau_0, \lambda) \left(\frac{1}{i\lambda} \partial_w - \tau_0 \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Soit $W' \Subset W$. Alors, si $C_1 \geq 2B$, $C_2 \geq (D \text{dist}(W', W^c))^{-1}$, l'opérateur ci-dessus envoie $H_\varphi^m(W, H_\sigma)$ dans $H_\varphi^m(W', H_{\sigma'})$. De plus, si C'_1 et C'_2 est un autre couple de constantes satisfaisant les inégalités ci-dessus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'opérateur

$$\text{Op}_{\sigma', \sigma}(a)(\tau_0, C_1, C_2) - \text{Op}_{\sigma', \sigma}(a)(\tau_0, C'_1, C'_2)$$

envoie $H_\varphi^m(W, H_\sigma)$ dans $H_{\varphi-\varepsilon}(W', H_{\sigma'})$.

Remarque A.1. En vertu du théorème de la phase stationnaire, la quantification ci-dessus peut encore s'écrire, modulo un terme dans $H_{\varphi-\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\sigma', \sigma}(a)(\tau_0, C_1, C_2) f(w, \lambda) \\ \equiv \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^d \iint_{\Sigma_{C_2}} e^{i\lambda(w-w')\tau} a_{C_1}(w, \tau, \lambda) f(w', \lambda) dw' \wedge d\tau, \end{aligned}$$

où $a_{C_1} = \sum_{n \leq (\sigma - \sigma')\lambda/C_1} a_n (i\lambda)^{-n}$, et où Σ_{C_2} est un "bon contour" de $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ au sens de [S2].

Remarque A.2. Dans le cas où $\varphi(w) = \varphi_1(w) = ((\text{Im } w)^2 - (\text{Re } w)^2)/2$, une fonction f de $H_{\varphi_1}^m$ peut encore s'écrire $e^{-\lambda w^2/2} \tilde{f}$, où $\tilde{f} \in H_0^m$. On peut alors identifier aisément le terme prépondérant de $\text{Op}(a)f$. Précisément, on a

$$\text{Op}_{\sigma', \sigma}(a)(\tau_0, C_1, C_2) = a_0(w, iw, \lambda) + R,$$

où $R: H_{\varphi_1}^m(W, H_\sigma) \rightarrow H_{\varphi_1}^{m+1}(W', H_{\sigma'})$.

Pour vérifier la formule ci-dessus, on évacue tout d'abord la contribution des a_n pour $n \geq 1$ dans un terme de type R grâce à la Proposition A.1. Ensuite, il suffit d'utiliser la Remarque A.1 et la méthode du col.

On dispose par ailleurs du calcul symbolique habituel:

Proposition A.2. Soient a et b deux symboles sur U à valeurs opérateurs sur (H_σ) . On définit $a \circ b$ par

$$(a \circ b)_n(w, \tau, \lambda) = \sum_{p+q+|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \partial_\tau^\alpha a_p(w, \tau, \lambda) \partial_w^\alpha b_q(w, \tau, \lambda).$$

Alors $a \circ b$ est un symbole sur tout $U_1 \Subset U$, et il existe des constantes C_1^0, C_2^0 telles que, pour tous $C_1 \geq C_1^0, C_2 \geq C_2^0, \sigma' < \sigma'' < \sigma$, l'opérateur

$$\text{Op}_{\sigma', \sigma}(a \circ b)(\tau_0, C_1, C_2) - \text{Op}_{\sigma', \sigma''}(a)(\tau_0, C_1, C_2) \text{Op}_{\sigma'', \sigma}(b)(\tau_0, C_1, C_2)$$

envoie $H_\varphi^m(W, H_\sigma)$ dans $H_{\varphi-\varepsilon}(W', H_{\sigma'})$ avec $\varepsilon > 0$.

Les démonstrations des Propositions A.1 et A.2 sont analogues à celles des Lemmes 3.1 et 3.3 et sont laissées au lecteur. On remarquera que la constante $\varepsilon > 0$ qui décrit la décroissance des restes est de la forme $\varepsilon = (\sigma - \sigma')\varepsilon_0$ avec $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de σ, σ' .

Signalons enfin le théorème d'inversibilité des symboles elliptiques. Rappelons qu'une chaîne d'opérateurs $a = a_{\sigma', \sigma}: H_\sigma \rightarrow H_{\sigma'}, \sigma' < \sigma$, est dite *inversible* s'il existe une chaîne $b = b_{\sigma', \sigma}: H_\sigma \rightarrow H_{\sigma'}, \sigma' < \sigma$, telle que, pour tous $\sigma' < \sigma'' < \sigma$, on ait

$$b_{\sigma', \sigma''} a_{\sigma'', \sigma} = a_{\sigma', \sigma''} b_{\sigma'', \sigma} = I_{\sigma', \sigma},$$

où $I_{\sigma', \sigma}$ désigne l'injection canonique. La chaîne b est alors unique, notée a^{-1} .

Proposition A.3. Soit a un symbole sur U à valeurs opérateurs sur (H_σ) . On suppose que, pour tous $(w, \tau) \in U$ et $\lambda \geq 1$, $a_0(w, \tau, \lambda)$ est inversible et que

$$\sup_{\sigma' < \sigma} \sup_{(w, \tau) \in U} \sup_{\lambda} |a_0^{-1}(w, \tau, \lambda)|_{\sigma', \sigma} < \infty.$$

Alors, pour tout $U_1 \Subset U$, il existe un unique symbole b sur U_1 tel que

$$b \circ a = a \circ b = 1.$$

De plus $b_0 = a_0^{-1}$.

La démonstration de la Proposition A.3 est une adaptation simple de celle de Sjöstrand [S2, Chapitre 1].

APPENDICE B. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Preuve de la Proposition 4.1, §4.3.

D'abord on écrit $I = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} I^\nu$, dans $\text{Im } \tau < 0$, avec

$$(B.1) \quad I^\nu = \int_0^\infty e^{\lambda x z - \lambda x^2/2} \left\{ \psi_2(x) \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathcal{E}_1} d\xi e^{i\lambda(x-x')\xi - \nu\xi^2} \right. \\ \left. \times \psi(x)\psi(x')\sigma(x, x', \tau, \xi) T_0 f_+(t - i\tau, x', \lambda) \right\} dx.$$

(On introduit d'abord le facteur de convergence $e^{-\nu\xi^2}$, puis on déforme l'intégrale en $\xi \in \mathbb{R}$ sur $\mathcal{E}_1$.) D'après le Lemme 4.4, (B.1) entraîne que I^ν est défini pour $(t, \tau) \in X_\kappa$, $z \in U$. Ensuite on a

$$(B.2) \quad I^\nu = \sum_{n \leq N} I_n^\nu + I_{R,N}^\nu$$

en utilisant le développement de Taylor de σ

$$(B.3) \quad \sigma = \sum_{n \leq N} \frac{\sigma^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 \sigma^{(N+1)}(sx)(1-s)^N ds.$$

Alors on a, avec $N = E(\lambda/C_1^0)$, $C_1^0 = eD_1/a'$,

$$(B.4) \quad I_{R,N} = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} I_{R,N}^\nu \text{ est négligeable dans } H(\varphi_0, X_\kappa, U).$$

En effet, par intégration par parties en x , on a

$$(B.5) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0^+} I_{R,N}^\nu = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty dx \iint \frac{e^{\lambda(xz + ix\xi)}}{(z + i\xi)^3} \left(\frac{-1}{\lambda} \partial_x \right)^3 \\ \times \left[e^{-\lambda x^2/2 - i\lambda x' \xi} \psi(x)\psi(x') \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 \sigma^{(N+1)}(sx)(1-s)^N ds \right. \\ \left. \times T_0 f_+(t - i\tau, x', \lambda) \right] dx' d\xi.$$

Or pour $z \in U$, $\xi \in \mathcal{E}_1$, on a $\text{Re } z - \text{Im } \xi \leq -A \sin \varepsilon + a'' \leq -4 + 1 + 4ct_0 \leq -2$ (car $t_0 \ll 1$) et d'après le Lemme 4.4, pour $x \in \text{support}(\psi)$, $|\sigma^{(k)}(x)| \leq k!(D_1/a')^{k+1}$. Comme $\int_{\mathcal{E}_1} d\xi/|z + i\xi|^3 \leq D/(1+|z|)^2$ pour $z \in U$, on obtient

$$(B.6) \quad |I_{R,N}| \leq D\lambda^D \frac{\|T_0 f_+(t - i\tau, \cdot, \lambda)\|_{L^2}}{(1+|z|)^2} e^{4\lambda ct_0 a'} \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{N+4} \frac{N!}{\lambda^N}$$

et on a $(D_1 N/a' \lambda)^N \leq e^{-N} \leq e e^{-\lambda a'/e D_1}$, et $1/e D_1 > 4ct_0$ car $t_0 \ll 1$.

On écrit

$$(B.7) \quad I_n^\nu = \int_0^\infty dx \int_{\mathcal{E}_1} d\xi e^{\lambda x z - \lambda x^2/2 + i\lambda x \xi} \psi(x) J_n(\xi, t, \tau, \lambda) \frac{\lambda}{2\pi} e^{-\nu\xi^2} x^n,$$

$$(B.8) \quad J_n = \int dx' e^{-i\lambda x' \xi} \psi(x') \frac{\partial_x^n \sigma(0, x', \tau, \xi)}{n!} T_0 f_+(t - i\tau, x', \lambda)$$

et on utilisera le lemme suivant.

Lemme B.1. Soit $\{J_n^1(\xi, t, \tau, \lambda)\}_{n \geq 0}$ une famille de fonctions holomorphes pour $(t, \tau) \in X_\kappa$, L^2 en ξ sur $\mathcal{E}_1$, telle que

$$(B.9) \quad \exists C > 0, \quad \|J_n^1\|_{L^2(\mathcal{E}_1)} \leq C e^{-\lambda/C} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{\lambda \varphi_0(t-i\tau)}.$$

Alors

$$(B.10) \quad \sum_{n \leq \lambda/C_1^0} \int_0^\infty dx \int_{\mathcal{E}_1} d\xi e^{\lambda x z - \lambda x^2/2 + i\lambda x \xi} \psi(x) x^n J_n^1 e^{-\nu \xi^2}$$

est (uniformément en ν), négligeable dans $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$.

Preuve. Posons $\Theta(z, \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda x z - \lambda x^2/2} \psi(x) dx$. En intégrant par parties une fois en x , on obtient pour $\operatorname{Re} z \leq -1$, $|\Theta(z, \lambda)| \leq D/\lambda|z|$ donc pour $\operatorname{Re} z \leq -2$, $|\Theta^{(j)}(z, \lambda)| \leq D j!/\lambda|z|$. Alors

$$\int_0^\infty dx e^{\lambda x z - \lambda x^2/2 + i\lambda x \xi} \psi(x) x^n dx = \left(\frac{\partial_z}{\lambda}\right)^n \Theta(z + i\xi),$$

est estimé pour $z \in U$, $\xi \in \mathcal{E}_1$ par $D n! \lambda^{-(n+1)}/|z + i\xi|$. Donc l'opérateur $g \mapsto \int_0^\infty dx \int_{\mathcal{E}_1} e^{\lambda x z - \lambda x^2/2 + i\lambda x \xi} g(\xi) \psi(x) x^n d\xi$ est borné par $D n! \lambda^{-(n+1)}$ de $L^2(\mathcal{E}_1)$ dans H_U et on a $(D_1/a')^n n! \lambda^{-n} \leq (n D_1/a' \lambda)^n \leq e^{-n}$, car $n \leq \lambda/C_1^0 = \lambda a'/e D_1$. $\square$

D'après la formule d'inversion (4.5), on a, en intégrant par parties en x' ,

$$(B.11) \quad J_n(\xi, t, \tau, \lambda) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx' d\alpha j_n(\xi, t, \tau, \lambda; x', \alpha),$$

$$(B.12) \quad j_n = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^{i\lambda \alpha x'}}{(1 + \alpha^2)} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \Delta_{x'}\right) \times \left[e^{-\lambda x'^2/2} \psi(x') \frac{d_x^n \sigma(0, x', \tau, \xi)}{n!} F_+(t - i\tau, x' - i\xi - i\alpha, \lambda) \right].$$

Pour étudier I_n^ν , on décompose $\mathcal{E}_1$ en deux morceaux $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^- \cup \mathcal{E}_1^+$ avec

$$(B.13) \quad \mathcal{E}_1^- = \left\{ \xi \in \mathcal{E}_1; \left| \operatorname{Re} \xi - \frac{1}{\cos \gamma_+} \right| \geq 1 + D_1 t_0 \right\}.$$

Pour $\xi \in \mathcal{E}_1^-$, $x' \in \operatorname{support}(\psi)$, on a $\operatorname{Re}(x' - i\xi - i\alpha) \leq 4ct_0 - a'' \leq -1$, donc d'après (4.12)

$$(B.14) \quad \|j_n\|_{L^2(\mathcal{E}_1^-)} \leq D \lambda^D e^{-\lambda x'^2/2} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{\lambda \varphi_0(t-i\tau)} \frac{\|f_+\|_{L^2}}{1 + \alpha^2}$$

pour $(t, \tau) \in X_\kappa$, $x' \in \operatorname{support}(\psi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soient $g \in C_0^\infty([-2ct_0, +2ct_0])$, $0 \leq g \leq 1$, $g \equiv 1$ sur $[-ct_0, ct_0]$ et Σ le contour

$$(B.15) \quad \Sigma = \left\{ (\alpha, x'); \alpha \in \mathbb{R}, x' = y' + ig(y') \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}} \frac{a'}{D_1}; y' \in \text{support } \psi \right\}.$$

D'après (4.12) et (B.12), on a
(B.16)

$$\|j_n\|_{L^2(\mathcal{C}_1^-)} \leq D\lambda^D e^{-(\lambda/2)[y'^2 + (a'/D_1)\alpha^2 g(y')/(1+\alpha^2)^{1/2}]} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \frac{\|f_+\|_{L^2}}{1+\alpha^2}$$

pour $(t, \tau) \in X$, $(\alpha, x') \in \Sigma$. Si on se donne $r > 0$, et si on pose

$$(B.17) \quad \Sigma_0 = \Sigma \cap \{|y'| + |\alpha| < r\}, \quad \Sigma_1 = \Sigma \setminus \Sigma_0$$

on a pour $\xi \in \mathcal{C}_1^-$

$$(B.18) \quad J_n = \tilde{J}_n^0 + \tilde{J}_n^1; \quad \tilde{J}_n^i = \iint_{\Sigma_i} j_n dx' d\alpha$$

où $\tilde{J}_n^1$ vérifie les estimées (B.9).

Maintenant, pour $\xi \in \mathcal{C}_1^+$, on a $\text{Re}(x' - i\xi - i\alpha) \leq x' + a'$ donc d'après (4.12) et (B.12)

$$(B.19) \quad \|j_n\|_{L^2(\mathcal{C}_1^+)} \leq D\lambda^D \frac{\|f_+\|_{L^2}}{1+\alpha^2} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{-\lambda x'^2/2 + \lambda\varphi_0(t-i\tau) + \lambda\Phi_\delta(x'+a')}$$

pour $(t, \tau) \in X_\kappa$, x, α réels. Déformons à nouveau l'intégrale qui définit J_n sur le contour Σ ((B.15)). On obtient pour $\xi \in \mathcal{C}_1^+$, $(x', \alpha) \in \Sigma$, $(t, \tau) \in X$

$$(B.20) \quad |j_n| \leq D\lambda^D \frac{\|f_+\|_{L^2}}{1+\alpha^2} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} e^{\lambda G},$$

$$(B.21) \quad \begin{aligned} G \leq & -g(y') \frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2)^{1/2}} \frac{a'}{2D_1} - \frac{y'^2}{2} \\ & + \Phi_\delta^+ \left(y' + \text{Im } \xi + i \left(\alpha \left(\frac{g(y')}{(1+\alpha^2)^{1/2}} \frac{a'}{D_1} - 1 \right) - \text{Re } \xi \right) \right) \end{aligned}$$

d'après (4.14). Vérifions alors qu'on a $G < 0$ en dehors de $y' = \alpha = 0$.

Si $y' \leq -ct_0$, on a

$$y' + \text{Im } \xi \leq -ct_0 + a' < 0,$$

donc $\Phi_\delta^+ = 0$ et $G < 0$.

Si $y' \geq ct_0$, on a

$$\begin{aligned} -\frac{y'^2}{2} + \Phi_\delta^+ & \leq \frac{-y'^2}{2} + \Phi_\delta(y' + a') \\ & = \frac{y'^2}{2} + \frac{(y' + a')^2}{2} - \frac{1}{2(1+c^2)}(y' + x' - \delta) = h(y') \end{aligned}$$

de dérivée $h'(y') = a' - (y' + a' - \delta)/(1 + c^2) < 0$ car $\sup(a', \delta) \ll t_0$. (Rappelons que $\delta = 3\kappa c = 3a'c/D_1$) et pour la même raison $h(ct_0) < 0$ donc $G < 0$.

Maintenant lorsque $|y'| \leq ct_0$, on a $g(y') \equiv 1$. Choisissons un δ_1 tel que $\sup(\delta, a') \ll \delta_1 \ll d$. Pour $y' + a' \leq 0$, on a $\Phi_\delta^+ \leq 0$ donc $G < 0$. Pour $y' + a' \geq \delta_1$, on a $\Phi_\delta^+ \leq \Phi_\delta$ donc $G \leq -\alpha^2 a'/(1 + \alpha^2)^{1/2} 2D_1 + h(y')$ et $h(y') < 0$ car $\delta_1 \gg \sup(\delta, a')$.

Enfin, lorsque $y' + a' \in [0, \delta_1]$, on aura d'après (4.14) soit $\Phi_\delta^+ = 0$ donc $G < 0$ pour $(y', \alpha) \neq (0, 0)$, soit $\Phi_\delta^+ \leq \Phi_\delta(y' + a')$ et

$$\left| \alpha \left(1 - \frac{a'}{D_1} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} \right) + \operatorname{Re} \xi + \frac{1}{\cos \gamma_+} \right| \leq \varepsilon_0,$$

donc α de l'ordre de $-2/\cos \gamma_+$, donc

$$G \leq -\frac{a'}{D_1 D} - \frac{y'^2}{2} + \frac{(y' + a')^2}{2} = -a' \left[\frac{1}{D_1 D} - y' - \frac{a'}{2} \right] < 0$$

si δ_1 est assez petit, soit enfin $\Phi_\delta^+ \leq \Phi_\delta(y' + a')$ et

$$\left| \alpha \left(1 - \frac{a'}{D_1} \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{1/2}} \right) + \operatorname{Re} \xi \right| \geq \frac{10}{|\cos \gamma_+|} - \delta_1,$$

donc $|\alpha| > 5/\cos \gamma_+$ et on conclut comme précédemment.

On a donc à nouveau la décomposition (B.18) pour $\xi \in \mathcal{E}_1^+$. En intégrant par partie en x' , on obtient donc, les contributions de $\partial \Sigma_0$ rentrant dans J_n^1 ,

$$(B.22) \quad J_n = J_n^0 + J_n^1,$$

où J_n^1 vérifie les estimées (B.9) et

$$(B.23) \quad J_n^0 = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Sigma_0} e^{i\lambda\alpha x' - \lambda x'^2/2} \frac{d_x^n \sigma(0, x', \tau, \xi)}{n!} \\ \times F_+(t - i\tau, -i\xi + x' - i\alpha) dx' d\alpha.$$

Comme on a $a' \ll d$, on a pour $(x', \alpha) \in \Sigma_0$, $\xi \in \mathcal{E}_1$,

$$|F_+(t - i\tau, -i\xi + x' - i\alpha)| \leq D\lambda^D e^{\lambda\varphi_0(t - i\tau)}$$

et

$$\|\partial_z^m F_+(t - i\tau, -i\xi + x' - i\alpha)\|_{L^2(\mathcal{E}_1)} \leq \lambda^D e^{\lambda\varphi_0(t - i\tau)} D^{m+1} m!.$$

En écrivant le développement de Taylor sur $x' = 0$

$$(B.24) \quad d_x^n \sigma(0, x') = \sum_{m \leq \lambda/C_2} \frac{d_x^n d_{x'}^m}{m!} \sigma(0, 0) x'^m + \frac{x'^{M+1}}{M!} \int \dots,$$

$M = E(\lambda/C_2)$ et en intégrant par parties en α , on obtient une nouvelle décomposition

$$(B.25) \quad J_n = \sum_{m \leq \lambda/C_2} J_{n,m} + J_n^2,$$

$$(B.26) \quad J_{n,m} = \frac{d_x^n d_{x'}^m \sigma(0, 0, \tau, \xi)}{n!m!} \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Sigma_0} e^{i\lambda\alpha x' - \lambda x'^2/2} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^m \\ \times F_+(t - i\tau, -i\xi + x' - i\alpha) dx d\alpha$$

où J_n^2 vérifie toujours (B.9), le terme de reste avec $M = E(\lambda/C_2)$ étant estimé en norme $L^2(\mathcal{C}_1)$ par

$$D\lambda^D e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{M+1} \lambda^{-M/2} \left(\frac{M}{2} \right)!$$

et les termes provenant des intégrations par parties en α par

$$D\lambda^D e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} \sum_{m \leq \lambda/C_2} \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{m+1} \lambda^{-m} e^{-r^2 a' \lambda / DD_2} D^m m!,$$

qui rentrent dans J_n^2 pourvu que $C_2 \geq C_2^0$, où C_2^0 dépend de a' .

A ce stade, on peut remplacer dans (B.26) Σ_0 par tout bon contour localisé près de $x' = \alpha = 0$ pour la phase $\alpha x' + i x'^2/2$; pour ρ assez petit, on a aussi

$$\frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Sigma_0} e^{i\lambda\alpha x' - \lambda x'^2/2} F_+(t - i\tau, -i\xi + x' - i\alpha) dx' d\alpha - (J_\rho F_+)(t - i\tau, -i\xi) \\ = H(t - i\tau, -i\xi, \lambda),$$

avec

$$\|\partial_z^m H(t - i\tau, \cdot, \lambda)\|_{L^2(\mathcal{C}_1)} \leq C e^{-\lambda/C} D^m m! e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)}.$$

D'après le Lemme 4.3 du §4.2, on a

$$\lambda \int_0^\infty e^{\lambda x(z+i\xi)} x^n \psi(x) e^{-\lambda x^2/2} dx = \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left[J_\rho^{-1} \left(\frac{1}{z+i\xi} \right) + r(z+i\xi, \lambda) \right],$$

avec pour $z \in U$, $\xi \in \mathcal{C}_1$, $|\partial_z^j r| \leq C e^{-\lambda/C} j! / |z|$. On obtient donc, en faisant tendre ν vers zéro, en remarquant $[J_\rho^{-1}, \partial_z] = [J_\rho, \partial_z] = 0$,

$$(B.27) \quad I - J_\rho^{-1} \left(\sum_{\substack{m \leq \lambda/C_2 \\ n \leq \lambda/C_1^0}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_1} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^n \left(\frac{1}{z+i\xi} \right) \frac{d_x^n d_{x'}^m}{n!m!} \right. \\ \left. \times \sigma(0, 0, \tau, \xi) \left(\frac{1}{\lambda} \partial_z \right)^m (J_\rho F_+)(-i\xi) \right)$$

est négligeable dans $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$, et cela reste valable en remplaçant C_1^0 par $C_1 \geq C_1^0 = eD_1/a'$; d'où la Proposition. $\square$

Preuve de la Proposition 4.2, §4.4.

Pour $\text{Im } \tau < 0$, on pose

$$(B.28) \quad I(t, \tau, z, \lambda) = T_1(S_{\lambda\tau}^{+, -} T_0 f^-)(t - i\tau, z, \lambda) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} I^\nu(t, \tau, z, \lambda),$$

FIGURE 14

avec, compte tenu des expressions (2.38) et (2.41),

$$(B.29) \quad I^\nu(t, \tau, z, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\nu\xi^2} k(\tau, z, \xi, \lambda) j(t, \tau, \xi, \lambda),$$

$$(B.30) \quad k(\tau, z, \xi, \lambda) = \int_0^\infty dx \psi(x) \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0}\right) e^{\lambda[x(z+i\xi)+ia(x)\xi_0-x^2/2]},$$

$$(B.31) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty dx' \psi(x') e^{-i\lambda x' \xi - i\lambda b(x') \xi_0} T_0 f_-(t - i\tau, x', \lambda).$$

Pour $l_1 > 0$, on introduit le contour $\mathcal{C}(l_1)$ représenté dans la Figure 14.

On suppose

$$(B.32) \quad \kappa \ll l_1 \ll 1.$$

Alors, pour $\xi \in \mathcal{C}(l_1)$, la fonction $\tau \mapsto \xi_0$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $|\tau - 1| < 3\kappa$, et il existe des constantes D_j , $j = 2, 3, 4, 5, 6$, indépendantes de l_1 et κ , telles que

$$(B.33) \quad \text{Im } \xi_0 \geq -D_2 l_1,$$

$$(B.34) \quad D_3(1 + \text{Im } \xi_0) \geq |\xi_0| \geq \frac{l_1^2 + \kappa}{D_3},$$

$$(B.35) \quad \text{Im}(\xi + b\xi_0) \leq D_4 \kappa,$$

$$(B.36) \quad \text{Im}(\xi + b\xi_0) \geq -\frac{l_1}{D_5} \Rightarrow \left| \xi - \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \right| \leq \sqrt{l_1}, \quad \text{et}$$

$$|\xi + b\xi_0 - \sqrt{1+b^2}| \leq D_6 l_1.$$

Les estimations (B.35) et (B.36) s'obtiennent aisément en tenant compte du contour décrit par $\zeta = \xi + b\xi_0$, représenté dans la Figure 15, p. 406, pour $\tau = 1$. En déformant l'intégrale (B.29) sur $\mathcal{C}(l_1)$, on constate que I^ν est définie pour $(t, \tau) \in X_\kappa$, $z \in U$. D'autre part, en posant

$$(B.37) \quad a(x) = xp(x), \quad b(x') = x'q(x')$$

on constate que, si t_0 est assez petit,

FIGURE 15

$$(B.38) \quad \frac{a}{2} \leq p(x) \leq \frac{3a}{2}, \quad \frac{3b}{2} \leq q(x') \leq \frac{b}{2},$$

pour $x \in \text{supp}(\psi)$, $x' \in \text{supp}(\psi)$. On en déduit que, pour $\xi \in \mathcal{C}(l_1)$, $z \in U$, on a, compte tenu de (B.33),

$$(B.39) \quad \text{Re}(z + i(\xi + p(x)\xi_0)) \leq -4 + Dl_1 \leq -1,$$

$$(B.40) \quad \text{Re}(-i(\xi + q(x')\xi_0)) \leq Dl_1.$$

De (B.40), on déduit alors que

$$(B.41) \quad |j(t, \tau, \xi, \lambda)| \leq D\lambda^D e^{\lambda Dl_1 t_0} \|f_-\|_{L^2} e^{\lambda \varphi_0(t-i\tau)},$$

tandis que l'on écrit (B.30) sous la forme

$$(B.42) \quad k(\tau, z, \xi, \lambda) = \sum_{n=0}^N k_n(\tau, z, \xi, \lambda) + k_{n,R}(\tau, z, \xi, \lambda),$$

avec, en posant $a(x) = ax + r_+(x)$,

$$(B.43) \quad k_n(\tau, z, \xi, \lambda) = \int_0^\infty dx \psi(x) e^{\lambda x(z + i\xi + ia\xi_0)} \frac{x^n}{n!} \sigma_n(0, \xi, \tau, \lambda),$$

$$(B.44) \quad k_{N,R}(\tau, z, \xi, \lambda) = \int_0^\infty dx \psi(x) e^{\lambda x(z + i\xi + ia\xi_0)} \int_0^x \frac{(x-y)^N}{N!} \sigma_{N+1}(y, \xi, \tau, \lambda) dy,$$

$$(B.45) \quad \sigma_n(y, \xi, \tau, \lambda) = \partial_y^n \left(e^{\lambda(ir_+(y)\xi_0 - y^2/2)} \left(1 - a'(y) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right).$$

Soit $\rho > 0$ assez petit pour que a soit holomorphe sur $\{z, d(z, \text{supp}(\psi)) \leq \rho\}$. Alors, pour $y \in \text{supp}(\psi)$, on a

$$(B.46) \quad \begin{aligned} & \text{Re} \left[ir_+(y + \rho e^{i\theta})\xi_0 - \frac{(y + \rho e^{i\theta})^2}{2} \right] \\ & \leq \text{Re}(ir_+(y)\xi_0) - \frac{y^2}{2} + D(y\rho + \rho^2)(1 + |\xi_0|), \end{aligned}$$

d'où, en posant $\zeta = z + i\xi + ia\xi_0$,

$$(B.47) \quad |k_{N,R}| \leq \int_0^\infty \int_0^x dx dy \psi(x)(x-y)^N e^{\lambda(x-y)\operatorname{Re} \zeta + \lambda\phi(y)} \\ \times (N+1)\rho^{-(N+1)} e^{\lambda D\rho^2(1+|\xi_0|)},$$

avec $\phi(y) = \operatorname{Re}(y(z + i\xi + ip(y)\xi_0)) + Dy\rho(1 + |\xi_0|)$ donc, d'après (B.34),

$$\phi(y) \leq y \operatorname{Re}(z + D_3\rho + i\xi + i(p(y) + D_3\rho)\xi_0) \leq 0$$

si $\rho \ll 1$, compte tenu de (B.33) et de (B.38).

Posant $x - y = u$ dans (B.47), il vient:

$$(B.48) \quad |k_{N,R}(\tau, z, \xi, \lambda)| \leq D \left(\int_0^\infty du u^N e^{\lambda u \operatorname{Re} \zeta} \right) (N+1) \\ \times \rho^{-(N+1)} e^{\lambda D\rho^2(1+|\xi_0|)} \\ \leq D \frac{(N+1)!}{(-\lambda \operatorname{Re} \zeta)^{N+1}} \rho^{-(N+1)} e^{\lambda D\rho^2(1+|\xi_0|)}.$$

On choisit alors $N+1 = [\lambda/C_0]$, avec $C_0 \gg 1$, et $\rho = ((N+1)/\lambda(1+|\xi_0|))^{1/2}$. Il vient

$$(B.49) \quad |k_{N,R}(\tau, z, \xi, \lambda)| \leq \left(\frac{(N+1)D}{\lambda} \right)^{(N+1)/2} \frac{(1+|\xi_0|)^{(N+1)/2}}{(|\operatorname{Re} z| + \operatorname{Im} \xi_0)^{(N+1)}}.$$

Fixant $C_0 \geq eD$, on obtient, compte tenu de (B.34)

$$(B.50) \quad |k_{N,R}(\tau, z, \xi, \lambda)| \leq D e^{-\lambda/2 C_0} (|\operatorname{Re} z| + \operatorname{Im} \xi_0)^{-(N+1)/2}.$$

En comparant avec (B.41), on obtient que la contribution de $k_{N,R}$ dans I' est uniformément négligeable dans $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$, pourvu que

$$(B.51) \quad l_1 t_0 \ll \frac{1}{C_0}.$$

On estime de la même manière $k_n(\tau, z, \xi, \lambda)$, i.e.,

$$(B.52) \quad \frac{1}{n!} |\sigma_n(0, \xi, \tau, \lambda)| \leq D \rho^{-n} e^{D\lambda\rho^2(1+|\xi_0|)}$$

d'où avec $\rho = (n/\lambda(1+|\xi_0|))^{1/2}$,

$$(B.53) \quad |k_n(\tau, z, \xi, \lambda)| \leq D e^{-n/2} (|\operatorname{Re} z| + \operatorname{Im} \xi_0)^{-(1+n/2)},$$

estimation qui nous sera utile plus loin.

Passons maintenant au développement de j . On décompose $\mathcal{E}(l_1)$ en deux parties $\mathcal{E}(l_1)^+$ et $\mathcal{E}(l_1)^-$, où $\mathcal{E}(l_1)^-$ est caractérisée par

$$(B.54) \quad \operatorname{Im}(\xi + b\xi_0) \leq -\frac{l_1}{D_5}.$$

En notant $r_-(x') = b(x') - bx'$, et en utilisant la formule d'inversion (4.5), on a

$$(B.55) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda x' \alpha - i\lambda r_-(x') \xi_0 - \lambda x'^2/2} \psi(x') \\ \times F_-(t - i\tau, x' - i(\xi + b\xi_0) - i\alpha, \lambda) dx' d\alpha.$$

Supposons d'abord $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^-$, et déformons l'intégrale en (α, x') sur le contour $\Gamma(l_2)$: $\alpha = \beta + il_2(1 + |\operatorname{Im} \xi_0|)$, avec $l_2 > 0$ à choisir. Alors, pour $\alpha \in \Gamma(l_2)$,

$$(B.56) \quad \operatorname{Re}(x' - i(\xi + b\xi_0) - i\alpha) \leq \begin{cases} 4ct_0 - \frac{l_1}{D_5} + 3l_2 & \text{si } |\operatorname{Im} \xi_0| \leq 2, \\ 4ct_0 + l_2 + 2(b - l_2) & \text{si } |\operatorname{Im} \xi_0| \geq 2, \end{cases}$$

car alors $\xi \in \mathbb{R}$, $|\xi| \geq 1 + l_1$ et $\operatorname{Im} \xi_0 > 0$.

En imposant

$$(B.57) \quad t_0 + l_2 \ll l_1 \ll 1,$$

on déduit que

$$(B.58) \quad \operatorname{Re}(x' - i(\xi + b\xi_0) - i\alpha) \leq -\frac{l_1}{D},$$

donc, d'après (4.12),

$$(B.59) \quad \|\partial_z^m F_-(t - i\tau, x' - i(\xi + b\xi_0) - i\alpha, \lambda)\|_{L^2(\Gamma(l_2))} \leq \left(\frac{D}{l_1} \right)^{m+1} m! e^{\lambda \varphi_0(t - i\tau)}.$$

Par ailleurs

$$(B.60) \quad \operatorname{Re} \left(ix' \alpha - ir_-(x') \xi_0 - \frac{x'^2}{2} \right) \leq -x' l_2 (1 + |\operatorname{Im} \xi_0|) + Dx'^2 |\operatorname{Im} \xi_0| \\ \leq -x' \frac{l_2}{2}$$

si

$$(B.61) \quad t_0 \ll l_2.$$

On écrit alors, pour $\alpha \in \Gamma(l_2)$,

$$(B.62) \quad \int_0^\infty e^{i\lambda x' \alpha - \lambda x'^2/2 - i\lambda r_-(x') \xi_0} \psi(x') F_- dx' \\ = \sum_{m=0}^M \left(\int_0^\infty e^{i\lambda x' \alpha} \psi(x') \frac{x'^m}{m!} dx' \right) \partial_{x'}^m (e^{-\lambda x'^2/2 - i\lambda r_-(x') \xi_0} F_-)|_{x'=0} \\ + R_M(t, \tau, \xi, \alpha, \lambda),$$

$$(B.63) \quad R_M = \int_0^\infty dx' \psi(x') e^{i\lambda x' \alpha} \\ \times \int_0^{x'} \frac{(x' - y')^M}{M!} \partial_{y'}^{M+1} (e^{-\lambda y'^2/2 - i\lambda r_-(y') \xi_0} F_-(y')) dy'.$$

Pour obtenir une estimation de R_M qui soit L^1 en α , on intègre par parties en x' :

$$(B.64) \quad R_M = -\frac{1}{i\lambda\alpha} \int_0^\infty dx' \psi(x') e^{i\lambda x' \alpha} \times \int_0^{x'} \frac{(x' - y')^{M-1}}{(M-1)!} \partial_{y'}^{M+1} (e^{-\lambda y'^2/2 - i\lambda r_-(y')\xi_0} F_-(y')) dy'.$$

Si $\rho \ll \inf(l_2, l_1) = l_2$, on a, comme dans (B.48),

$$(B.65) \quad \int_{\Gamma(l_2)} |R_M(t, \tau, \xi, \alpha, \lambda)| d\alpha \leq D e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \frac{(M+1)! \rho^{-(M+1)}}{\lambda^{M+1} (l_2(1 + |\operatorname{Im} \xi_0|))^{M+1/2}} e^{\lambda D \rho^2(1 + |\xi_0|)}$$

compte tenu de (B.59) et du fait que

$$(B.66) \quad \left(\int_{\Gamma(l_2)} \frac{d\alpha}{|\alpha|^2} \right)^{1/2} \leq \frac{D}{(l_2(1 + |\operatorname{Im} \xi_0|))^{1/2}}.$$

On choisit alors $M+1 = [\lambda/C'_0]$ avec $C'_0 \gg 1/l_2^2$, et $\rho = ((M+1)/\lambda(1 + |\xi_0|))^{1/2}$. Alors

$$(B.67) \quad \int_{\Gamma(l_2)} |R_M| d\alpha \leq D e^{-\lambda/2 C'_0} (1 + |\operatorname{Im} \xi_0|)^{-M/2},$$

ce qui, compte tenu de (B.53) entraîne que la contribution de R_M dans I est négligeable. Revenons à (B.62). On a

$$(B.68) \quad \int_0^\infty e^{i\lambda x' \alpha} \psi(x') \frac{x'^m}{m!} dx' = \left(-\frac{1}{i\lambda\alpha} \right)^{m+1} + r_m(\alpha),$$

$$(B.69) \quad |r_m(\alpha)| = \left| \frac{1}{i\lambda\alpha} \int_0^\infty e^{i\lambda x' \alpha} \partial_{x'} \left((1 - \psi) \frac{x'^m}{m!} \right) dx' \right| \leq \frac{1}{\lambda|\alpha|} e^{-2l_2 c t_0(1 + |\operatorname{Im} \xi_0|)\lambda} \left(\frac{D}{\lambda l_2(1 + |\operatorname{Im} \xi_0|)} \right)^{m-1}.$$

Comme par ailleurs, d'après (B.59),

$$(B.70) \quad |\partial_{x'}^m (e^{-\lambda x'^2/2 - i\lambda r_-(x')\xi_0} F_-(x', \alpha))|_{x'=0} |_{L^2(\Gamma(l_2))} \leq m! \rho^{-m} e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \times e^{\lambda D \rho^2(1 + |\xi_0|)}, \quad \text{avec } \rho \ll l_1,$$

on a, en choisissant

$$(B.71) \quad \rho = \left(\frac{m}{\lambda(1 + |\xi_0|)} \right)^{1/2} \ll l_2,$$

et puisque $C'_0 \ll l_2^{-2}$,

$$(B.72) \quad \sum_{m \leq \lambda/C'_0} \int |r_m(\alpha)| |\partial_{x'}^m (e^{-\lambda x'^2/2 - i\lambda r_- \xi_0} F^-)|_{x'=0} d\alpha \\ \leq D e^{-\lambda(1+|\xi_0|)/D} e^{\lambda \varphi_0(t-i\tau)},$$

ce qui donne une contribution négligeable dans I compte tenu de (B.53). En conclusion, si $\xi \in \mathcal{E}(l_2)^-$, on a

$$(B.73) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) \sim \sum_{m \leq \lambda/C'_0} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \int_{\Gamma(l_2)} \left(-\frac{1}{i\lambda\alpha} \right)^{m+1} \\ \times \partial_{x'}^m (e^{-\lambda x'^2/2 - i\lambda r_- \xi_0} F_-)|_{x'=0} d\alpha$$

soit, par la formule de Cauchy,

$$(B.74) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{m \leq \lambda/C'_0} \lambda^{-m} \frac{1}{m!} \partial_{x'}^m (e^{-\lambda x'^2/2 - i\lambda r_-(x')\xi_0} \partial_z^m F_-)|_{x'=0} \\ (t - i\tau, -i(\xi + b\xi_0), \lambda).$$

Supposons maintenant $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^+$, et revenons à la formule (B.55). Puisque $T_0 f_-(t - i\tau, x', \lambda) = 0$ si $x' < 0$, on peut également écrire

$$(B.75) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\lambda x' \alpha - i\lambda r_-(x')\xi_0 - \lambda x'^2/2} \psi(x') \\ \times F_-(t - i\tau, x' - i(\xi + b\xi_0) - i\alpha, \lambda) dx' d\alpha \\ = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \sigma(t, \tau, \xi, \lambda; x', \alpha) dx' d\alpha,$$

avec, après deux intégrations par parties en x'

$$(B.76) \quad \sigma = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^{i\lambda x' \alpha}}{1 + \alpha^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \partial_{x'}^2 \right) \\ \times (e^{-\lambda x'^2/2 - i\lambda r_-(x')\xi_0} \psi(x') F_-(t - i\tau, x' - i(\xi + b\xi_0) - i\alpha, \lambda)).$$

On procède alors comme dans la démonstration de la Proposition 4.1 du §4.3. On introduit $g \in C_0^\infty([-2ct_0, 2ct_0])$, $0 \leq g \leq 1$, $g \equiv 1$ sur $[-ct_0, ct_0]$, et le contour

$$(B.77) \quad \Sigma = \left\{ (\alpha, x'); \alpha \in \mathbb{R}, x' = y' + ig(y') \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} l_3, y' \in \mathbb{R} \right\}$$

avec $0 < l_3 \ll 1$. D'après l'estimation (4.14), on a, pour $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^+$,

$$(B.78) \quad |\sigma(t, \tau, \xi, \lambda; x', \alpha)| \leq D \lambda^D \frac{\|f_-\|_{L^2}}{1 + \alpha^2} e^{\lambda \varphi_0(t-i\tau)} e^{\lambda G},$$

$$(B.79) \quad G = -g(y') \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}} l_3 - \frac{y'^2}{2} + g^2 l_3^2 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + \text{Im}(r_-(x') \xi_0) + \Phi_\delta^+(z),$$

$$(B.80) \quad z = y' + \text{Im}(\xi + b\xi_0) - i \left(\text{Re}(\xi + b\xi_0) + \alpha \left(1 - g(y') \frac{l_3}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right) \right).$$

Compte tenu de (B.36), on a

$$(B.81) \quad \begin{aligned} \text{Im}(r_-(x') \xi_0) &= r_-(y') \text{Im} \xi_0 + r'_-(y') \text{Im} \left(i l_3 g(y') \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \xi_0 \right) \\ &\quad + O \left(l_3^2 g(y')^2 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \right) \\ &\leq D \left(y'^2 l_1^{1/2} + y' l_3 g(y') \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + l_3^2 g(y')^2 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \right) \\ &\leq D \left(y'^2 (l_1^{1/2} + l_3^{1/2}) + g(y')^2 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} l_3^{3/2} \right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$(B.82) \quad G \leq -l_3 g(y') \frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}} (1 - D l_3^{1/2}) - \frac{y'^2}{2} (1 - l_4) + \Phi_\delta^+(z),$$

$$(B.83) \quad l_4 \leq D(l_1^{1/2} + l_3^{1/2}).$$

Nous allons vérifier que $G < 0$, en suivant une discussion très analogue à celle de la preuve de la Proposition 4.1 du §4.3, et utilisant les estimations (B.35) et (B.36). Par (B.35), on a

$$(B.84) \quad \text{Re } z \leq y' + D_4 \kappa.$$

Si $y' \leq -ct_0$, alors $\text{Re } z < 0$ puisque

$$(B.85) \quad \kappa \ll t_0.$$

On en déduit $\Phi_\delta^+(z) = 0$ et $G < 0$ par (B.82).

Si $y' \geq ct_0$, alors $y' + D_4 \kappa \geq \delta$ et

$$(B.86) \quad \begin{aligned} \Phi_\delta^+(z) &\leq \Phi_\delta(y' + D_4 \kappa) \\ &= \frac{(y' + D_4 \kappa)^2}{2} - \frac{1}{2(1+c^2)} (y' + D_4 \kappa - \delta)^2, \end{aligned}$$

$$(B.87) \quad \begin{aligned} G &\leq -\frac{y'^2}{2} (1 - l_4) + \frac{(y' + D_4 \kappa)^2}{2} - \frac{1}{2(1+c^2)} (y' + D_4 \kappa - \delta)^2 \\ &= h(y'). \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned}
 h'(y') &= -y'(1 - l_4) + y' + D_4\kappa - \frac{1}{1 + c^2}(y' + D_4\kappa - \delta) \\
 (B.88) \quad &= y' \left(l_4 - \frac{1}{1 + c^2} \right) + D\kappa \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

si $y' \geq ct_0$, d'après $l_4 \ll 1$ et (B.85).

D'autre part

$$(B.89) \quad h(y') \leq D(\kappa y' + \kappa^2) - \frac{y'^2}{2} \left(\frac{1}{1 + c^2} - l_4 \right)$$

donc $h(ct_0) < 0$ d'après $l_4 \ll 1$ et (B.85). Il en résulte que $h(y') < 0$ si $y' \geq ct_0$, donc $G < 0$.

Enfin, si $|y'| \leq ct_0$, alors $g(y') = 1$. Choisissons δ_1 tel que

$$(B.90) \quad \kappa \ll \delta_1 \ll d.$$

Compte tenu de (B.84), si $y' + D_4\kappa \leq 0$ alors $\Phi_\delta^+ = 0$ et $G < 0$ par (B.82). Si $y' + D_4\kappa \geq \delta_1$ alors

$$(B.91) \quad \Phi_\delta^+(z) \leq \Phi_\delta(y' + D_4\kappa), \quad G \leq h(y') < 0$$

comme ci-dessus, car $\kappa \ll \delta_1$. Enfin, si $y' + D_4\kappa \in [0, \delta_1]$, on a, en utilisant l'estimation (4.14),

—soit $\Phi_\delta^+(z) = 0$, et $G < 0$ par (B.82),

—soit $|\operatorname{Im} z - \sqrt{1 + b^2}| \leq \varepsilon_0$ et, par (B.80), (B.36) et $l_3 \ll 1$, α est de l'ordre de $-2\sqrt{1 + b^2}$; soit $|z| \geq 10\sqrt{1 + b^2}$, et $|\alpha| \geq 8\sqrt{1 + b^2}$; d'où, dans les deux cas

$$\begin{aligned}
 (B.92) \quad G(y') &\leq -\frac{l_3}{D} - \frac{y'^2}{2}(1 - l_4) + \frac{(y' + D_4\kappa)^2}{2} \\
 &\leq -\frac{l_3}{D} + D\kappa + \frac{y'^2}{2}l_4 < 0
 \end{aligned}$$

si l'on impose

$$(B.93) \quad \kappa \ll l_3, \quad \delta_1^2 l_4 \ll l_3,$$

ce qui, compte tenu de (B.83), est vérifié si

$$(B.94) \quad \kappa \ll l_3, \quad \delta_1 \ll l_3^{1/2}.$$

En résumé, les conditions sur $\kappa, l_1, l_2, l_3, t_0, \delta_1$ sont, compte tenu de (B.32), (B.57), (B.61), (B.85), (B.90), et (B.94):

$$(B.95) \quad \kappa \ll t_0 \ll l_2 \ll l_1, \quad \kappa \ll l_3, \quad \kappa \ll \delta_1 \ll \operatorname{Inf}(l_3^{1/2}, d),$$

ce qui est possible à réaliser. On conclut que, pour $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^+$, on a, pour tout $r > 0$, si $\Sigma(r) = \Sigma \cap \{|x'| + |\alpha| \leq r\}$,

$$(B.96) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Sigma(r)} \sigma dx' d\alpha + O(e^{\lambda(\varphi_0 - 1/C(r))}),$$

et la contribution du reste à I est négligeable compte tenu de (B.53). On peut maintenant intégrer par parties en x' pour remplacer σ par

$$(B.97) \quad \begin{aligned} \sigma_0(t, \tau, \xi, \lambda; x', \alpha) &= \frac{\lambda}{2\pi} e^{i\lambda(x'\alpha + ix'^2/2 - r_-(x')\xi_0)} \\ &\times F_-(t - i\tau, x' - i\alpha - i(\xi + b\xi_0), \lambda). \end{aligned}$$

Compte tenu de (B.35), $\kappa \ll d$ et de (4.14), on a

$$(B.98) \quad |\partial_z^m F_-(t - i\tau, x' - i\alpha - i(\xi + b\xi_0), \lambda)| \leq D^{m+1} m! e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)},$$

et on peut donc développer $\iint_{\Sigma(r)} \sigma_0 dx' d\alpha$ par la méthode de la phase stationnaire [S2]:

$$(B.99) \quad \begin{aligned} j(t, \tau, \xi, \lambda) &= \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{m \leq \lambda/C_0''} \frac{1}{m! \lambda^m} (\partial_{x'} \partial_z + A \partial_z^2)^m v(t, \tau, \xi; x', z, \lambda)|_{x'=z=0} \\ &+ O(e^{\lambda\varphi_0 - \lambda/D}), \end{aligned}$$

$$(B.100) \quad A = -\frac{1}{2}(1 + ia''(0)\xi_0),$$

$$(B.101) \quad \begin{aligned} v(t, \tau, \xi; x', z, \lambda) &= e^{-i\lambda\xi_0(a(x') - ax' - a''(0)x'^2/2)} \\ &\times F_-(t - i\tau, -i(\xi + b\xi_0) + x' + z, \lambda). \end{aligned}$$

La constante C_0'' est ici supposée assez grande. Notons que, si $\rho \ll 1$,

$$(B.102) \quad |\partial_{x'}^j \partial_z^k v| \leq D e^{D\lambda\rho^3} \rho^{-j-k} (j+k)! e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)},$$

ce qui, en choisissant $\rho = (m/\lambda)^{1/3}$, montre que l'on peut remplacer dans (B.99) C_0'' par $C > C_0''$.

Il reste à comparer le développement (B.99) obtenu pour $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^+$ avec (B.74), obtenu pour $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^-$, et que l'on peut réécrire, compte tenu de (B.100), (B.101),

$$(B.103) \quad j(t, \tau, \xi, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{m \leq \lambda/C_0'} \frac{1}{m! \lambda^m} (\partial_{x'} \partial_z)^m (e^{\lambda A x'^2} v(t, \tau, \xi; x', z, \lambda))|_{x'=z=0}.$$

On va voir que (B.103) est également valable pour $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^+$, quitte à remplacer C_0' par un plus grand C (ce qui ne change rien à la validité de (B.103) pour $\xi \in \mathcal{E}(l_1)^-$).

Soit donc $\xi \in \mathcal{C}(I_1)^+$, et soit $C > \max(C'_0, C''_0)$. On pose, pour $X \in \mathbb{C}$,

$$(B.104) \quad \begin{aligned} P_C(X) &= \sum_{m \leq \lambda/C} \frac{1}{m! \lambda^m} (\partial_{x'} \partial_z + X \partial_z^2)^m v|_{x'=z=0}, \\ Q_C(X) &= \sum_{m \leq \lambda/C} \frac{1}{m! \lambda^m} (\partial_{x'} \partial_z)^m (e^{\lambda X x'^2} v)|_{x'=z=0}. \end{aligned}$$

Alors P_C et Q_C sont des polynômes de degrés $\leq \lambda/C$ et $\leq \lambda/2C$, et

$$(B.105) \quad \text{si } k \leq \lambda/C, \quad \left(\frac{d}{dX}\right)^k P_C(0) = \sum_{k \leq m \leq \lambda/C} \frac{1}{(m-k)! \lambda^m} \partial_{x'}^{m-k} \partial_z^{m+k} v|_{x'=z=0},$$

$$(B.106) \quad \text{si } k \leq \lambda/2C, \quad \begin{aligned} \left(\frac{d}{dX}\right)^k Q_C(0) &= \sum_{2k \leq m \leq \lambda/C} \frac{\lambda^k}{(m-2k)! \lambda^m} \partial_{x'}^{m-2k} \partial_z^m v|_{x'=z=0} \\ &= \sum_{k \leq m \leq \lambda/C-k} \frac{1}{(m-k)! \lambda^m} \partial_{x'}^{m-k} \partial_z^{m+k} v|_{x'=z=0}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$(B.107) \quad \begin{aligned} P_C(X) - Q_C(X) &= \sum_{k \leq \lambda/C} \sum_{\max(k, \lambda/C-k) \leq m \leq \lambda/C} \frac{X^k}{(m-k)! k!} \frac{1}{\lambda^m} \partial_{x'}^{m-k} \partial_z^{m+k} v|_{x'=z=0}. \end{aligned}$$

D'après (B.102), on en déduit, avec $\rho = \rho(m)$,

$$(B.108) \quad \begin{aligned} |P_C(X) - Q_C(X)| &\leq \sum_{\lambda/2C \leq m \leq \lambda/C} \frac{2m!}{(\rho^2 \lambda)^m} e^{D\lambda \rho^3} \sum_{\lambda/C-m \leq k \leq m} \frac{|X|^k}{(m-k)! k!} e^{\lambda \varphi_0} \\ &\leq \sum_{\lambda/2C \leq m \leq \lambda/C} \frac{2m!}{m! (\rho^2 \lambda)^m} e^{D\lambda \rho^3} (1 + |X|)^m e^{\lambda \varphi_0}. \end{aligned}$$

On prend alors $\rho(m) = (m/\lambda)^{1/3}$, et on obtient

$$(B.109) \quad |P_C(A) - Q_C(A)| \leq \sum_{\lambda/2C \leq m \leq \lambda/C} \left(\frac{4(1+|A|)e^D}{C^{1/3}} \right)^m \leq e^{-\lambda/C + \lambda \varphi_0}$$

dès que $C \geq 64(1+|A|)^3 e^{3D+3}$.

Pour écrire le développement de I , il reste à expliciter les k_n donnés par (B.43). Il suffit pour cela de remarquer que

$$(B.110) \quad \int_0^\infty e^{\lambda x \zeta} \psi(x) \frac{x^n}{n!} dx = \left(-\frac{1}{\lambda \zeta} \right)^{n+1} + r_n(\zeta),$$

$$(B.111) \quad \begin{aligned} |r_n(\zeta)| &\leq \left(\frac{3}{\lambda |\operatorname{Re} \zeta|} \right)^{n+1} e^{-2ct_0 |\operatorname{Re} \zeta| \lambda}, \\ |\operatorname{Re} \lambda| &\geq |\operatorname{Re} z| + \operatorname{Im} \xi_0. \end{aligned}$$

Utilisant (B.52) avec $\rho = (n/\lambda(1 + |\xi_0|))^{1/2}$, on obtient:

$$(B.112) \quad \left| \sum_{n \leq \lambda/C_0} r_n(\zeta) \sigma_n(0, \xi, \tau, \lambda) \right| \leq D e^{-\lambda/D},$$

et finalement, passant à la limite si $\nu \rightarrow 0^+$, on obtient, en tenant compte de (B.29), (B.42), (B.43), (B.45), (B.74), (B.110), (B.113)

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n \leq \lambda/C_0} \sum_{m \leq \lambda/C} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{E}(l_1)} d\xi \lambda^{-n-m} \left(\frac{-1}{z + i(\xi + a\xi_0)} \right)^{n+1} \\ &\quad \times \partial_x^n \left(e^{\lambda(ir_+(x)\xi_0 - x^2/2)} \left(1 - a'(x) \frac{\xi}{\xi_0} \right) \right) \Big|_{x=0} \\ &\quad \times \frac{1}{m!} \partial_{x'}^m \left[e^{-\lambda(x'^2/2 + ir_-(x')\xi_0)} \partial_z^m F_-(t - i\tau, x' + z - i(\xi + b\xi_0), \lambda) \right] \Big|_{x'=0, z=0} \\ &\quad + R(t, \tau, z, \lambda), \end{aligned}$$

où R est négligeable dans $H(\varphi_0, X_\kappa, U)$. On notera enfin que, par le même type d'estimations, on peut, dans (B.113), modifier C_0 par toute constante $\tilde{C} > C_0$. $\square$

Preuve de la Proposition 4.3, §4.5. Commençons par démontrer (4.71). En raisonnant comme ci-dessus pour la preuve de la Proposition 4.1 du §4.3, on est ramené à développer les intégrales

$$(B.114) \quad J_n(t, \tau, \xi, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} j_n(t, \tau, \xi, \tau', \lambda) d\tau',$$

$$(B.115) \quad j_n = \int_0^\infty e^{-i\lambda(x'\xi + \tau'\theta_a(x'))} \frac{\partial_x^n \sigma(0, x', \tau, \xi)}{n!} p_2(x', \lambda\tau') \psi(x') dx',$$

pour $\xi \in \mathcal{E}_1$, avec des estimations en norme L^2 sur $\mathcal{E}_1$.

On écrit alors $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^+ \cup \mathcal{E}_1^-$, où $\mathcal{E}_1^-$ est caractérisé par

$$(B.116) \quad \left| \operatorname{Re} \xi - \frac{1}{\cos \gamma_+} \right| \geq 2D_1 t_0,$$

de sorte que $\operatorname{Im} \xi = -a'' = -1 - 4ct_0$ sur $\mathcal{E}_1^-$. Alors, pour $\xi \in \mathcal{E}_1^-$,

$$(B.117) \quad |j_n| \leq D\lambda^D \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} |\xi + \tau'|^{-1},$$

donc

$$(B.118) \quad \left\| \int_{|\tau' - 1| \geq 4\kappa} e^{i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} j_n d\tau' \right\|_{L^2(\mathcal{E}_1^-)} \leq D e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau) - \lambda/D}.$$

On écrit alors, pour $|\tau' - 1| \leq 4\kappa$,

$$(B.119) \quad j_n = \sum_{m \leq \lambda/C_2^0} \frac{\lambda^{-m-1}}{(i(\xi + \tau'))^{m+1}} a_{n,m} + r_n,$$

(B.120)

$$a_{n,m}(\tau, \tau', \xi, \lambda) = \frac{\partial_x^n}{n!} \partial_{x'}^m (\sigma(0, x', \tau, \xi) p_2(x', \lambda\tau') e^{-i\lambda\bar{\theta}_a(x')\tau'})|_{x'=0},$$

$$(B.121) \quad \begin{aligned} r_n = & \sum_{m \leq \lambda/C_2^0} \left(\int_0^\infty e^{-i\lambda x'(\xi + \tau')} (1 - \psi(x')) \frac{x'^m}{m!} dx' \right) a_{n,m} \\ & + \int_0^\infty e^{-i\lambda x'(\xi + \tau')} \psi(x') \int_0^{x'} \frac{(x' - y')^M}{M!} \partial_{y'}^{M+1} \\ & \times (\sigma(0, y', \tau, \xi) p_2(y', \lambda\tau') e^{-i\lambda\bar{\theta}_a(y')\tau'}) dy' dx' \end{aligned}$$

avec $M = [\lambda/C_2^0]$.

En intégrant une fois par parties en x' et en appliquant dans le terme de rang m l'inégalité de Cauchy avec un rayon égal à $(m/\lambda)^{1/2}$, on obtient, si $C_2^0 > (D_1/a')^2$,

$$(B.122) \quad \begin{aligned} \|r_n\|_{L^2(\mathcal{E}_1^-)} & \leq \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} \sum_{m \leq \lambda/C_2^0} \left(\frac{me^2}{\lambda} \right)^{m/2} e^{-\lambda/D} \\ & + \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} \left(\frac{M}{\lambda} e^2 \right)^{M/2} \\ & \leq \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} e^{-\lambda/D}, \end{aligned}$$

$$(B.123) \quad |a_{n,m} \lambda^{-m}| \leq \left(\frac{D_1}{a'} \right)^{n+1} e^{-m},$$

ce qui donne la formule (4.71) pour la partie de l'intégrale correspondant à $\mathcal{E}_1^-$.

Supposons maintenant $\xi \in \mathcal{E}_1^+$; alors ξ appartient au domaine

$$(B.124) \quad Q = \left\{ \zeta \in \mathbb{C}, -2 < \operatorname{Im} \zeta < a', \left| \operatorname{Re} \zeta - \frac{1}{\cos \gamma_+} \right| < 2D_1 t_0 \right\}.$$

Pour $\zeta \in Q$, posons

$$(B.125) \quad \begin{aligned} & \tilde{j}_n(t, \tau, \tau', \xi, \zeta, \lambda) \\ & = \int_0^\infty e^{-i\lambda(x'\zeta + \theta_a(x')\tau')} \frac{\partial_x^n}{n!} \sigma(0, x', \tau, \xi) p_2(x', \lambda\tau') \psi(x') dx', \end{aligned}$$

(B.126)

$$\tilde{J}_n(t, \tau, \xi, \zeta, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} \tilde{j}_n(t, \tau, \tau', \xi, \zeta, \lambda) d\tau'.$$

Nous allons prouver que, pour $\xi \in \mathcal{E}_1^+$, $\zeta \in Q$,

$$(B.127) \quad |\tilde{J}_n(t, \tau, \xi, \zeta, \lambda)| \leq D\lambda^D e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1}.$$

Supposons (B.127) prouvé. Alors, définissant $\tilde{R}_n$ par

$$(B.128) \quad \tilde{J}_n = \sum_{m \leq \lambda/C_2^0} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{1-4\kappa}^{1+4\kappa} e^{i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} \frac{a_{n,m}(\tau, \tau', \xi, \lambda)}{(i\lambda(\zeta + \tau'))^{m+1}} d\tau' + \tilde{R}_n,$$

on aura, compte tenu de (B.37) qui est vraie pour tout $\xi \in \mathcal{E}_1$,

$$(B.129) \quad |\tilde{R}_n| \leq D\lambda^D e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau)} \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1},$$

et, par la même preuve que ci-dessus, si $\zeta \in Q$ et $-2 < \text{Im } \zeta < -1$,

$$(B.130) \quad |\tilde{R}_n(t, \tau, \xi, \zeta, \lambda)| \leq \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{\lambda\varphi_0(t-i\tau) - \lambda/D},$$

donc, par le principe du maximum appliqué à la fonction $\zeta \mapsto \tilde{R}_n(\zeta)$ (voir [L2]), on en déduit que, avec une autre constante D , (B.130) a encore lieu sur un compact arbitraire de Q . En particulier (B.130) a lieu pour $\zeta = \xi \in \mathcal{E}_1^+$, et (B.128) n'est autre que la formule (4.71) sur $\mathcal{E}_1^+$.

Passons à la démonstration de (B.127). Tout d'abord, puisque

$$(B.131) \quad |\tilde{j}_n| \leq \lambda^D \left(\frac{D_1}{a'}\right)^{n+1} e^{4\lambda a' ct_0},$$

on peut restreindre l'intégrale (B.39) au domaine

$$(B.132) \quad |\tau' - 1| \leq \varepsilon,$$

dès que

$$(B.133) \quad a' t_0 \ll \varepsilon^2.$$

Soit maintenant $u = \text{Re}(\zeta + \tau')$. Alors, si ε est assez petit, u est de l'ordre de $1/\cos \gamma_+ - 1$. On déforme alors l'intégrale (B.125) sur le contour $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, avec

$$(B.134) \quad \begin{aligned} \Gamma_1: x' &= -isu, & 0 \leq s \leq \delta \\ \Gamma_2: x' &= -i\delta g(y')u + y', & 0 \leq y', \end{aligned}$$

où $g \in C^\infty$ est à valeurs dans $[0, 1]$, vaut 1 pour $y' \leq ct_0$, et $g(y') = 0$ pour $y' \geq 3ct_0$, et où

$$(B.135) \quad 0 < \delta \ll a'.$$

Pour $x' \in \Gamma$, $\zeta \in Q$, $\xi \in \mathcal{E}_1^+$, $\tau' \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, et $(t, \tau) \in X_\kappa$, on a

$$(B.136) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \phi &= \operatorname{Re} \left(i(t - i\tau)\tau' - \frac{\tau'^2}{2} - i(x'\zeta + \theta_a(x')\tau') \right) \\ &\leq \varphi_0(t - i\tau) + \operatorname{Im} x' u + \operatorname{Re} x' \operatorname{Im}(\zeta + \tau') + \operatorname{Im}(\tilde{\theta}_a(x'))\tau', \end{aligned}$$

soit, compte tenu de (B.135),

$$(B.137) \quad \operatorname{Re} \phi \leq \varphi_0(t - i\tau) + u \operatorname{Im} x' + D a' \operatorname{Re} x'.$$

Sur Γ_1 , on en déduit $\operatorname{Re} \phi \leq \varphi_0(t - i\tau)$, de même que sur Γ_2 , si $y' \leq ct_0$ et si

$$(B.138) \quad a' t_0 \ll \delta.$$

Il reste à étudier la partie de Γ_2 correspondant à $y' \geq ct_0$. Pour cela, on déforme l'intégrale en τ' donnant $\tilde{J}_n$, localisée sur $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, sur

$$(B.139) \quad \operatorname{Re} \tau' \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon], \quad \operatorname{Im} \tau' = -l$$

avec $0 < l \ll 1$.

Alors la partie réelle de la phase est majorée par

$$(B.140) \quad \operatorname{Re} \phi \leq \varphi_0(t - i\tau) + D(\kappa l + l^2) - t_0 \frac{l}{D} + D(a' t_0 + t_0^2 l)$$

qui est majorée par $\varphi_0(t - i\tau)$ dès que

$$(B.141) \quad a' \ll l \ll t_0.$$

Enfin, l'erreur commise dans la déformation en τ' est une intégrale dans laquelle $\operatorname{Re} \tau' = 1 \pm \varepsilon$, donc

$$(B.142) \quad \operatorname{Re} \phi \leq \varphi_0(t - i\tau) + D(\kappa l + l^2) - \frac{\varepsilon^2}{4} + D(a' t_0 + t_0^2 l)$$

qui est majorée par $\varphi_0(t - i\tau)$ dès que

$$(B.143) \quad l \ll \varepsilon, \quad t_0^2 l \ll \varepsilon^2.$$

En reprenant (B.133), (B.135), (B.138), (B.141), et (B.143), on constate que δ, l, ε doivent être choisis tels que

$$(B.144) \quad \delta \ll a' \ll l \ll \min(\varepsilon, t_0), \quad a' t_0 \ll \min(\varepsilon^2, \delta), \quad l t_0^2 \ll \varepsilon^2,$$

ce qui est consistant, puisqu'impliqué par

$$(B.145) \quad a' t_0 \ll \delta \ll a' \ll l \ll t_0 \ll \varepsilon \ll 1.$$

Passons à (4.73). On a

$$(B.146) \quad I_3(t, \tau, z, \lambda) = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{E}(l_1)} d\xi e^{-\nu \xi^2} k(\tau, z, \xi, \lambda) j_3(t, \tau, \xi, \lambda),$$

où k a déjà été étudié dans la preuve de la Proposition 4.2 du §4.4, et où

$$(B.147) \quad \begin{aligned} j_3(t, \tau, \xi, \lambda) &= \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-i\tau)\tau' - \lambda\tau'^2/2} \\ &\quad \times \left(\int_0^{\infty} dx' \psi(x') e^{-i\lambda(x'\xi + b(x')\xi_0 + \theta_b(x')\tau')} \rho_3(x', \lambda\tau') \right) d\tau'. \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés du contour $\mathcal{E}(l_1)$ citées dans la preuve de la Proposition 4.2 du §4.4, on développe j_3 en décomposant $\mathcal{E}(l_1) = \mathcal{E}(l_1)^- \cup \mathcal{E}(l_1)^+$, et la démonstration est analogue à la précédente. $\square$

APPENDICE C. CHOIX DE LA CHAÎNE D'ESPACES

On montre dans cet appendice que l'on peut choisir les ouverts ω_0 et ω_1 de telle sorte que les opérateurs $s_n^{\pm, \mp}(\tau)$ envoient $H_0^\mp$ dans $H_1^\pm$ pour $|\tau - 1| < 2\kappa$ (cf. §4.4). Compte tenu de la §4.4, il suffit de prouver qu'il existe un contour Γ du type considéré en (4.54) qui soit contenu dans $i\omega_0$, et tel que le contour considéré en (4.56)

$$\tilde{\Gamma}: \tilde{\zeta} = \zeta \cos \gamma + \zeta_0 \sin \gamma$$

reste à l'extérieur de $i\omega_1$. Ici $\xi_0 = (\tau^2 - \xi^2)^{1/2}$. Le paramètre κ pouvant être choisi arbitrairement petit, on peut supposer que $\tau = 1$. On choisit alors γ_0, γ_1 proches de zéro, tels que $0 < \gamma_1 < \gamma_0 < \gamma$, et on considère les quatre chemins $K_0, K_1, K, \tilde{K} = K - \gamma$ dans le plan complexe représenté dans la Figure 16. Alors la transformation $\phi \mapsto i \cos \phi = z$ envoie ces chemins sur les contours représentés dans la Figure 17, p. 420. On choisit ainsi les frontières de ω_0, ω_1 , en ajustant les paramètres définissant K_0, K_1 par rapport aux constantes du Lemme 4.2. On choisit de même les frontières de ω_σ , $\sigma \in [0, 1]$, à partir de chemins K_σ dans le plan des ϕ "parallèles" à K_0 et K_1 , variant linéairement avec σ . On complète la frontière de ω_σ en la raccordant aux demi-droites d'angles polaires $\pi/2 + \delta_\sigma$ et $3\pi/2 - \delta_\sigma$. Les propriétés (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) sont alors aisées à vérifier.

FIGURE 16

FIGURE 17

Enfin, si on choisit pour Γ l'image par la transformation $\phi \mapsto \zeta = -\cos \phi$ du contour K représenté dans la Figure 1, on a $\tilde{\zeta} = -\cos(\phi - \gamma)$ donc $\tilde{\Gamma}$ est l'image par la même transformation du contour $\tilde{K} = K - \gamma$, et la propriété cherchée devient évidente.

APPENDICE D. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME ELLIPTIQUE DANS UN SECTEUR ANGULAIRE

Nous démontrons dans cette partie que le problème (5.8) est bien posé. Introduisons préalablement quelques notations. Soit $\alpha \in]0, 2\pi[$. On désigne par Ω le secteur angulaire défini en coordonnées polaires (r, θ) par $0 < \theta < \alpha$. On considère l'espace E des distributions u sur Ω vérifiant en coordonnées polaires

$$u \in C_\theta([0, \alpha]; H_r^1(\mathbb{R}_+)), \quad \frac{1}{r} \partial_\theta u \in C_\theta([0, \alpha]; L^2(\mathbb{R}_+)), \\ u(r=0, \theta=0) = u(r=0, \theta=\alpha),$$

H^1 et L^2 étant munis de la topologie faible. Si χ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ qui est constante près de $r=0$ et dans un voisinage de l'infini, alors en écrivant $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + r^{-2} \partial_\theta^2$, on constate que $[\Delta, \chi]$ envoie E dans $L^2(\Omega)$.

Soit alors $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Théorème D.1. (1) Soit $f \in H^1(\partial\Omega)$. Alors le problème

$$(D) \quad (\Delta + \omega^2)u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = f$$

admet dans $E \cap H^1(\Omega)$ une unique solution u .

(2) Soit $g \in L^2(\partial\Omega)$. Alors le problème

$$(N) \quad (\Delta + \omega^2)u = 0, \quad \partial_n u|_{\partial\Omega} = g$$

admet dans $E \cap H^1(\Omega)$ une unique solution u .

Dans l'assertion (2) du Théorème D.1, ∂_n désigne la dérivée normale extérieure à l'ouvert Ω et coïncide donc avec $r^{-1}\partial_\theta$ sur $\{\theta = \alpha\}$ et avec $-r^{-1}\partial_\theta$ sur $\{\theta = 0\}$. En mettant bout à bout les assertions (1) et (2) ci-dessus, on obtient que le problème (5.8) est bien posé.

On notera que les données au bord dans le Théorème D.1 sont moins régulières que celles qui sont traditionnellement utilisées dans l'étude des problèmes elliptiques à coins, par exemple dans l'ouvrage de Grisvard [G], auquel nous renvoyons pour le résultat suivant:

Lemme D.1. Soit $h \in L^2(\Omega)$.

(1) Le problème

$$(\Delta + \omega^2)v = h, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

admet une solution et une seule $v \in E \cap H^1(\Omega)$.

(2) Le problème

$$(\Delta + \omega^2)v = h, \quad \partial_n v|_{\partial\Omega} = 0$$

admet une solution et une seule $v \in E \cap H^1(\Omega)$.

Remarque. L'existence d'une solution H^1 pour les problèmes (1) et (2) du lemme est conséquence immédiate du lemme de Lax-Milgram; à ce sujet, on notera que, puisque Ω est non borné, l'hypothèse $\omega^2 \notin \mathbb{R}_+$ est cruciale.

Passons à la démonstration du Théorème D.1. L'unicité de u découle immédiatement de l'unicité de v dans le lemme. Il suffit bien sûr de construire u lorsque les données sont à support compact près de l'origine et d'autre part lorsque les données sont supportées en dehors de l'origine.

Supposons d'abord que f (resp. g) est supportée en dehors de l'origine, disons dans $r > 1$. Désignons par P_1 et P_2 les deux demi-plans dont l'intersection (ou la réunion dans le cas $\alpha > \pi$) est Ω . Pour $j = 1, 2$, on résout dans P_j

$$(\Delta + \omega^2)w_j = 0, \quad w_j|_{\partial\Omega} = f \quad (\text{resp. } \partial_n w_j|_{\partial\Omega} = g);$$

soit $\chi_j \in C^\infty$ valant 1 sur ∂P_j pour $r \geq 1$ et dont le support, proche de celui de f , ne rencontre pas ∂P_k pour $\{j, k\} = \{1, 2\}$. Alors les formules explicites pour la résolution de $\Delta + \omega^2$ dans un demi-plan montrent que la fonction $w = \chi_1 w_1 + \chi_2 w_2$ appartient à $E(\Omega)$ et satisfait à $(\Delta + \omega^2)w \in L^2(\Omega)$. Si v est donnée par le Lemme D.1 avec $h = (\Delta + \omega^2)w$, alors $u = w - v$ est la solution cherchée.

Supposons maintenant que f (resp. g) soit supportée dans $r < 2$. Le lemme suivant indique comment "relever" agréablement les données au bord près de l'origine:

Lemme D.2. Si $f \in H^1(\partial\Omega)$ (resp. $g \in L^2(\partial\Omega)$), il existe w harmonique dans Ω telle que

$$w|_{\partial\Omega} = f \quad (\text{resp. } \partial_n w|_{\partial\Omega} = g)$$

et telle que, pour toute fonction $\chi \in C^\infty$ à support compact dans le plan, on ait $\chi w \in E$.

Supposant prouvé ce résultat, on choisit χ à support compact valant 1 pour $r < 3$. Alors $h = (\Delta + \omega^2)(\chi w) = [\Delta, \chi]w + \omega^2 \chi w$ appartient à L^2 , et, si v est donnée par le Lemme D.1, la solution cherchée est $u = \chi w - v$.

Il nous reste à prouver le Lemme D.2. Pour cela, on utilise la transformation de Mellin

$$Mf(z) = \int_0^\infty f(r)r^{-z} \frac{dr}{r}.$$

En posant $r = e^x$ dans l'intégrale, on constate que M réalise une isométrie (à 2π près) de $L^2(\mathbb{R}_+)$ sur $L^2(\operatorname{Re} z = -1/2)$, d'inverse donné par

$$M^{-1}F(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z = -1/2} F(z)r^z dz.$$

De plus, si f est L^2 à support borné, alors Mf est holomorphe pour $\operatorname{Re} z < -1/2$, et, pour tout $a \leq -1/2$, on a

$$\int_{\operatorname{Re} z = a} |Mf(z)|^2 |dz| < \infty.$$

Enfin, si f est H^1 à support borné, alors

$$Mf(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty f'(r)r^{-z} dr$$

donc admet un prolongement méromorphe à $\operatorname{Re} z < 1/2$, le seul pôle étant simple, situé en $z = 0$, et de résidu $-f(0)$; on a alors, de plus, pour tout $a \leq 1/2$,

$$\int_{\operatorname{Re} z = a} |z|^2 |Mf(z)|^2 |dz| < \infty.$$

Résolvons d'abord le cas du problème de Dirichlet. Pour $f \in H^1(\partial\Omega)$, on note $f_0 = f|_{\theta=0}$ et $f_\alpha = f|_{\theta=\alpha}$. Remarquons que $f_0(0) = f_\alpha(0) = f(0)$. On pose alors

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z = 1/2} r^z W(z, \theta) dz + f(0),$$

où

$$W(z, \theta) = \frac{\sin(\alpha - \theta)z}{\sin \alpha z} Mf_0(z) + \frac{\sin \theta z}{\sin \alpha z} Mf_\alpha(z).$$

On a bien sûr

$$\Delta w(r, \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z = 1/2} r^{z-2} (z^2 + \partial_\theta^2) W(z, \theta) dz = 0.$$

Par ailleurs, puisque zW et $\partial_\theta W$ appartiennent à

$$C([0, \alpha]; L^2(\operatorname{Re} z = 1/2)),$$

on a

$$\partial_r w \in C([0, \alpha]; L^2(\mathbb{R}_+)), \quad \frac{1}{r} \partial_\theta w \in C([0, \alpha]; L^2(\mathbb{R}_+))$$

tandis que $w = r\tilde{w} + f(0)$, où $\tilde{w} \in C([0, \alpha]; L^2(\mathbb{R}_+))$. On en déduit que $\chi w \in E$ pour toute fonction $\chi \in C^\infty$ à support borné, sous la réserve que $w(0, 0) = w(0, \alpha)$, ce qui sera entraîné par la condition de Dirichlet qu'il nous reste à vérifier. On a

$$w(r, 0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z=1/2} r^z M f_0(z) dz + f(0) = f_0(r)$$

d'après la formule de Cauchy et la formule d'inversion pour M . On a de même $w(r, \alpha) = f_\alpha(r)$, ce qui achève la démonstration dans le cas du problème de Dirichlet.

Passons au problème de Neumann. Si $g = (g_0, g_\alpha) \in L^2(\partial\Omega)$, on pose cette fois

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z=1/2} r^z W(z, \theta) dz,$$

où

$$W(z, \theta) = -\frac{\cos(\alpha - \theta)z}{z \sin \alpha z} M g_0(z - 1) - \frac{\cos \theta z}{z \sin \alpha z} M g_\alpha(z - 1).$$

On constate comme ci-dessus que w est harmonique dans Ω et que

$$\frac{w}{r}, \quad \partial_r w, \quad \frac{1}{r} \partial_\theta w \in C([0, \alpha]; L^2(\mathbb{R}_+)).$$

On notera également que $w(0, \theta) = 0$. Enfin, w vérifie la condition de Neumann puisque

$$\frac{1}{r} \partial_\theta w(r, 0) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Re} z=1/2} r^{z-1} M g_0(z - 1) dz = -g_0(r)$$

d'après la formule d'inversion pour M . On vérifie de même que $r^{-1} \partial_\theta w(r, \alpha) = g_\alpha(r)$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [BG] M. S. Baouendi and C. Goulaouic, *Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kovalevsky theorems*, Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), 1151–1162.
- [CT] J. Cheeger and M. Taylor, *Diffraction by conical singularities*. I, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 275–331; II, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 487–529.
- [Ga] H. G. Garnir, *Fonction de Green pour l'opérateur métaharmonique dans un angle ou un dièdre*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège (1952), 119–140, 207–231, 328–344.
- [G] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman, New York, 1985.

- [H] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. 3, Springer, Berlin and New York, 1985.
- [KK] M. Kashiwara and T. Kawai, *Microhyperbolic pseudo-differential operators*. I, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 359–404.
- [Ke] J. B. Keller, *Geometrical theory of diffraction*, J. Opt. Soc. Amer. **52** (1962), 116–130.
- [L1] G. Lebeau, *Deuxième microlocalisation à croissance*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exposé no. 15, 1982–83, Ecole Polytechnique, Palaiseau.
- [L2] —, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes, Lemme III.4*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 145–216.
- [M] H. M. Macdonald, *Electric waves*, Cambridge University Press, London and New York, 1902, pp. 186–198.
- [Mo] F. Molinet, *Geometrical theory of diffraction*. I, IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter, August 1987, pp. 6–17; II, IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter, October 1987, pp. 5–16.
- [N] L. Nirenberg, *An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalevsky theorem*, J. Differential Geom. **6** (1972), 561–576.
- [O] L. V. Ovsjannikov, *A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **200** (1971); English transl. in Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 1497–1502.
- [R] M. Rouleux, *Diffraction analytique sur une variété à singularités coniques*, Comm. Partial Differential Equations **11** (1986), 947–988.
- [Sc] P. Schapira, *Propagation at the boundary and reflection of analytic singularities of solutions of linear partial differential equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **12** Suppl. (1977), 441–453.
- [S1] J. Sjöstrand, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems*. I, Comm. Partial Differential Equations **5** (1980), 41–94.
- [S2] —, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, no. 95, Société Mathématique de France, Montrouge, 1982.
- [S3] —, *Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems*, Math. Ann. **254** (1980), 211–256.
- [U] M. Uchida, *Microlocal analysis of diffraction at the corner of an obstacle*, Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure (4) **25** (1992), 47–75, et Séminaire Equations aux Dérivées Partielles 1989–1990, exposé no. 3, Ecole Polytechnique.
- [V] J.-P. Varenne, *Diffraction par un angle ou un dièdre*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **290** (1980), 175–178.

ABSTRACT. We study the Dirichlet problem for a wave outside a corner with general analytic boundary.

In particular, we give the asymptotic expansion of the singularity on the diffracted cone.

RESUMÉ. Nous étudions la réflexion d'une onde par un coin à bord analytique, avec condition de Dirichlet.

Nous calculons en particulier l'amplitude diffusée à hautes fréquences sur le cône diffracté.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, BÂTIMENT 425, 91405 ORSAY, FRANCE

E-mail address, P. Gérard: pgerard@matups.matups.fr

E-mail address, G. Lebeau: lebeau@matups.matups.fr