LES TAUBÉRIENS GÉNÉRAUX DE NORBERT WIENER

S. MANDELBROJT

Il est peu probable que A. Tauber, qui donna le premier théorème réciproque (conditionnel, bien entendu) du théorème d'Abel, à savoir que $\lim_{x\to 1} \sum A_n x^n = S$, avec $A_n = o(1/n)$, implique $\sum A_n = S$, ait jamais pu songer que son nom serait donné à un ensemble aussi vaste de théorèmes de l'Analyse. Il est vrai que, quels que soient l'intérêt et l'importance des "taubériens" démontrés entre 1897—date de la publication du théorème de Tauber—et la parution des taubériens généreaux de Wiener, ce sont ces derniers qui ont élevé au rang d'une théorie structurée et harmonieuse l'ensemble des recherches consacrées à ce subjet.

Il semble que ce soit le théorème de Littlewood permettant de substituer le "O" au "o" de Tauber qui constitue la première étape importante "pre-wienerienne" dans cet ordre d'idées. Landau a pu remplacer la condition de Littlewood par la condition $nA_n > -K$, et celle-ci, jointe à la sommabilité au sens de Lambert de la suite A_n vers A, permet, d'après Hardy et Littlewood, d'affirmer que $\sum A_n = A$.

En partant de ce dernier taubérien, des auteurs ont pu déduire le théorème classique d'Hadamard et de de la Vallée-Poussin concernant la distribution des nombres premiers: $\pi(x) \sim x/\log x$.

Sans insister ici sur d'autres résultats très profonds de Landau, de Hardy-Littlewood et sur un théorème d'Ikehara, qui est une des plus belles applications des taubériens généraux, et dont nous parlerons plus loin, on aperçoit après cette simple énumération la richesse et les ramifications de l'ensemble des faits ainsi établis. Mais on s'aperçoit aussi de la dispersion de ces résultats, et des idées qui les ont guidés. On pouvait admirer le talent et la technique des chercheurs, mais il était difficile d'apercevoir une construction relevant d'une structure indiquant le fond de l'ensemble de ces recherches.

D'avoir trouvé un principe général concernant les transformées de Fourier, et notamment les convolutions—principe qui englobe les résultats cités et tant d'autres, anciens et nouveaux, tous importants —est le grand mérite de Wiener. Une des plus beaux chapitres de l'oeuvre de Norbert Wiener, de l'analyse harmonique, et de l'analyse, dite "classique," tout court, est ainsi créé.

Le taubérien général de Wiener est constitué en réalité de deux formes de théorèmes dont voici les deux énoncés essentiels [74], [81]:*

* Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie générale des oeuvres de Norbert Wiener.

THÉORÈME 1. *Soit $K_1 \in L$, et supposons que $\hat{K}_1(u) \neq 0$ pour tout u réel ($\hat{K}_1$ désigne la transformée de Fourier de K_1). Soit h une fonction bornée sur la droite. Si*

$$\lim_{x \to \infty} \int K_1(x - y)h(y)\, dy = A \int K_1(x)\, dx,$$

on a aussi

$$\lim_{x \to \infty} \int K(x - y)h(y)\, dy = A \int K(x)\, dx$$

pour tout K appartenant à L.

THÉORÈME 2. *Soient $K_1 \in L$, $K \in L$, les deux fonctions étant continues et supposons que*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Sup}_{n \leq x < n+1} |K_1(x)| < \infty, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname*{Sup}_{n \leq x < n+1} |K(x)| < \infty,$$

avec $\hat{K}_1(u) \neq 0$ pour tout u réel. Soit h une fonction localement à variation bornée, telle que pour tout x

$$\int_x^{x+1} |dh(y)| < M.$$

Si

$$\lim_{x \to \infty} \int K_1(x - y)\, dh(y) = A \int K_1(x)\, dx,$$

on a aussi

$$\lim_{x \to \infty} \int K(x - y)\, dh(y) = A \int K(x)\, dx.$$

La démonstration originale du Théorème 1 est basée sur le théorème suivant concernant le sous-espace engendré par les translatés de K_1, théorème qui joue, lui-même, un rôle extrêmement important dans l'analyse harmonique.

THÉORÈME 3. *Si $K_1 \in L$, $K \in L$, $\hat{K}_1(u) \neq 0$ pour tout u réel, à tout $\epsilon > 0$ correspond une suite A_n et une suite de nombres réels ξ_n, les deux suites finies, telles que*

$$\int | K(x) - \sum A_n K_1(x+\xi_n) | \, dx < \epsilon.$$

D'ailleurs, la condition $\hat{K}_1(u) \neq 0$ est aussi nécessaire pour qu'une telle approximation soit possible pour tout K de L.

Le Théorème 3 est un cas particulier d'un théorème beaucoup plus vaste. Ainsi [81]:

THÉORÈME 4. *Si $K \in L$ et si $\sum$ est une sous-classe de L, dont les transformées de Fourier n'ont pas de zéro commun (réel), K peut être approximé par des combinaisons linéaires finies des fonctions de $\sum$.*

Désignons par A la classe des fonctions qui sont les transformées de Fourier des fonctions de L (plusieurs auteurs dénotent cette classe, très justement, par W). Une des étapes essentielles dans la démonstration des théorèmes cités (aussi bien dans la démonstration originale de Wiener du Théorème 3 que dans celles des auteurs qui ont fourni d'autres démonstrations pour théorème 1) consiste à démontrer que la division par une fonction de la classe A fournit, dans un intervalle où cette transformation ne s'annule pas, la restriction d'une fonction de la même classe. Voici exactement ce théorème (dont la version "séries trigonométriques" remonte à Denjoy):

THÉORÈME 5. *Si $k \in A$ avec $k(u) \neq 0$ sur $[a, b]$, et si $f \in A$ avec $f(u) = 0$ pour $u \notin [a, b]$, on a aussi $f/k \in A$.*

C'est à partir de ce théorème qu'a pu prendre naissance le théorème appelé "théorème de Lévy-Wiener" indiquant l'analyticité de F comme condition suffisante pour que cette fonction "opère" dans A —résultat qui a provoqué des recherches très importantes durant la dernière décennie.

Un des passages du taubérien général de Wiener au théorème sur la distribution des nombres premiers consiste nécessairement (que ce passage soit fait par Wiener ou par ceux qui ont utilisé son taubérien) en la constatation que la transformée de Fourier d'une certaine fonction K_1 ($\in L$) ne s'annule pas; or, il est intéressant de constater que dans ce passage la transformée de Fourier en question se trouve toujours être, à des facteurs simples près (pour que le produit soit la transformée de Fourier d'une fonction de L), la fonction $\zeta(1+iu)$.

Est-ce la recherche d'une nouvelle démonstration du théorème d'Hadamard-de la Vallée-Poussin, démonstration dans laquelle le non-évanouissement de $\zeta(s)$ sur $\Re s = 1$ se traduit par le non-évanouissement de la transformée de Fourier d'une fonction, facteur d'une convolution, qui a conduit l'auteur à son idée extrêmement générale?

C'est en cherchant à se débarrasser de quelques hypothèses intervenant dans un théorème de Landau, et dans un théorème bien plus général de Hardy et Littlewood, hypothèses manifestement peu appropriées au sujet, que S. Ikehara a obtenu son théorème bien connu. Et c'est parce que ce théorème, particulièrement intéressant, est obtenu par l'auteur comme une des premières applications du taubérien général de Wiener (sous Théorème 2) que nous croyons utile de l'énoncer ici:

$\alpha(y)$ étant une fonction non décroissante pour $y>1$, si

$$A(w) = \int_{1+0}^{\infty} y^{-w} d\alpha(y)$$

converge absolument pour $\Re w>1$, et si la fonction $A(w)-(w-1)^{-1}$ est continue pour $\Re w \geqq 1$, on a $\alpha(y) \sim y (y \to \infty)$.

Ce résultat a conduit Wiener à un théorème qui, une fois de plus, ressemble fortement au passage de $\zeta(1+iu) \neq 0$ au théorème $\pi(x) \sim x/\log x$ [81].

Avec les notations précédentes, supposons que la fonction $e^{A(w)}(w-1)^{A}$ $(0<A<2\frac{1}{2})$ puisse être prolongée analytiquement sur $\Re w=1$, sans s'annuler sur cette droite. On a alors

$$A = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_{1+0}^{N} \log x \, d\alpha(x).$$

Comme Wiener l'a démontré, les conclusions des Théorèmes 1 et 3 restent valables si $\hat{K}_1(u)$ ne s'annule que dans des intervalles fermés intérieurs aux intervalles où $\hat{K}(u)=0$ [74].

C'est à partir de ce point que de nombreux problèmes ont été posés, problèmes qui conduisent à la synthèse harmonique moderne.

Terminons en remarquant qu'un théorème du type 3 a été également démontré par Wiener dans L_2, théorème où la condition $\hat{K}_1(u) \neq 0$ est remplacée, bien entendu, par la condition que $\hat{K}_1(u)=0$ sur un ensemble de mesure nulle.

COLLÈGE DE FRANCE,
PARIS, FRANCE