EIN ANALOGON ZUM HIGH INDICES THEOREM FÜR POTENZREIHEN MIT WENIGEN VORZEICHENWECHSELN

BY JOACHIM KÜHN

Communicated by Maurice Heins, August 21, 1967

1. Problem und Ergebnis. Es sei

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

eine in $\{z \mid |z| < 1\}$ konvergente Potenzreihe mit reellen Koeffizienten. Man sagt, daß der Koeffizient a_m einen Vorzeichenwechsel bestimmt, wenn erstens $a_m \neq 0$ ist und zweitens das Vorzeichen von a_m dem des letzten a_m vorangehenden nichtverschwindenden Koeffizienten entgegengesetzt ist. Mit

$$\{\nu_k\} \tag{2}$$

wollen wir die Folge der Indizes derjenigen Koeffizienten von (1) bezeichnen, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen. Wir setzen voraus, daß die Folge (2) eine q-Hadamardfolge ist, d.h. es gibt ein $q > 1$, so daß

$$\nu_{k+1}/\nu_k \geqq q \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

Für solche Potenzreihen gilt der folgende, zum High Indices Theorem von Hardy-Littlewood (etwa [4], S.173) Analoge

SATZ. (i) *Die Folge* $\{\nu_k\}$ *sei eine q-Hadamardfolge, und es sei* $|f(x)| \leqq A$ $(0 \leqq x < 1)$. *Dann gilt* $|a_n| \leqq KAn$, *wobei die Konstante K nur von q abhängt.*

(ii) *Unter den genannten Voraussetzungen ist die Größenordnung* $a_n = O(n)$ *bestmöglich.*

Wir benutzen zum Beweis ähnliche Methoden wie Edrei [1], Gaier [2] und Halász [3]. Genauere Ausführungen zu diesem Satz sowie verwandte Sätze werden in der Arbeit [5] des Verfassers behandelt.

2. Hilfsmittel. Im folgenden sei D die längs der negativ reellen Achse geschlitzte Ebene. Von der Wurzelfunktion wollen wir stets denjenigen Zweig nehmen, der in D regulär ist und durch $\sqrt{1} = 1$ bestimmt ist.

Für die Folge (2) bilden wir mit $\omega_k = \nu_k - \frac{1}{2}$ das Blaschkeprodukt

$$(4)\qquad B(z)=\prod_1^\infty \frac{\sqrt{\omega_k}-\sqrt{z}}{\sqrt{\omega_k}+\sqrt{z}}=\prod_1^\infty\left(1-\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{\omega_k}+\sqrt{z}}\right),$$

das wegen (3) in D konvergiert.

HILFSSATZ 1. *Für das Blaschkeprodukt* (4) *gilt* $|B(n)|^{-1}\leqq Cn$ $(n=1, 2, \cdots)$, *wobei die Konstante* C *nur von* q *abhängt.*

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lambda_n\in\langle n, n+1\rangle$ $(n=1, 2, \cdots)$ und $\mu_n=n^2/\lambda_n$ gesetzt. Wir bilden die in D meromorphe Funktion

$$(5)\qquad G(z)=\prod_1^\infty \frac{1-z/n}{(1+(z/\mu_n)^{1/2})(1-(z/\lambda_n)^{1/2})}$$

mit einfachen Nullstellen an $z=n$ und einfachen Polen an $z=\lambda_n$ $(n=1, 2, \cdots)$.

HILFSSATZ 2. *Die Funktion* G *hat die folgenden Eigenschaften*:

(a) *auf dem Rand von* D *gilt* $|G(z)|\leqq 1$,

(b) *auf Kreisen* $\{z\,|\,|z|=R\}$ *mit* $R>1$ *und* $|R-\lambda_n|>\frac{1}{4}$ $(n=1, 2, \cdots)$ *gilt* $|G(z)|\leqq K|z|^4$, *wobei die Konstante* K *nicht von* $\{\lambda_n\}$ *abhängt,*

(c) $|\sin \pi x/G(x)|\leqq 32(x+1)$ $(x>1)$.

3. Beweisskizze. Für ein festes $\delta\in(0, 1)$ bilden wir $f_\delta(z)=f(\delta z)$ $=\sum_1^\infty a_n\delta^n z^n$ und studieren die Hilfsfunktion

$$(6)\qquad H_\delta(z)=\int_0^1 f_\delta(t)t^{-z-1}dt\quad (z=x+iy).$$

Da $f_\delta(t)/t$ im Intervall $\langle 0, 1\rangle$ regulär ist, ist H_δ in $\{z\,|\,x<1\}$ definiert und stellt dort eine reguläre Funktion dar. Auf der negativ reellen Achse gilt

$$(7)\qquad |H_\delta(-x)|\leqq A/x\quad (x>0).$$

Durch gliedweise Integration erhält man für Re $z<0$

$$(8)\qquad H_\delta(z)=\sum_1^\infty \frac{a_n}{n-z}\delta^n$$

und erkennt daran, daß H_δ eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion mit einfachen Polen an $z=n$ und den dazugehörigen Residuen $-a_n\delta^n$ ist. Folglich ist die Funktion

$$\Phi_\delta(z)=H_\delta(z)\sin\pi z$$

eine ganze Funktion, die auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt.

Wir interessieren uns für die positiven Nullstellen dieser Funktion. Dazu benötigen wir die Eigenschaft

$$\Phi_\delta(n) = (-1)^{n+1} a_n \delta^n \pi \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{9}$$

Wir diskutieren den einfachsten Fall $a_n \neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$. Gilt $a_n a_{n+1} > 0$, so liegt wegen (9) im Intervall $(n, n+1)$ mindestens eine Nullstelle λ_n von Φ_δ; gilt $a_n a_{n+1} < 0$, d.h. bestimmt a_{n+1} einen Vorzeichenwechsel, so braucht im Intervall $(n, n+1)$ keine Nullstelle zu liegen. Die Nullstellen fehlen also höchstens in den Intervallen $(\nu_k - 1, \nu_k)$. Um auch dort Nullstellen zu bekommen, bilden wir mit dem Blaschkeprodukt (4) $\Psi_\delta(z) = \Phi_\delta(z) B(z)$. Diese Funktion hat nun in jedem Intervall $(n, n+1)$ $(n=1, 2, \cdots)$ mindestens eine Nullstelle λ_n.

Mit $\mu_n = n^2/\lambda_n$ betrachten wir

$$F_\delta(z) = \frac{\Psi_\delta(z)}{\pi} \left[\prod_1^\infty (1 + z/n) e^{-z/n} \right.$$
$$\left. \prod_1^\infty (1 + (z/\mu_n)^{1/2}) \cdot (1 - (z/\lambda_n)^{1/2}) e^{z/n} \right]^{-1} \quad (z \in D)$$

und stellen Eigenschaften von F_δ zusammen:

(a) F_δ ist in D regulär,

(b) auf dem Rand von D gilt wegen (7) und wegen des Hilfssatzes 2 $|F_\delta(z)| \leqq A$,

(c) es gibt eine Folge von Kreisen $\{z \mid |z| = R_\nu\}$ $(R_\nu \to \infty)$, auf welchen $F_\delta(z) = O(|z|^5)$ $(\nu \to \infty)$ gilt. Wegen des Pragmén-Lindelöfschen Prinzips erhalten wir

$$|F_\delta(z)| \leqq A \quad (z \in D).$$

Da

$$|F_\delta(n)| = |a_n| \delta^n \pi |B(n)|$$
$$\cdot \left[\prod_{m=1}^\infty (1 + (n/\mu_m)^{1/2}) \left| 1 - (n/\lambda_m)^{1/2} \right| e^{n/m} \pi \prod_{m=1}^\infty (1 + n/m) e^{-n/m} \right]^{-1},$$

folgt wegen der Hilfssätze 1 und 2

$$|a_n| \delta^n \leqq 32 C A n(n+1)/n\pi.$$

Läßt man $\delta \to 1$ streben, so ergibt sich die Behauptung (i).

Die Behauptung (ii) belegen wir durch das Beispiel

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k (z^{2k} = z^{2k+1}).$$

Diese Reihe konvergiert im Einheitskreis, die Folge der Indizes derjenigen Koeffizienten, die Vorzeichenwechsel bestimmen, ist $\{2^{k-1}+1\}$, also ersichtlich eine Hadamardfolge, und die Koeffizienten bei z^{2^k} sind $\pm 2^k$. Durch leichte Rechnung zeigt man $f(x) = O(1)$ $(x \to 1)$.

Literatur

1. A. Edrei, *Gap and density theorems for entire functions*, Scripta Math. **23** (1957)' 117–141.
2. D. Gaier, *On the coefficients and the growth of gap power series*, SIAM J. Numer. Anal. **3** (1966), 248–265.
3. G. Halász, *Some complementary remarks to a paper of Mr. Gaier on gap theorems*, Acta Sci. Math. (Szeged).
4. G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford Univ. Press, New York, 1949.
5. J. Kühn, *Über das Wachstum reeller Potenzreihen mit wenigen Vorzeichenwechseln und über das Wachstum ganzer Dirichlet-Reihen*, Mitt. Math. Sem. Giessen **75** (1967).

Universität Giessen