JOURNAL OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 21, Number 1, January 2008, Pages 23–61
S 0894-0347(06)00538-8
Article electronically published on June 9, 2006

COMPLEXES PONDÉRÉS SUR LES COMPACTIFICATIONS DE BAILY-BOREL : LE CAS DES VARIÉTÉS DE SIEGEL

SOPHIE MOREL

Les variétés de Shimura les plus étudiées sont celles associées au groupe $\mathbf{GL}_2$, autrement dit les courbes modulaires. Si Y est une courbe modulaire, on obtient sa compactification de Baily-Borel $j : Y \longrightarrow Y^*$ en ajoutant un nombre fini de pointes (car $\mathbf{GL}_2$ est de rang semi-simple 1). Comme Y^* est lisse, le complexe d'intersection associé à un système de coefficients $\mathcal{F}$ sur Y est $j_*\mathcal{F}$. Il est possible dans ce cas de calculer la fonction L de Y^* à coefficients dans $j_*\mathcal{F}$, et il a été prouvé dans des travaux d'Eichler, Shimura, Deligne et Ihara (entre autres) qu'elle s'écrit comme un produit alterné de fonctions L de formes modulaires cuspidales et de fonctions zêta.

La fonction L est un produit de facteurs locaux L_p, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, et ce sont les L_p que l'on calcule. Le cas essentiel est celui où Y^* et $j_*\mathcal{F}$ ont bonne réduction en p. Le facteur local L_p ne dépend alors que des réductions modulo p de Y^* et $j_*\mathcal{F}$.

Pour calculer L_p dans le cas des courbes modulaires, il existe deux méthodes : la méthode des congruences, qui ne se généralise pas en dimension supérieure, et la comparaison de la formule des traces d'Arthur-Selberg et de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. C'est cette deuxième méthode que l'on cherche à généraliser.

Pour une variété de Shimura générale $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, l'application de cette méthode au calcul de L_p est plus délicate. Un premier pas est le calcul de la trace d'une correspondance de Hecke composée avec une puissance du morphisme de Frobenius sur la cohomologie du complexe d'intersection de la compactification de Baily-Borel, ou, ce qui suffit grâce à la conjecture de Deligne si la puissance de Frobenius est assez grande (cf. [P3], [F] et [V]), des termes locaux naïfs de ces correspondances.

Brylinski et Labesse ([BL]) ont effectué ce calcul pour $\mathbf{G} = R_{E/\mathbb{Q}}\mathbf{GL}_2$, avec E une extension totalement réelle de $\mathbb{Q}$ de degré supérieur ou égal à 2, et ils en ont déduit que la fonction L du complexe d'intersection était bien de la forme attendue.

Pour $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(2, 1)$, le calcul a été fait par Kottwitz et Rapoport dans l'article [KR] du livre [LR] (dans ce cas, on peut aussi montrer que la fonction L à coefficients dans le complexe d'intersection est un produit alterné de fonctions L automorphes ; voir l'article de Langlands et Ramakrishnan dans le même livre [LR]). Le cas d'un groupe $\mathbf{G}$ de rang 1 et d'une correspondance de Hecke triviale a été traité par Rapoport dans son article [R], paru aussi dans [LR].

Received by the editors November 11, 2005.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11F75 ; Secondary 11G18, 14F20.

©2006 American Mathematical Society
Reverts to public domain 28 years from publication

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Signalons enfin que le cas d'un groupe unitaire sur $\mathbb{Q}$ de rang quelconque et d'une correspondance de Hecke triviale a été traité dans [M].

Dans cet article, nous calculons les termes locaux naïfs d'une correspondance de Hecke composée avec une puissance du morphisme de Frobenius pour le complexe d'intersection de la compactification de Baily-Borel des variétés de Shimura associées aux groupes symplectiques sur $\mathbb{Q}$ (de rang arbitraire).

Notre outil principal est le théorème de Pink calculant les restrictions aux strates de la compactification de Baily-Borel du prolongement d'un système de coefficients sur la variété de Shimura (cf. [P2]). Pour les variétés de Shimura $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ considérées dans cet article, le théorème de Pink s'écrit (cf. le théorème 2.2.1)

$$i^*Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'}R\Gamma(\Gamma_\ell, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}),V)),$$

où j est l'inclusion de la variété de Shimura dans sa compactification de Baily-Borel $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, V est une représentation algébrique du groupe $\mathbf{G}$, $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ est le système de coefficients associé à V, i est l'inclusion d'une strate associée à un parabolique maximal $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et Γ_ℓ est un sous-groupe arithmétique de la partie linéaire du quotient de Levi de $\mathbf{P}$.

Pour pouvoir utiliser ce théorème, nous donnons une nouvelle construction du prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur : Si $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert non vide dans un schéma X séparé de type fini sur un corps fini et K un faisceau pervers pur de poids a sur U, alors

$$j_{!*}K = w_{\leq a}Rj_*K.$$

Dans cette formule, $w_{\leq a}$ est le tronqué pour la t-structure $({}^wD^{\leq a}(X), {}^wD^{>a}(X))$, où ${}^wD^{\leq a}(X)$ (resp. ${}^wD^{>a}(X)$) est la sous-catégorie pleine de la catégorie des complexes mixtes sur X dont les objets sont les complexes qui ont tous leurs faisceaux de cohomologie perverse de poids $\leq a$ (resp. $> a$). Cette t-structure est assez inhabituelle, puisqu'elle est dégénérée et de coeur nul.

De plus, la t-structure $({}^wD^{\leq a}, {}^wD^{>a})$ sur un schéma stratifié s'obtient en recollant les t-structures analogues sur les strates.

En combinant la formule ci-dessus et le théorème de Pink, on obtient le théorème principal de cet article (théorème 4.2.1) :

Théorème. *On note c la dimension de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$. Soit V une représentation algébrique de $\mathbf{G}$ sur laquelle le centre déployé de $\mathbf{G}$ agit trivialement. Si i est l'inclusion d'une strate de bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, on a l'égalité virtuelle*

$$[i^*IC_V] = $$
$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}_r}\left(\sum_S \sum_{i\in I_S} (-1)^{card(S)-1}\left[R\Gamma\left(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), g_i g.V)_{\geq t_r, <t_s, s\in S\setminus\{r\}}\right)\right]\right),$$

où IC_V est le complexe d'intersection sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ à coefficients dans V, défini par la formule suivante :

$$IC_V = (j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c]))[-c].$$

Les notations précises sont expliquées dans 4.2. Disons seulement que les t_i sont des entiers qui ne dépendent que des dimensions des différentes strates (on peut prendre par exemple t_i égal à l'opposé de la codimension de la i-ième strate), que S parcourt un système d'indices des sous-groupes paraboliques standard dont les

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

strates de bord associées dans la compactification de Borel-Serre réductive s'envoient sur la strate de la compactification de Baily-Borel considérée, que, si $\mathbf{P}_S$ est le sous-groupe parabolique correspondant à S, alors $\mathbf{N}_S$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}_S$ et Γ_S est un sous-groupe arithmétique de la partie linéaire du quotient de Levi $\mathbf{P}_S/\mathbf{N}_S$ de $\mathbf{P}_S$, et enfin que $R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), g_i g.V)_{\geq t_r, <t_s, s\in S\setminus\{r\}}$ est un tronqué pour les poids de certains tores centraux de $\mathbf{P}_S/\mathbf{N}_S$.

L'action des correspondances de Hecke sur les complexes de systèmes locaux qui apparaissent dans ce théorème est donnée par le théorème 5.2.2. Grâce à ce théorème, à un résultat de Kottwitz sur le comptage des points à valeurs dans un corps fini ([K]) et à la conjecture de Deligne évoquée plus haut, on peut en déduire une formule pour la trace sur la cohomologie du complexe d'intersection à coefficients dans V d'une correspondance de Hecke composée avec une puissance assez grande du morphisme de Frobenius.

Du point de vue topologique, le complexe d'intersection peut être calculé en utilisant la compactification de Borel-Serre réductive. Plus précisément, Goresky, Harder et MacPherson construisent une famille de complexes pondérés sur la compactification de Borel-Serre réductive et montrent que le complexe d'intersection sur la compactification de Baily-Borel est l'image directe de deux de ces complexes pondérés par le morphisme naturel de la compactification de Borel-Serre réductive sur la compactification de Baily-Borel (cf. [GHM]).

Nous définissons en caractéristique strictement positive des complexes pondérés analogues aux images directes des complexes pondérés de Goresky, Harder et MacPherson, en remplaçant les troncatures par les poids pour les actions des tores centraux des groupes associés aux composantes de bord par les troncatures par les poids de l'endomorphisme de Frobenius sur les strates de bord. Les premiers, à notre connaissance, à utiliser ce type de méthode sont Looijenga et Rapoport dans [LR2]. Le théorème ci-dessus vaut en fait pour un complexe pondéré quelconque.

Passons en revue les différentes parties.

Les deux premières parties contiennent des rappels.

Dans la partie 1, nous introduisons les variétés de Shimura que nous comptons étudier et leurs modèles entiers, puis nous rappelons les théorèmes d'existence des modèles canoniques sur $\mathbb{Q}$ de la compactification de Baily-Borel et des compactifications toroïdales. En suivant Pink ([P2], 3.7), nous définissons une stratification du bord de la compactification de Baily-Borel par des variétés de Shimura associées à des groupes symplectiques plus petits. Enfin, nous rappelons rapidement certains des résultats de Chai et Faltings sur les modèles entiers des compactifications.

La partie 2 présente la construction des systèmes de coefficients sur la variété de Shimura provenant de représentations du groupe. Nous rappelons d'abord la construction de ces systèmes de coefficients sur les points complexes, puis nous expliquons une méthode, due à Pink ([P2], 1), pour montrer que ces systèmes de coefficients proviennent de faisceaux étales sur les modèles canoniques. Ensuite, nous énonçons le théorème de Pink sur le prolongement de ces faisceaux étales à la compactification de Baily-Borel.

La partie 3 est indépendante des autres. Dans un premier temps, nous y étudions la t-structure $({}^wD^{\leq a}(X), {}^wD^{>a}(X))$ définie plus haut et y montrons la formule pour le prolongement intermédiaire d'un faisceau pervers pur K de poids a sur un ouvert non vide $j : U \longrightarrow X$. Dans un deuxième temps, nous considérons des t-structures sur un schéma stratifié X qui s'obtiennent en recollant des t-structures

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

$({}^wD^{\leq a'}, {}^wD^{>a'})$ sur les strates (avec un a' qui dépend de la strate). Grâce aux propriétés de ces t-structures, nous obtenons, si l'ouvert U est réunion de strates, une égalité entre les classes dans le groupe de Grothendieck d'un $w_{\leq a}Rj_*K$ et d'une somme alternée de tronqués par le poids qui se calculent sur les strates contenues dans $X - U$ (théorème 3.3.5).

Dans la partie 4, nous appliquons les résultats de la partie 3 aux variétés de Shimura. Dans 4.1, nous définissons les complexes pondérés et montrons que deux de ces complexes sont isomorphes au complexe d'intersection. Dans 4.2, à l'aide du théorème de Pink et du théorème 3.3.5, nous obtenons une formule explicite, dans le groupe de Grothendieck, pour la restriction à une strate de bord de la compactification de Baily-Borel d'un complexe pondéré.

Dans la partie 5, nous traitons le cas des correspondances de Hecke. Nous commençons par montrer, dans 5.1, quelques résultats généraux sur les correspondances cohomologiques entre tronqués par le poids, en particulier un analogue pour les correspondances du théorème 3.3.5 (proposition 5.1.5). Dans 5.2, nous calculons explicitement les correspondances cohomologiques qui apparaissent au second membre dans la proposition 5.1.5. Ce calcul ressemble beaucoup à celui fait dans 4.2, mais il faut d'abord compléter le théorème de Pink par la proposition 5.2.3.

C'est un plaisir de remercier G. Laumon, qui a passé beaucoup de temps à discuter avec moi. Je remercie également M. Harris pour ses critiques d'une première version de mon texte, et R. Kottwitz, qui a corrigé ou simplifié les démonstrations de certains résultats de la partie 3.

1. Variétés de Shimura et leurs compactifications

1.1. Variétés de Shimura. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note

$$J_d = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$$

et

$$J_{d,d} = \begin{pmatrix} 0 & J_d \\ -J_d & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}_{2d}(\mathbb{Z}).$$

Le groupe général symplectique $\mathbf{GSp}_{2d}$ est le schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$ dont l'ensemble des points à valeurs dans une $\mathbb{Z}$-algèbre A est

$$\mathbf{GSp}_{2d}(A) = \{g \in \mathbf{GL}_{2d}(A) \text{ tel que } {}^tgJ_{d,d}g = c(g)J_{d,d}, c(g) \in A^\times\}.$$

$\mathbf{G} = \mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}}$ est un groupe réductif connexe déployé sur $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{Q}$-rang semi-simple d, $c : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ est un caractère de $\mathbf{G}$, et le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est $\mathbf{Sp}_{2d,\mathbb{Q}} = ker(c)$.

On note $\mathcal{X}_d^+$ ou $\mathcal{X}^+$ (resp. $\mathcal{X}_d^-$ ou $\mathcal{X}^-$) l'ensemble des morphismes $h : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{G}_\mathbb{R}$ (où $\mathbb{S} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ est le tore de Serre) qui induisent une structure de Hodge pure de type $\{(0,1),(1,0)\}$ sur $\mathbb{Q}^{2d}$, et tels que la forme bilinéaire $\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(v,w) \longmapsto {}^tvJ_{d,d}h(i)w$ soit symétrique définie positive (resp. négative). $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ agit transitivement (par conjugaison) sur $\mathcal{X} = \mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-$, et le morphisme

$$h_0 : z = a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} aI_d & -bJ_d \\ bJ_d & aI_d \end{pmatrix}$$

est dans $\mathcal{X}^+$, donc $\mathcal{X} \simeq \mathbf{G}(\mathbb{R})/Stab_{\mathbf{G}(\mathbb{R})}(h_0)$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Définition 1.1.1. Soient $d \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$, S un schéma sur $\mathbb{Z}[1/n]$ et $(A \longrightarrow S, \lambda)$ un schéma abélien sur S principalement polarisé et de dimension relative d. On note $A[n]$ le schéma en groupes fini étale sur S des points de n-torsion de A. Une structure de niveau n sur A est un isomorphisme (au-dessus de S) $\eta : A[n] \xrightarrow{\sim} \underline{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}_S^{2d}$ qui, à un automorphisme du S-schéma en groupes $\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_S$ près, envoie l'accouplement de Weil $A[n] \times A[n] \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}_S$ associé à λ sur la forme bilinéaire alternée sur $\underline{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})}^{2d}$ de matrice $J_{d,d}$.

Définition 1.1.2. On note $\mathcal{M}_{d,n}$ le champ sur $\mathbb{Z}[1/n]$ des schémas abéliens principalement polarisés de dimension relative d avec structure de niveau n.

$\mathcal{M}_{d,n}$ est au choix de la forme alternée près le champ défini par Chai et Faltings dans [CF, IV.6.1], mais vu comme champ sur $\mathbb{Z}[1/n]$ (au lieu de $\mathbb{Z}[1/n, e^{2i\pi/n}]$, cf. la remarque [CF, IV.6.12]). C'est un champ de Deligne-Mumford, lisse et de dimension relative $d(d+1)/2$ sur $\mathbb{Z}[1/n]$. Si $n \geq 3$, $\mathcal{M}_{d,n}$ est un espace algébrique, et même un schéma quasi-projectif sur $\mathbb{Z}[1/n]$. La fibre générique de $\mathcal{M}_{d,n}$ est la variété de Shimura $M^{\mathrm{K}_d(n)}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ associée à la donnée de Shimura pure $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ et au sous-groupe ouvert compact $\mathrm{K}_d(n) = Ker(\mathbf{GSp}_{2d}(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbf{GSp}_{2d}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. En particulier, l'ensemble des points complexes de $\mathcal{M}_{d,n}$ est

$$\mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{C}) = M^{\mathrm{K}_d(n)}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_d(n)).$$

Comme $\mathbf{G}^{der} = Ker(c)$ et $c : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ est surjectif, on a

$$\pi_0(\mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{R}^{+\times}\mathbb{Q}^\times \setminus \mathbb{A}^\times/c(\mathrm{K}_d(n)) = \mathbb{Q}^{+\times} \setminus \mathbb{A}_f^\times/c(\mathrm{K}_d(n)) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

Si $d = 0$, on a $\mathbf{G} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$, $\mathcal{X}_0 = \{\pm 1\} = \pi_0(\mathbb{R}^\times)$ avec l'action évidente de $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$, et

$$\mathcal{M}_{0,n} = Spec(\mathbb{Z}[1/n, e^{2i\pi/n}]),$$

vu comme un schéma sur $\mathbb{Z}[1/n]$.

Soit $d \in \mathbb{N}$. Si n divise m, on a un morphisme évident

$$T_1 : \mathcal{M}_{d,m} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n|Spec(\mathbb{Z}[1/m])}$$

(qui est un morphisme d'oubli d'une partie de la structure de niveau). Ce morphisme est fini étale galoisien de groupe $\mathrm{K}_d(n)/\mathrm{K}_d(m)$.

Soit $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. Si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathrm{K}_d(m) \subset g\mathrm{K}_d(n)g^{-1}$, alors on a un morphisme fini (de degré $[g\mathrm{K}_d(n)g^{-1} : \mathrm{K}_d(m)]$) et étale $T_g : \mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Q}}$ (cf. [P1], 3.4 et 11.5). Sur les points complexes, ce morphisme T_g est le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_d(m)) & \longrightarrow & \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_d(n)) \\ [(x,h)] & \longmapsto & [(x,hg)]. \end{array}$$

En particulier, si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $\mathrm{K}_d(m) \subset g\mathrm{K}_d(n)g^{-1} \cap \mathrm{K}_d(n)$, on dispose d'une correspondance $(T_g, T_1) : \mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Q}} \times \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Q}}$.

Soit p un nombre premier ne divisant pas n ; on note $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé en p de l'anneau $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{A}_f^p$ l'anneau des adèles finies dont la composante en p est triviale. On suppose que l'élément g de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ fixé ci-dessus est en fait dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$. Alors, si $m \in \mathbb{N}$ est tel que p ne divise pas m et $\mathrm{K}_d(m) \subset g\mathrm{K}_d(n)g^{-1}$, le morphisme $T_g : \mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Q}}$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}_{(p)}}$, qui sera encore noté T_g (cf. le début de [K], 6). Si de plus $\mathrm{K}_d(m) \subset g\mathrm{K}_d(n)g^{-1} \cap \mathrm{K}_d(n)$, on obtient donc une correspondance $(T_g, T_1) : \mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}_{(p)}} \times \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}_{(p)}}$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Remarque 1.1.3. Le choix de m n'a pas d'importance lorsque l'on s'intéresse à l'action de la correspondance (T_g, T_1) sur la cohomologie. En effet, si l'on remplace m par un multiple m', la correspondance (T_g, T_1) est remplacée par sa composée avec le morphisme fini étale galoisien $T_1 : \mathcal{M}_{d,m',\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Z}_{(p)}}$.

Dans la suite, on suppose toujours $n \geq 3$ et on note $\mathbf{G}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, etc., au lieu de $\mathbf{GSp}_{2d}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{GSp}_{2d}(\widehat{\mathbb{Z}})$, etc.

1.2. **Compactifications sur $\mathbb{Q}$.** Nous allons énoncer quelques-uns des résultats de Pink ([P1]) dans le cas particulier considéré. Commençons par rappeler la description des sous-groupes paraboliques maximaux de $\mathbf{G}$. Le tore diagonal

$$T = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{2d} \end{pmatrix}, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{2d} \in \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}, \lambda_r \lambda_{2d-r+1} = 1 \right\}$$

est un tore maximal de $\mathbf{G}$, et l'intersection $\mathbf{B}$ de $\mathbf{G}$ avec le groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathbf{GL}_{2d,\mathbb{Q}}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$. On appelle sous-groupes paraboliques standard de $\mathbf{G}$ les sous-groupes paraboliques de $\mathbf{G}$ qui contiennent $\mathbf{B}$. Tout sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ est conjugué par $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ à un unique sous-groupe parabolique standard, et les sous-groupes paraboliques standard maximaux sont $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_{d-1}$, avec

$$\mathbf{P}_r = \left\{ \begin{pmatrix} A & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, A, C \in \mathbf{GL}_{d-r,\mathbb{Q}}, B \in \mathbf{GSp}_{2r,\mathbb{Q}}, {}^t A J_{d-r} C = c(B) J_{d-r} \right\}.$$

Soit $r \in \{0, \dots, d-1\}$. On note $\mathbf{N}_r$ le radical unipotent de $\mathbf{P}_r$,

$$\mathbf{U}_r = \begin{pmatrix} I_{d-r} & 0 & * \\ 0 & I_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d-r} \end{pmatrix}$$

le centre de $\mathbf{N}_r$, $\mathbf{L}_r = \mathbf{P}_r / \mathbf{N}_r$,

$$\mathbf{Q}_r = \left\{ \begin{pmatrix} c(B) I_{d-r} & * & * \\ 0 & B & * \\ 0 & 0 & I_{d-r} \end{pmatrix}, B \in \mathbf{GSp}_{2r,\mathbb{Q}} \right\} \subset \mathbf{P}_r$$

si $r > 0$,

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} I_d & * \\ 0 & I_d \end{pmatrix} \subset \mathbf{P}_0,$$

$\mathbf{G}_r = \mathbf{Q}_r / \mathbf{N}_r$ et

$$\mathbf{L}_{\ell,r} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, A, C \in \mathbf{GL}_{d-r,\mathbb{Q}}, {}^t A J_{d-r} C = J_{d-r} \right\} \subset \mathbf{L}_r.$$

On a $\mathbf{L}_r = \mathbf{L}_{\ell,r} \times \mathbf{G}_r$, avec $\mathbf{L}_{\ell,r} \simeq \mathbf{GL}_{d-r,\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{G}_r \simeq \mathbf{GSp}_{2r,\mathbb{Q}}$. Si A est une $\mathbb{Z}$-algèbre, on note $\mathbf{L}_{\ell,r}(A)$ et $\mathbf{G}_r(A)$ les images réciproques par ces isomorphismes de $\mathbf{GL}_{d-r}(A)$et $\mathbf{GSp}_{2r}(A)$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

$\mathbf{Q}_r$ est le sous-groupe distingué de $\mathbf{P}_r$ défini par Pink dans [P1], 4.7 (cf. [P1], 4.25). On peut donc construire comme dans [P1], 4.11 un espace homogène $\mathcal{Y}_r$ sous $\mathbf{Q}_r(\mathbb{R})\mathbf{U}_r(\mathbb{C})$ et une application $h_r : \mathcal{Y}_r \longrightarrow Hom(\mathbb{S}_\mathbb{C}, \mathbf{Q}_{r,\mathbb{C}})$ tels que $(\mathbf{Q}_r, \mathcal{Y}_r)$ soit une donnée de Shimura mixte.

On note $(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ la donnée de Shimura pure $(\mathbf{Q}_r, \mathcal{Y}_r)/\mathbf{N}_r$ (cf. [P1], 2.9). Elle est isomorphe à la donnée $(\mathbf{GSp}_{2r,\mathbb{Q}}, \mathcal{X}_r)$ de la section 1.1.

On a une application "partie imaginaire" de $\mathcal{Y}_r$ dans $\mathbf{U}_r(\mathbb{R})(-1) = (2i\pi)^{-1}\mathbf{U}_r(\mathbb{R})$ ([P1], 4.14), et $\mathcal{X}^+$ (resp. $\mathcal{X}^-$) est l'image réciproque d'un cône ouvert convexe $C(\mathcal{X}^+, \mathbf{Q}_r)$ (resp. $C(\mathcal{X}^-, \mathbf{Q}_r)$) de $\mathbf{U}_r(\mathbb{R})(-1)$ ([P1], 4.15). Identifions $\mathbf{U}_r(\mathbb{R})(-1)$ à $M_{d-r}(\mathbb{R})$. Alors, d'après [P1, 4.26], le cône $C(\mathcal{X}^+, \mathbf{Q}_r)$ (resp. $C(\mathcal{X}^-, \mathbf{Q}_r)$) est l'ensemble des matrices de la forme AJ_{d-r}, avec A symétrique définie positive (resp. négative).

Si $\mathbf{P}$ est un sous-groupe parabolique maximal quelconque de $\mathbf{G}$, il est conjugué par $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ à l'un des $\mathbf{P}_r$, et on peut donc associer à $\mathbf{P}$ une donnée de Shimura mixte $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$, et une donnée de Shimura pure $(\mathbf{G}_P, \mathcal{X}_P) = (\mathbf{Q}, \mathcal{Y})/\mathbf{N}$, où $\mathbf{N}$ est le radical unipotent de $\mathbf{P}$. Les données de Shimura mixtes $(\mathbf{Q}, \mathcal{Y})$ sont appelées *composantes rationnelles de bord* de $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ ([P1], 4.11).

On fixe $n \geq 3$, et on note $\mathrm{K} = \mathrm{K}_d(n)$.

La compactification de Baily-Borel partielle de $\mathcal{X}$ est

$$\mathcal{X}^* = \mathcal{X} \sqcup \coprod_{\mathbf{P}} \mathcal{X}_P,$$

où $\mathbf{P}$ parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques maximaux de $\mathbf{G}$; on munit $\mathcal{X}^*$ de la topologie de Satake (cf. par exemple [P1], 6.2). L'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ sur $\mathcal{X}$ se prolonge en une action continue sur $\mathcal{X}^*$, et la compactification de Baily-Borel de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ est

$$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C}) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X}^* \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}).$$

Elle a une structure canonique de variété complexe projective normale ([BB], 10.11).

Pink a montré que $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ a un modèle canonique $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ sur $\mathbb{Q}$ ([P1], 12.3), qui est un schéma projectif normal sur $\mathbb{Q}$. Le modèle canonique $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$. De plus, toujours d'après [P1, 12.3], la stratification du bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ de [P1, 6.3] et [P2, 3.7] est définie sur $\mathbb{Q}$.

Rappelons la définition de cette stratification (on suit [P2], 3.7). Soient $r \in \{0, \dots, d-1\}$ et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$. On pose $\mathrm{H}_{g,r} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{H}_{\ell,g,r} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{L}_{\ell,r}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{K}_{Q,g,r} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$, $\mathrm{K}_{N,g,r} = g\mathrm{K}g^{-1} \cap \mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)$, $\Gamma_{\ell,g,r} = \mathrm{H}_{\ell,g,r}/\mathrm{K}_{N,g,r}$ et $\mathrm{K}_{g,r} = \mathrm{K}_{Q,g,r}/\mathrm{K}_{N,g,r} \subset \mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)$. Le groupe $\mathrm{H}_{g,r}$ agit sur $M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ et son sous-groupe distingué d'indice fini $\mathrm{H}_{\ell,g,r}\mathrm{K}_{Q,g,r}$ agit trivialement. On note $M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)/\mathrm{H}_{g,r}$ le quotient de la variété quasi-projective $M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)$ par le groupe fini $\mathrm{H}_{g,r}/\mathrm{H}_{\ell,g,r}\mathrm{K}_{Q,g,r}$. On a un morphisme

$$i_{g,r} : M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$$

qui est le composé du morphisme fini $M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r) \longrightarrow M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r, \mathcal{X}_r)/\mathrm{H}_{g,r}$ et d'une immersion localement fermée. Sur les points complexes, $i_{g,r}$ est donné par le

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
M^{K_{g,r}}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)(\mathbb{C}) \arrow[r, equal] & \mathbf{G}_r(\mathbb{Q})\setminus(\mathcal{X}_r\times\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_{g,r}) & {[(x,q\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f))]} \\
& \mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\setminus(\mathcal{X}_r\times\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}_{Q,g,r}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d] & {[(x,q)]} \arrow[u, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\
M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)(\mathbb{C})/\mathrm{H}_{g,r} \arrow[r, equal] & \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\setminus(\mathcal{X}_r\times\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_{g,r}) \arrow[d] & {[(x,q)]} \arrow[d, mapsto] \\
M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*(\mathbb{C}) \arrow[r, equal] & \mathbf{G}(\mathbb{Q})\setminus(\mathcal{X}^*\times\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}) & {[(x,qg)].}
\end{tikzcd}$$

De plus, $i_{g,r}$ s'étend en un morphisme fini $\bar{i}_{g,r} : M^{\mathrm{K}_{g,r}}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)^* \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$. Les images des morphismes $i_{g,r}$ forment une stratification du bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, et on a $Im(i_{g,r}) = Im(i_{g',r'})$ si et seulement si $r = r'$ et $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g\mathrm{K} = \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)g'\mathrm{K}$.

Nous allons voir que $i_{g,r}$ est une immersion.

Lemme 1.2.1. *Le double quotient* $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\setminus(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}}))$ *est un singleton.*

Il existe donc un système de représentants $(g_j)_{j\in J}$ dans $\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ du double quotient $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\setminus(\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K})$. Comme K est distingué dans $\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, les groupes $\mathrm{H}_{g_j,r}$, $\mathrm{H}_{\ell,g_j,r}$, etc., ne dépendent pas de j ; on les note donc H_r, $\mathrm{H}_{\ell,r}$, etc. Comme $\mathrm{K} = Ker(\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$, on voit que $\mathrm{H}_r/\mathrm{K}_{N,r} = \Gamma_{\ell,r}\times\mathrm{K}_r$, avec $\Gamma_{\ell,r} = Ker(\mathbf{L}_{\ell,r}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{L}_{\ell,r}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ et $\mathrm{K}_r = Ker(\mathbf{G}_r(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \mathbf{G}_r(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$. En particulier, $\mathrm{H}_r = \mathrm{H}_{\ell,r}\mathrm{K}_{Q,r}$, et les $i_{g_j,r}$, $j\in J$, sont des immersions localement fermées. De plus, les strates $M^{\mathrm{K}_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)$ sont isomorphes à la variété de Shimura $\mathcal{M}_{r,n,\mathbb{Q}}$ de la section 1.1.

La compactification de Baily-Borel $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ n'est pas lisse si $d\geq 3$, mais elle admet une famille de résolutions des singularités, les compactifications toroïdales (cf. [AMRT] ou [P1] chapitres 6-9 pour la construction sur $\mathbb{C}$, [P1] chapitre 12 pour les modèles canoniques). Ces compactifications dépendent d'une décomposition en cônes admissible pour $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ ([P1], 6.4). Nous allons définir certaines décompositions particulières.

Il faut d'abord rappeler quelques définitions.

Soit $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})$ une composante rationnelle de bord de $(\mathbf{G},\mathcal{X})$. On note (cf. [P1], 4.22) $C^*(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q})$ (resp. $C^*(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q})$) l'union des cônes $C(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q}')$ (resp. $C(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q}')$) pour $(\mathbf{Q}',\mathcal{Y}')$ parcourant l'ensemble des composantes rationnelles de bord entre $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})$ et $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ (i.e., telles que $\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}'$). D'après [P1, 4.26], pour tout $r\in\{0,\dots,d-1\}$, $C^*(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q}_r)\subset\mathbf{U}_r(\mathbb{R})(-1)$ (resp. $C^*(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q}_r)\subset\mathbf{U}_r(\mathbb{R})(-1)$) est égal à l'ensemble des matrices AJ_{d-r}, où A est symétrique positive (resp. négative) et le noyau de A est défini sur $\mathbb{Q}$.

Le complexe conique $\mathcal{C}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ de $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est le quotient de l'union disjointe sur l'ensemble des composantes rationnelles de bord $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})$ des $C^*(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q})\sqcup C^*(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q})$ par la relation d'équivalence engendrée par les graphes des inclusions $C^*(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q}')\sqcup C^*(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q}')\subset C^*(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q})\sqcup C^*(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q})$ pour $\mathbf{Q}\subset\mathbf{Q}'$ ([P1, 4.24]).

Une décomposition en cônes K-admissible $\mathcal{S}_{ad}$ pour $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est une collection de sous-ensembles de $\mathcal{C}(\mathbf{G},\mathcal{X})\times\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ qui vérifie les conditions (i) à (v) de [P1, 6.4].

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

En particulier, on demande que pour toute composante rationnelle de bord $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})$, pour toute composante connexe $\mathcal{X}^\circ$ de $\mathcal{X}$ et pour tout $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$,

$$\mathcal{S}_{ad}(\mathcal{X}^\circ,\mathbf{Q},g)=\{\sigma\in\mathcal{S}_{ad},\sigma\subset C^*(\mathcal{X}^\circ,\mathbf{Q})\times\{g\}\}$$

soit une décomposition (partielle) en cônes polyédraux rationnels du cône $C^*(\mathcal{X}^\circ,\mathbf{Q})\times\{g\}$.

On note C le cône convexe de $M_d(\mathbb{R})$ des matrices symétriques positives dont le noyau est défini sur $\mathbb{Q}$; on fait agir $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ sur C par $(g,A)\longmapsto gA^tg$. Soit $\mathcal{S}$ une décomposition en cônes polyédraux de C invariante par l'action de $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$ et telle que $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})\setminus\mathcal{S}$ soit fini. On veut lui associer une décomposition en cônes admissible $\mathcal{S}_{ad}$ pour $(\mathbf{G},\mathcal{X})$.

Il suffit de définir $\mathcal{S}_{ad}(\mathcal{X}^\pm,\mathbf{Q},g)$ pour les composantes de bord minimales $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})$ de $(\mathbf{G},\mathcal{X})$. Soit $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})$ une telle composante. On se ramène par conjugaison au cas où $(\mathbf{Q},\mathcal{Y})=(\mathbf{Q}_0,\mathcal{Y}_0)$. On a vu plus haut que le cône $C^*(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q}_0)$ (resp. $C^*(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q}_0)$) était égal à CJ_d (resp. $-CJ_d$). Pour tout $g\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, on pose

$$\mathcal{S}_{ad}(\mathcal{X}^+,\mathbf{Q}_0,g)=\{\sigma.J_d,\sigma\in\mathcal{S}\}\times\{g\},$$
$$\mathcal{S}_{ad}(\mathcal{X}^-,\mathbf{Q}_0,g)=\{-\sigma.J_d,\sigma\in\mathcal{S}\}\times\{g\}.$$

Il est clair qu'on obtient bien une décomposition en cônes admissible pour $(\mathbf{G},\mathcal{X})$. De plus, cette décomposition est complète (resp. lisse pour K) si et seulement si $\mathcal{S}$ est complète (resp. lisse pour le réseau $nM_d(\mathbb{Z})\subset M_d(\mathbb{R})$; cf. [P1], 5.2).

On note $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})$ la compactification toroïdale associée. Si $\mathcal{S}$ est complète et lisse, $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})$ est projective et le bord $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})-M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est une union de diviseurs lisses à croisements normaux.

L'identité $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ s'étend en un morphisme surjectif $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})\longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$. Les images inverses des strates de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ forment une stratification du bord de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})$, et on sait décrire ces strates et les complétés formels de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})$ le long de ces strates en termes de certains plongements toriques ([P2], 3.10).

1.3. **Compactifications sur $\mathbb{Z}$.** Dans cette section, $(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est la donnée de Shimura $(\mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}},\mathcal{X}_d)$ de la section 1.1. On suppose toujours $n\geq 3$, et on note $\mathrm{K}=\mathrm{K}_d(n)$.

Soit $\mathcal{S}$ une décomposition en cônes polyédraux du cône C de la section 1.2. On suppose que $\mathcal{S}$ est invariante par l'action de $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})$, complète et lisse pour le réseau $M_d(\mathbb{Z})$, et que $\mathbf{GL}_d(\mathbb{Z})\setminus\mathcal{S}$ est fini. Chai et Faltings ([CF], IV.6.7) ont montré que la compactification toroïdale $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})$ a un modèle entier $\mathcal{M}_{d,n}(\mathcal{S})\supset\mathcal{M}_{d,n}$: $\mathcal{M}_{d,n}(\mathcal{S})$ est un espace algébrique propre et lisse sur $\mathbb{Z}[1/n]$ dont la fibre générique est $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X},\mathcal{S})$, et le bord $\mathcal{M}_{d,n}(\mathcal{S})-\mathcal{M}_{d,n}$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur $\mathbb{Z}[1/n]$. Si n divise m, le morphisme $T_1:\mathcal{M}_{d,m}\longrightarrow\mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}[1/m]}$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{M}_{d,m}(\mathcal{S})\longrightarrow\mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}[1/m]}(\mathcal{S})$, qu'on notera $\widetilde{T}_1$.

En utilisant les compactifications toroïdales, Chai et Faltings ont aussi construit un modèle entier de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ ([CF], V.2.5) : un schéma $\mathcal{M}^*_{d,n}\supset\mathcal{M}_{d,n}$ normal et projectif sur $\mathbb{Z}[1/n]$, dont la fibre générique est $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$. De plus, on a une stratification de $\mathcal{M}^*_{d,n}-\mathcal{M}_{d,n}$ par des $\mathcal{M}_{r,n}$, $0\leq r\leq d-1$, qui étend la stratification de la section 1.2, et l'adhérence d'une strate est isomorphe à sa compactification de Baily-Borel ([CF], V.2.5 (4)). On notera toujours $i_{g,r}$ et $\overline{i}_{g,r}$ les prolongements

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

des morphismes $i_{g,r}$ et $\overline{i}_{g,r}$ de 1.2. Si n divise m, le morphisme $T_1 : \mathcal{M}_{d,m} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}[1/m]}$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{M}^*_{d,m} \longrightarrow \mathcal{M}^*_{d,n,\mathbb{Z}[1/m]}$, qu'on notera $\overline{T}_1$.

Lemme 1.3.1. *Soient p un nombre premier qui ne divise pas n et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$. Alors, si $m \geq 3$ est tel que p ne divise pas m et $\mathrm{K}_d(m) \subset g\mathrm{K}_d(n)g^{-1}$, le morphisme $T_g : \mathcal{M}_{d,m,\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n,\mathbb{Z}_{(p)}}$ de 1.1 se prolonge en un morphisme $\overline{T}_g : \mathcal{M}^*_{d,m,\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}^*_{d,n,\mathbb{Z}_{(p)}}$.*

Démonstration. Supposons d'abord $d \geq 2$. On note ω le faisceau canonique sur $\mathcal{M}_{d,n}$ et sur $\mathcal{M}_{d,m}$ (cf. [CF], I.4.11). D'après le principe de Koecher ([CF], V.1.8 (iii)) et le point (3) du théorème V.2.5 de [CF], le schéma $\mathcal{M}^*_{d,n}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Proj}(\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathcal{M}_{d,n}, \omega^{\otimes k}))$, et on a une formule analogue pour $\mathcal{M}^*_{d,m}$. Le lemme en résulte.

Si $d = 1$, il n'existe qu'une seule décomposition en cônes polyédraux complète $\mathcal{S}$, et on a $\mathcal{M}^*_{d,n} = \mathcal{M}_{d,n}(\mathcal{S})$, $\mathcal{M}^*_{d,m} = \mathcal{M}_{d,m}(\mathcal{S})$. Le lemme est une conséquence du corollaire V.6.11 de [CF].

Si $d = 0$, on a $\mathcal{M}_{d,n} = \mathcal{M}^*_{d,n}$ et $\mathcal{M}_{d,m} = \mathcal{M}^*_{d,m}$, donc il n'y a rien à prouver. □

Enfin, le morphisme $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}, \mathcal{S}) \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{M}_{d,n}(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{M}^*_{d,n}$ ([CF], IV.2.5 (2)), et on a une description analogue à celle de [P2, 3.10] des images inverses des strates de $\mathcal{M}^*_{d,n}$ ([CF], IV.6.7 (4), IV.6.11 et V.2.5 (5)).

2. Systèmes de coefficients et théorème de Pink

Dans cette section, $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est la donnée de Shimura $(\mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}}, \mathcal{X}_d)$ de la section 1.1, n est un entier ≥ 3, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_d(n) \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$, et ℓ est un nombre premier.

2.1. **Systèmes de coefficients.** Si V est une représentation algébrique de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie, on peut lui associer un système local de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$,

$$\mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (V \times \mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \setminus (\mathcal{X} \times \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}) = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$$

($\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ agit diagonalement). Langlands a montré que ces systèmes de coefficients provenaient de faisceaux ℓ-adiques lisses sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ (cf. [L], pp. 34-38). Nous allons rappeler ici la méthode de Pink pour étendre ces systèmes de coefficients au modèle entier.

Soit $\varphi : \widehat{X} \longrightarrow X$ un revêtement étale galoisien de groupe profini Γ. Pink a construit dans [P1, 1.10] un foncteur exact

$$\mu_{\Gamma,\varphi} : Mod_\Gamma \longrightarrow \acute{E}t_X$$

de la catégorie Mod_Γ des Γ-modules à gauche continus (discrets) dans la catégorie $\acute{E}t_X$ des faisceaux abéliens étales sur X. Pour tout $M \in Mod_\Gamma$, on a

$$\mu_{\Gamma,\varphi} M = (M \otimes \varinjlim_{\Delta} \varphi_{\Delta *}\underline{\mathbb{Z}})^\Gamma,$$

où Δ parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de Γ et φ_Δ est le revêtement étale fini $\widehat{X}/\Delta \longrightarrow X$. Les fibres de $\mu_{\Gamma,\varphi} M$ sont données par la proposition suivante :

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Proposition 2.1.1 ([P2, 1.10.4]). *Soit M un objet de Mod_Γ. Soit x_0 un point de X, k son corps résiduel, $\overline{k}$ une clôture séparable de k, $x : Spec(\overline{k}) \longrightarrow X$ le point géométrique de X correspondant, $\widehat{x} : Spec(\overline{k}) \longrightarrow \widehat{X}$ un point géométrique de $\widehat{X}$ au-dessus de x. Pour tout $\sigma \in Gal(\overline{k}/k)$, on note $\psi(\sigma)$ l'unique élément de Γ tel que $\sigma.\widehat{x} = \widehat{x}.\psi(\sigma)$. Alors $\psi : Gal(\overline{k}/k) \longrightarrow \Gamma$ est un morphisme continu, et la fibre de $\mu_{\Gamma,\varphi}(M)$ en x est isomorphe à M avec l'action de $Gal(\overline{k}/k)$ donnée par $\sigma.m = \psi(\sigma).m$.*

De plus, on sait calculer les images inverses des $\mu_{\Gamma,\varphi}M$ par certains revêtements étales, grâce au lemme ci-dessous, qui est un cas particulier de [P2, 1.11.5] :

Lemme 2.1.2. *Soit Γ' un sous-groupe fermé de Γ. On note $\varphi' : \widehat{X} \longrightarrow X' = \widehat{X}/\Gamma'$ et $f : X' \longrightarrow X$ les morphismes évidents.*

Alors, pour tout $M \in Mod_\Gamma$, on a un isomorphisme canonique

$$f^*\mu_{\Gamma,\varphi}M \simeq \mu_{\Gamma',\varphi'}Res^{\Gamma}_{\Gamma'}M.$$

Revenons à la situation du début. On note $Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ la catégorie des représentations algébriques de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ dans des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, et K_ℓ l'image de K dans $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$. On fait agir $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)$ sur les objets de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ via la projection $\mathbf{G}(\mathbb{A}_f) \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$.

Soit

$$\widehat{\mathcal{M}}_{d,n} = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{d,\ell^r n}.$$

$\widehat{\mathcal{M}}_{d,n}$ est un schéma sur $\mathbb{Z}[1/\ell n]$ (il n'est pas localement de type fini), et le morphisme évident $\varphi : \widehat{\mathcal{M}}_{d,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{d,n}[1/\ell] = \mathcal{M}_{d,n|Spec(\mathbb{Z}[1/n\ell])}$ est un revêtement étale galoisien de groupe K_ℓ.

Définition 2.1.3. Soit $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$. On choisit un $\mathbb{Z}_\ell$-réseau $\Lambda \subset V$ invariant par K_ℓ, et on pose

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V = \mathbb{Q}_\ell \otimes \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mu_{\mathrm{K}_\ell,\varphi}(\Lambda/\ell^m\Lambda).$$

C'est un faisceau ℓ-adique lisse sur $\mathcal{M}_{d,n}[1/\ell]$, qui à isomorphisme près ne dépend pas du choix de Λ. On obtient donc un foncteur exact $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}$ de $Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ dans la catégorie des faisceaux ℓ-adiques sur $\mathcal{M}_{d,n}[1/\ell]$, et on notera encore $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}$ son foncteur dérivé.

Pour toute $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, l'analytisé de l'image réciproque de $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})_{\mathbb{C}}$ est le système de coefficients défini au début de cette section (cf. [P2], 5.1).

On s'intéresse enfin aux poids des faisceaux obtenus. On dira qu'une représentation V de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ est pure de poids t si le centre $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}.I_{2d}$ de $\mathbf{G}$ agit sur V par le caractère $x \longmapsto x^t$, et qu'elle est de poids $< t$ (resp. $\geq t$) si elle est somme de sous-représentations pures dont les poids t' vérifient $t' < t$ (resp. $t' \geq t$).

Proposition 2.1.4 ([P2, 5.6.6] ; voir aussi [LR2, 6]). *Pour toute représentation $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, le faisceau ℓ-adique lisse $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ est mixte (au sens de* [D]*, 1.2.2), et il est pur de poids $-t$ si V est pure de poids t.*

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

2.2. **Prolongements des systèmes de coefficients à la compactification de Baily-Borel.** Dans cette section, on utilise les notations des sections 1.2 et 2.1. En particulier, pour tout $r \in \{0, \ldots, d-1\}$, on note $\mathrm{H}_{\ell,r} = \mathrm{K} \cap \mathbf{P}_{\ell,r}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma_{\ell,r} = \mathrm{H}_{\ell,r}/(\mathrm{H}_{\ell,r} \cap \mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f))$ (c'est un sous-groupe arithmétique de la partie linéaire $\mathbf{L}_{\ell,r}$ de $\mathbf{L}_r$).

Nous allons énoncer le théorème principal de [P2] pour les variétés de Shimura considérées. Remarquons d'abord que, comme expliqué dans [P2, 4.9], comme on dispose des modèles entiers $\mathcal{M}_{d,\ell^r n}$, $r \in \mathbb{N}$, et de compactifications de Baily-Borel et toroïdales de ces modèles sur $\mathbb{Z}[1/\ell n]$ qui vérifient les propriétés de [P2, 3.7-3.11], la preuve du théorème [P2, 4.2.1] s'étend aux modèles entiers si on ne considère que des faisceaux de $\mathbb{Z}_\ell$-torsion. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *On note j l'immersion ouverte $\mathcal{M}_{d,n}[1/\ell] \longrightarrow \mathcal{M}^*_{d,n}[1/\ell]$. Pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, pour tous $r \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $g \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, on a un isomorphisme canonique*

$$\begin{aligned} i^*_{g,r} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}_r} R\Gamma(\mathrm{H}_{\ell,r}, g.V) \\ &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}_r} R\Gamma(\Gamma_{\ell,r}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_r), g.V)), \end{aligned}$$

où $g.V$ est V avec l'action de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ donnée par $(h,v) \longmapsto (g_\ell^{-1} h g_\ell).v$.

Démonstration. Le premier isomorphisme est celui de [P2, 4.2.1], compte tenu des remarques ci-dessus et du fait que $\mathrm{H}_r/\mathrm{H}_{\ell,r} = \mathrm{K}_r$. Le deuxième isomorphisme vient de l'isomorphisme canonique $R\Gamma(\mathrm{H}_{\ell,r},\ ) \simeq R\Gamma(\Gamma_{\ell,r}, R\Gamma(\mathrm{K}_{N,r},\ ))$, du lemme 5.2.2 de [P2] (qui dit que la cohomologie continue de $\mathrm{K}_{N,r}$ est égale à la cohomologie du groupe discret $\mathrm{K}_{N,r} \cap \mathbf{N}_r(\mathbb{Q})$) et du lemme ci-dessous, qui est une version algébrique du théorème de van Est. □

Lemme 2.2.2. *Soient $\mathbf{U}$ un groupe algébrique unipotent connexe sur $\mathbb{Q}$ et $\Gamma_{\mathbf{U}}$ un sous-groupe arithmétique de $\mathbf{U}(\mathbb{Q})$. On note $Mod_{\mathbf{U}}$ la catégorie des limites inductives de représentations algébriques rationnelles de dimension finie de $\mathbf{U}$ (ou, ce qui revient au même, de $Lie(\mathbf{U})$), et $A_{\mathbf{U}}$ la $\mathbb{Q}$-algèbre des polynômes à coefficients rationnels sur $\mathbf{U}(\mathbb{Q})$, qui contient la sous-algèbre $\mathbb{Q}$ des constantes. Pour tout M dans $Mod_{\mathbf{U}}$, on définit une suite exacte*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u_0} I^0(M) \xrightarrow{u_1} I^1(M) \xrightarrow{u_2} I^2(M) \xrightarrow{u_3} \ldots$$

par :

- *$u_0 : M \longrightarrow I^0(M)$ est l'injection évidente $M \simeq M \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow M \otimes A_{\mathbf{U}} = I^0(M)$;*
- *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{i+1} : I^i(M) \longrightarrow I^{i+1}(M)$ est le morphisme évident $I^i(M) \longrightarrow Coker(u_i) \longrightarrow Coker(u_i) \otimes A_{\mathbf{U}} = I^{i+1}(M)$.*

Alors :

(i) Pour tout $M \in Mod_{\mathbf{U}}$, $M \otimes A_{\mathbf{U}}$ est un objet injectif de $Mod_{\mathbf{U}}$ et un objet acyclique pour le foncteur $(\ )^{\Gamma_{\mathbf{U}}}$ (invariants par $\Gamma_{\mathbf{U}}$).

(ii) Pour tout $M \in Mod_{\mathbf{U}}$, le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$R\Gamma(Lie(\mathbf{U}), M) = R\Gamma(\mathbf{U}(\mathbb{Q}), M) \simeq I^\bullet(M)^{\mathbf{U}(\mathbb{Q})} \longrightarrow I^\bullet(M)^{\Gamma_{\mathbf{U}}} \simeq R\Gamma(\Gamma_{\mathbf{U}}, M).$$

Ce lemme est prouvé dans [GHM, 24].

Enfin, la compatibilité de l'isomorphisme du théorème de Pink avec les morphismes T_g de la section 1.1 est explicitée dans la proposition ci-dessous :

Proposition 2.2.3 ([P2, 4.8])**.** *Soient $p \neq \ell$ un nombre premier qui ne divise pas n et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$. On choisit $m \geq 3$ tel que $\mathrm{K}_d(m) \subset g\mathrm{K}_d(m)g^{-1}$, et on note $\mathrm{K}' =$*

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

$\mathrm{K}_d(m)$ *et* $j' : \mathcal{M}_{d,m} \longrightarrow \mathcal{M}^*_{d,m}$ *l'inclusion. Soient* $h \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ *et* $r \in \{0, \dots, d-1\}$. *On fixe* $h' \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, $q \in \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \cap \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ *et* $k \in \mathrm{K}$ *tels que* $hg = qh'k$. *On note* $i'_{h,r}$ *l'inclusion de la strate* $\mathcal{M}_{r,m}$ *dans* $\mathcal{M}^*_{d,m}$ *définie par* h.

Alors le morphisme $\overline{T}_g : \mathcal{M}^*_{d,m,\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}^*_{d,n,\mathbb{Z}_{(p)}}$ *envoie l'image de* $i'_{h,r}$ *dans celle de* $i_{h',r}$, *et le morphisme* $\mathcal{M}_{r,m,\mathbb{Z}_{(p)}} \longrightarrow \mathcal{M}_{r,n,\mathbb{Z}_{(p)}}$ *obtenu en restreignant* $\overline{T}_g$ *à ces images est* $T_{\overline{q}}$, *où* $\overline{q}$ *est l'image de* q *dans* $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f^p)$.

Soit $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. *D'après le théorème de Pink et le lemme* 2.1.2, *on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} T^*_{\overline{q}} i^*_{h',r} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V \simeq T^*_{\overline{q}} \mathcal{F}^{\mathrm{K}_r} R\Gamma(\mathrm{H}_{\ell,r}, h'.V) &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\mathrm{H}_{\ell,r}, qh'.V) \\ &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\mathrm{H}_{\ell,r}, hg.V), \\ {i'_{h,r}}^* Rj'_* T^*_g \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V \simeq {i'_{h,r}}^* Rj'_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} g.V &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\mathrm{H}'_{\ell,r}, hg.V), \end{aligned}$$

où l'isomorphisme de la deuxième ligne vient de l'isomorphisme $qh'.V \xrightarrow{\sim} qh'k.V = hg.V$, $v \longmapsto k.v$. *Par ces isomorphismes, le morphisme de changement de base*

$$T^*_{\overline{q}} i^*_{h',r} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V = {i'_{h,r}}^* \overline{T}^*_g Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V) \xrightarrow{CB} {i'_{h,r}}^* Rj'_* T^*_g \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)$$

correspond au morphisme induit par l'inclusion $\mathrm{H}'_{\ell,r} \subset \mathrm{H}_{\ell,r}$:

$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\mathrm{H}_{\ell,r}, hg.V) \longrightarrow \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\mathrm{H}'_{\ell,r}, hg.V).$$

3. Prolongement intermédiaire des faisceaux pervers purs

Cette partie est indépendante des autres.

On fixe un corps fini $\mathbb{F}_q$ et un nombre premier ℓ inversible dans $\mathbb{F}_q$. Tous les schémas considérés sont séparés de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Si X est un schéma, on note $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ la catégorie des complexes ℓ-adiques mixtes sur X (au sens de [BBD], 5.1.5 ; en particulier, les complexes sont à poids entiers), munie de la t-structure donnée par la perversité autoduale. On note ${}^pH^i$ les foncteurs de cohomologie pour cette t-structure.

Soient X un schéma et $j : U \longrightarrow X$ un ouvert non vide de X. Le premier objectif de cette partie est d'écrire $j_{!*}K$, où K est un faisceau pervers pur sur U, comme un certain tronqué par le poids de Rj_*K (théorème 3.1.4). Le deuxième objectif est de calculer la trace d'une puissance Φ de l'endomorphisme de Frobenius sur la cohomologie de $j_{!*}K$ en fonction de la trace de Φ sur la cohomologie de Rj_*K et de complexes de même type supportés par $X - U$ (théorème 3.3.5).

3.1. Troncature par le poids dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

Proposition 3.1.1. *Soit* X *un schéma sur* $\mathbb{F}_q$. *Pour tout* $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, *on note* ${}^wD^{\leq a}(X)$, *ou* ${}^wD^{\leq a}$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté sur* X *(resp.* ${}^wD^{\geq a}(X)$ *ou* ${}^wD^{\geq a}$*) la sous-catégorie pleine de* $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ *dont les objets sont les complexes mixtes* K *tels que pour tout* $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^iK$ *soit de poids* $\leq a$ *(resp.* $\geq a$*). Alors :*

(i) ${}^wD^{\leq a}$ *et* ${}^wD^{\geq a}$ *sont des sous-catégories stables par décalage et extensions (cf.* [BBD], *1.2.6) de* $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ *(en particulier, ce sont des sous-catégories triangulées). La dualité de Poincaré échange* ${}^wD^{\leq a}$ *et* ${}^wD^{\geq -a}$. *Si* $a < a'$, *on a* ${}^wD^{\leq a} \cap {}^wD^{\geq a'} = 0$.

(ii) On a ${}^wD^{\leq a}(1) = {}^wD^{\leq a-2}$ *et* ${}^wD^{\geq a}(1) = {}^wD^{\geq a-2}$ *(où* (1) *est le twist à la Tate).*

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

(iii) Pour tous $K \in {}^wD^{\leq a}$ et $L \in {}^wD^{\geq a+1}$, on a $R\operatorname{Hom}(K,L) = 0$.

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $({}^wD^{\leq a}, {}^wD^{\geq a+1})$ est une t-structure sur $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

Cette proposition sera démontrée dans la section 3.2.

D'après [BBD, 1.3.3] l'inclusion ${}^wD^{\leq a} \subset D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$ (resp. ${}^wD^{\geq a} \subset D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$) admet un adjoint à droite (resp. à gauche), qu'on notera $w_{\leq a}$ (resp. $w_{\geq a}$), et pour tout $K \in D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$, il existe un unique morphisme $w_{\geq a+1}K \longrightarrow (w_{\leq a})K[1]$ qui fait du triangle suivant un triangle distingué

$$w_{\leq a}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{\geq a+1}K \longrightarrow (w_{\leq a}K)[1].$$

Ce triangle est, à isomorphisme unique près, l'unique triangle distingué $A \longrightarrow K \longrightarrow B \xrightarrow{+1}$ avec $A \in {}^wD^{\leq a}$ et $B \in {}^wD^{\geq a+1}$ (toujours d'après [BBD], 1.3.3).

Comme la dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leq a}$ et ${}^wD^{\geq -a}$, elle échange aussi $w_{\leq a}$ et $w_{\geq -a}$.

Remarques 3.1.2. (1) ${}^wD^{\leq a}$ n'est pas la catégorie des complexes mixtes de poids $\leq a$: un complexe mixte K est de poids $\leq a$ si et seulement si ${}^pH^iK$ est de poids $\leq a + i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ([BBD], 5.4.1), et cette condition est différente de la condition qui caractérise les objets de ${}^wD^{\leq a}$.

(2) Le décalage de 1 dans la définition de la t-structure est nécessaire : $({}^wD^{\leq a}, {}^wD^{\geq a})$ n'est pas une t-structure.

(3) $({}^wD^{\leq a}, {}^wD^{\geq a+1})$ est une t-structure quelque peu étrange : son coeur est nul, et elle ne donne donc pas lieu à une théorie cohomologique intéressante. De plus, ${}^wD^{\leq a}$ et ${}^wD^{\geq a+1}$ sont des sous-catégories triangulées de $D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$ (en particulier, elles sont stables par le foncteur [1]), ce qui est inhabituel.

(4) Si K est un faisceau pervers mixte, $w_{\leq a}$ est simplement le plus grand sous-faisceau pervers de K de poids $\leq a$, et $w_{\geq a}K$ est le plus grand quotient pervers de K de poids $\geq a$ ([BBD], 5.3.5). Beilinson a montré dans [B] que le foncteur "réalisation" ([BBD], 3.1.9) de la catégorie dérivée bornée de la catégorie des faisceaux pervers mixtes sur X dans $D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$ est une équivalence de catégories. Si $K \in D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$ est représenté par un complexe $C^\bullet$ de faisceaux pervers mixtes, alors $w_{\leq a}K$ (resp. $w_{\geq a}K$) est représenté par le complexe $(w_{\leq a}C^n)$ (resp. $(w_{\geq a}C^n)$).

(5) Dans son article [Le], M. Levine a considéré une t-structure analogue sur la catégorie des motifs de Tate mixtes.

La proposition suivante donne quelques propriétés des foncteurs $w_{\leq a}$ et $w_{\geq a}$.

Proposition 3.1.3. *(i) Pour tout $K \in D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$, on a $w_{\leq a}(K(1)) = (w_{\leq a+2}K)(1)$ et $w_{>a}(K(1)) = (w_{>a+2}K)(1)$.*

(ii) Soit $K \in D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$. L'image par ${}^pH^i$ de la flèche de cobord $w_{\geq a+1}K \longrightarrow (w_{\leq a}K)[1]$ est nulle pour tout $i \in \mathbb{Z}$, donc la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué

$$w_{\leq a}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{\geq a+1}K \xrightarrow{+1}$$

donne des suites exactes courtes de faisceaux pervers

$$0 \longrightarrow {}^pH^iw_{\leq a}K \longrightarrow {}^pH^iK \longrightarrow {}^pH^iw_{\geq a+1}K \longrightarrow 0.$$

(iii) $w_{\leq a}$ et $w_{\geq a}$ commutent au foncteur de décalage [1], et ils envoient les triangles distingués de $D^b_m(X,\mathbb{Q}_\ell)$ sur des triangles distingués.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

(iv) $w_{\leq a}$ et $w_{\geq a}$ envoient la catégorie abélienne des faisceaux pervers mixtes dans elle-même, et leurs restrictions à cette catégorie sont des foncteurs exacts. Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$$w_{\leq a}({}^pH^iK) = {}^pH^i w_{\leq a}K,$$
$$w_{\geq a}({}^pH^iK) = {}^pH^i w_{\geq a}K.$$

(v) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Si la dimension des fibres de f est inférieure ou égale à d, alors

$$Rf_!({}^wD^{\leq a}(X)) \subset {}^wD^{\leq a+d}(Y),$$
$$Rf_*({}^wD^{\geq a}(X)) \subset {}^wD^{\geq a-d}(Y),$$
$$f^*({}^wD^{\leq a}(Y)) \subset {}^wD^{\leq a+d}(X),$$
$$f^!({}^wD^{\geq a}(Y)) \subset {}^wD^{\geq a-d}(X).$$

La démonstration des propositions 3.1.1 et 3.1.3 sera donnée dans la section 3.2.

Théorème 3.1.4. *Soient $a \in \mathbb{Z}$, X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $j : U \longrightarrow X$ un ouvert non vide de X, et K un faisceau pervers pur de poids a sur U. Alors les flèches canoniques*

$$w_{\geq a}j_!K \longrightarrow j_{!*}K \longrightarrow w_{\leq a}Rj_*K$$

sont des isomorphismes.

Si K est le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$, cette formule est à rapprocher des formules 4.5.7 et 4.5.9 de l'article [S] de Morihiko Saito.

Démonstration. Il suffit de montrer que la deuxième flèche est un isomorphisme (le cas de la première flèche en résulte par dualité). Cela découle des trois points suivants (i est l'inclusion de $X - U$ dans X) :

(1) Un complexe $K \in D^b_m(U, \mathbb{Q}_\ell)$ a au plus un prolongement $L \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que $i^*L \in {}^wD^{\leq a}$ et $i^!L \in {}^wD^{\geq a+1}$. En effet, soient $L, L' \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On a un triangle distingué

$$R\operatorname{Hom}(i^*L, i^!L') \longrightarrow R\operatorname{Hom}(L, L') \longrightarrow R\operatorname{Hom}(j^*L, j^*L') \xrightarrow{+1} .$$

Si $i^*L \in {}^wD^{\leq a}$ et $i^!L \in {}^wD^{\geq a+1}$, alors $R\operatorname{Hom}(i^*L, i^!L') = 0$ d'après le (iii) de la proposition 3.1.1 ; donc on a un isomorphisme

$$R\operatorname{Hom}(L, L') \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(j^*L, j^*L').$$

(2) Soit $K \in D^b_m(U, \mathbb{Q}_\ell)$. On note $L = w_{\leq a}Rj_*K$. Alors $i^*L \in {}^wD^{\leq a}$ par le (iv) de la proposition 3.1.3. De plus, on a un triangle distingué

$$L \longrightarrow Rj_*K \longrightarrow w_{\geq a+1}Rj_*K \xrightarrow{+1},$$

d'où un isomorphisme

$$i^!w_{\geq a+1}Rj_*K[-1] \xrightarrow{\sim} i^!L.$$

D'après le (iv) de la proposition 3.1.3, $i^!L \in {}^wD^{\geq a+1}$.

(3) Soit K un faisceau pervers pur de poids a sur U. Alors $j_{!*}K$ est pervers pur de poids a sur X par [BBD], 5.4.3 ; donc, par [BBD], 5.1.14 et 5.4.1, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^ki^*j_{!*}K$ est de poids $\leq a+k$ et ${}^pH^ki^!j_{!*}K$ est de poids $\geq a+k$. D'après le lemme 3.5.1 de la section 5 à la fin de cette partie, ${}^pH^ki^*j_{!*}K = 0$ si $k \geq 0$ et ${}^pH^ki^!j_{!*}K = 0$ si $k \leq 0$; donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^ki^*j_{!*}K$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

est de poids $\leq a-1$ et ${}^pH^ik^!j_{!*}K$ est de poids $\geq a+1$. Autrement dit, $i^*j_{!*}K \in {}^wD^{\leq a-1} \subset {}^wD^{\leq a}$ et $i^!j_{!*}K \in {}^wD^{\geq a+1}$.

□

3.2. **Preuve des propositions de la section 3.1.** Dans cette section, nous allons prouver les propositions 3.1.1 et 3.1.3 de la section précédente.

Démonstration de la proposition 3.1.1. (i) Il est clair que ${}^wD^{\leq a}$ et ${}^wD^{\geq a}$ sont stables par décalage et que la dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leq a}$ et ${}^wD^{\geq -a}$. Pour montrer la stabilité par extensions de ${}^wD^{\leq a}$ (resp. ${}^wD^{\geq a}$), il suffit de prouver que la catégorie des faisceaux pervers de poids $\leq a$ (resp. $\geq a$) est une sous-catégorie épaisse de la catégorie des faisceaux pervers, c'est-à-dire stable par noyaux, conoyaux et extensions. Par dualité, il suffit de traiter le premier cas. La stabilité par noyaux et conoyaux résulte de [BBD, 5.3.1], et la stabilité par extensions se prouve facilement à partir de [BBD, 5.1.9]. Supposons que $a < a'$. En appliquant la fin de [BBD, 5.1.8] aux objets de cohomologie perverse, on voit que ${}^wD^{\leq a} \cap {}^wD^{\geq a'} = 0$.

(ii) Évident.

(iii) Voir le premier des lemmes ci-dessous.

(iv) La condition (ii) de [BBD, 1.3.1] est évidente. La condition (i) résulte du point (iii) ci-dessus, et la condition (iii) est prouvée dans le deuxième des lemmes ci-dessous.

□

Lemme 3.2.1. *Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$, $K, L \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $a \in \mathbb{Z}$. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^i(K)$ est de poids $\leq a$ et ${}^pH^i(L)$ de poids $\geq a+1$. Alors $R\operatorname{Hom}(K, L) = 0$.*

Démonstration. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a un triangle distingué

$$ {}^p\tau_{\leq i-1}L \longrightarrow {}^p\tau_{\leq i}L \longrightarrow {}^pH^iL[-i] \xrightarrow{+1}, $$

d'où un triangle distingué

$$ R\operatorname{Hom}(K, {}^p\tau_{\leq i-1}L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(K, {}^p\tau_{\leq i}L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(K, {}^pH^iL)[-i] \xrightarrow{+1}. $$

Si on montre le résultat pour L pervers, on pourra, grâce à ces triangles, en déduire le résultat pour L quelconque en faisant une récurrence sur le cardinal de $\{i \in \mathbb{Z} \text{ tel que } {}^pH^iL \neq 0\}$. On peut donc supposer L pervers. On se ramène de même au cas où K est pervers.

Notons F le morphisme de Frobenius géométrique. D'après [BBD, 5.1.2.5], on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$ une suite exacte

$$ 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}^{i-1}(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})_F \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(K, L) \longrightarrow \operatorname{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})^F \longrightarrow 0. $$

K est de poids $\leq a$ et L de poids $\geq a+1$; donc $\operatorname{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})$ est de poids $> i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ([BBD], 5.1.15 (i)). On en déduit que si $i \geq 0$, $\operatorname{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})$ est de poids > 0, donc que

$$ \operatorname{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})_F = \operatorname{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})^F = 0 $$

(comme dans la preuve de [BBD], 5.1.15).

D'autre part, K et L sont pervers (donc $K_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ et $L_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ aussi), d'où $\operatorname{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q}) = 0$ pour $i < 0$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Finalement, on a obtenu pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})_F = \mathrm{Ext}^i(K_{\overline{\mathbb{F}}_q}, L_{\overline{\mathbb{F}}_q})^F = 0.$$

Les suites exactes ci-dessus impliquent que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}^i(K, L) = 0,$$

ce qui est le résultat cherché. □

Remarque 3.2.2. Le lemme ci-dessus reste valable, avec la même preuve, pour une perversité arbitraire (vérifiant les conditions de [BBD], 2.2.1).

Lemme 3.2.3. *Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Alors pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, il existe un triangle distingué dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$,*

$$K_1 \longrightarrow K \longrightarrow K_2 \xrightarrow{+1},$$

tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^iK_1$ soit de poids $\leq a$ et ${}^pH^iK_2$ de poids $\geq a+1$.

Démonstration. On fixe $a \in \mathbb{Z}$ et on raisonne par récurrence sur $card(\{i \in \mathbb{Z}$ tel que ${}^pH^iK \neq 0\})$.

Supposons qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $K \simeq {}^pH^iK[-i]$. Alors, d'après [BBD, 5.3.5], il existe un sous-faisceau pervers $L \subset {}^pH^iK$ de poids $\leq a$ tel que ${}^pH^iK/L$ soit de poids $\geq a+1$. Il suffit de poser $K_1 = L[-i]$ et $K_2 = ({}^pH^iK/L)[-i]$.

Soit $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que $n = card\{i \in \mathbb{Z}$ tel que ${}^pH^iK \neq 0\} \geq 2$. Supposons le lemme prouvé pour tous les $K' \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tels que $card\{i \in \mathbb{Z}$ tel que ${}^pH^iK' \neq 0\} < n$, et montrons-le pour K. Il suffit de montrer le résultat suivant : si on a un triangle distingué de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$,

$$K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1},$$

tel que la conclusion du lemme vaut pour K' et K'', alors elle vaut aussi pour K.

On se donne donc des triangles distingués dans $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$

$$\begin{tikzcd}
{} & & {} \\
K'_2 \arrow[u, "+1"] & & K''_2 \arrow[u, "+1"] \\
K' \arrow[u] \arrow[r] & K \arrow[r] & K'' \arrow[u] \arrow[r, "+1"] & {} \\
K'_1 \arrow[u] & & K''_1 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

et on suppose que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^iK'_1$ et ${}^pH^iK''_1$ sont de poids $\leq a$ et ${}^pH^iK'_2$ et ${}^pH^iK''_2$ de poids $\geq a+1$; autrement dit, K'_1 et K''_1 sont dans ${}^wD^{\leq a}$ et K'_2 et K''_2 sont dans ${}^wD^{\geq a+1}$. D'après le lemme 3.2.1, $R\operatorname{Hom}(K''_1, K'_2[1]) = 0$; donc il existe un unique morphisme $K''_1 \longrightarrow K'_1[1]$ qui fait commuter le carré

$$\begin{tikzcd}
K''_1 \arrow[r] \arrow[d] & K'_1[1] \arrow[d] \\
K'' \arrow[r] & K'[1].
\end{tikzcd}$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

D'après [BBD, 1.1.11], on peut compléter le diagramme commutatif en traits pleins pour obtenir un diagramme dont les lignes et les colonnes sont des triangles distingués et dont tous les carrés sont commutatifs, sauf le carré marqué $-$, qui est anticommutatif :

$$\begin{tikzcd}
K_1''[1] \arrow[r] & K_1'[2] \arrow[r, dashed] & K_1[2] \arrow[r, dashed] \arrow[dr, phantom, "-"] & K_1''[2] \\
K_2'' \arrow[u] \arrow[r, dashed] & K_2'[1] \arrow[u] \arrow[r, dashed] & K_2[1] \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & K_2''[1] \arrow[u] \\
K'' \arrow[u] \arrow[r] & K'[1] \arrow[u] \arrow[r] & K[1] \arrow[u, dashed] \arrow[r] & K''[1] \arrow[u] \\
K_1'' \arrow[u] \arrow[r] & K_1'[1] \arrow[u] \arrow[r, dashed] & K_1[1] \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & K_1''[1]. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Comme ${}^wD^{\leq a}$ et ${}^wD^{\geq a+1}$ sont stables par extensions (proposition 3.1.1 (i)), $K_1 \in {}^wD^{\leq a}$ et $K_2 \in {}^wD^{\geq a+1}$. □

Démonstration de la proposition 3.1.3. (i) Soit $K \in D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On a un triangle distingué

$$(w_{\leq a+2}K)(1) \longrightarrow K(1) \longrightarrow (w_{>a+2}K)(1) \xrightarrow{+1}$$

avec $(w_{\leq a+2}K)(1) \in {}^wD^{\leq a}$ et $(w_{>a+2}K)(1) \in {}^wD^{>a}$, d'où des isomorphismes canoniques $w_{\leq a}(K(1)) = (w_{\leq a+2}K)(1)$ et $w_{>a}(K(1)) = (w_{>a+2}K)(1)$.

(ii) Soient $K \in D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $i \in \mathbb{Z}$. Comme ${}^pH^i w_{\geq a+1}K$ est de poids $\geq a+1$ et que ${}^pH^{i+1}w_{\leq a}K$ est de poids $\leq a$, la flèche ${}^pH^i w_{\geq a+1}K \longrightarrow {}^pH^{i+1}w_{\leq a}K$ est nulle par [BBD, 5.3.1].

(iii) et (iv) Il suffit de prouver les assertions pour $w_{\leq a}$, celles pour $w_{\geq a}$ en résultant par dualité. $w_{\leq a}$ commute au décalage parce que ${}^wD^{\leq a}$ est invariante par décalage. Soit K un faisceau pervers mixte. Si L est le plus grand sous-faisceau pervers de K de poids $\leq a$, alors K/L est de poids $\geq a+1$ ([BBD], 5.3.5). Donc $w_{\leq a}K = L$, et $w_{\leq a}K$ est pervers. L'exactitude de la restriction de $w_{\leq a}$ à la catégorie des faisceaux pervers mixtes provient de la fin de [BBD], 5.3.5 (le fait que les morphismes sont strictement compatibles à la filtration par le poids). Soient $K \in D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et $i \in \mathbb{Z}$. D'après (ii), on a une suite exacte de faisceaux pervers

$$0 \longrightarrow {}^pH^i w_{\leq a}K \longrightarrow {}^pH^i K \longrightarrow {}^pH^i w_{\geq a+1}K \longrightarrow 0$$

avec ${}^pH^i w_{\leq a}K$ de poids $\leq a$ et ${}^pH^i w_{\geq a+1}K$ de poids $\geq a+1$; donc ${}^pH^i w_{\leq a}K = w_{\leq a}({}^pH^i K)$. Le fait que $w_{\leq a}$ envoie les triangles distingués sur des triangles distingués résulte de la preuve du lemme 3.2.3.

(v) Les inclusions résultent de [BBD], 4.2.4 et 5.1.14. Traitons par exemple le cas de $Rf_!$. Soit $K \in {}^wD^{\leq a}(X)$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^j K$ est de poids $\leq a$ par définition de ${}^wD^{\leq a}(X)$; donc $Rf_! {}^pH^j K$ est de poids $\leq a$ par [BBD, 5.1.14], et ${}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K)$ est de poids $\leq a+i$ par [BBD, 5.4.1]. Or, par [BBD, 4.2.4], ${}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K) = 0$ si $i > d$; donc ${}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K)$ est de poids $\leq a+d$ pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$. En utilisant la suite spectrale

$$E_2^{ij} = {}^pH^i(Rf_! {}^pH^j K) \Longrightarrow {}^pH^{i+j} Rf_! K,$$

on voit que ${}^pH^k Rf_! K$ est de poids $\leq a+d$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. □

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

3.3. **t-structures recollées.** Nous utiliserons la notion suivante de stratification :

Définition 3.3.1. Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Une *stratification* de X est une partition finie $(S_i)_{0\leq i\leq n}$ de X par des sous-schémas localement fermés (les strates) telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, S_i est ouvert dans $X - \bigcup_{0\leq j<i} S_j$.

Soit X un schéma muni d'une stratification $(S_k)_{0\leq k\leq n}$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note i_k l'inclusion de S_k dans X. $U = S_0$ est un ouvert de X ; on note $j = i_0 : U \longrightarrow X$ l'inclusion.

La proposition suivante est un cas particulier de [BBD, 1.4.10].

Proposition 3.3.2. *Soit $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$. On note ${}^wD^{\leq\underline{a}}(X)$ ou ${}^wD^{\leq\underline{a}}$ (resp. ${}^wD^{>\underline{a}}(X)$ ou ${}^wD^{>\underline{a}}$) la sous-catégorie pleine de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ dont les objets sont les complexes mixtes K tels que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $i_k^*K \in {}^wD^{\leq a_k}(S_k)$ (resp. $i_k^!K \in {}^wD^{>a_k}(S_k)$).*

Alors $({}^wD^{\leq\underline{a}}, {}^wD^{>\underline{a}})$ est une t-structure sur $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

On note aussi ${}^wD^{\geq(a_0,\dots,a_n)} = {}^wD^{>(a_0-1,\dots,a_n-1)}$. Il est évident d'après la définition de ${}^wD^{\leq\underline{a}}$ et ${}^wD^{>\underline{a}}$ que ce sont des sous-catégories stables par décalage et extensions de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, que la dualité de Poincaré échange ${}^wD^{\leq\underline{a}}$ et ${}^wD^{\geq-\underline{a}}$, et que

$$
\begin{aligned}
{}^wD^{\leq(a_0,\dots,a_n)}(1) &= {}^wD^{\leq(a_0-2,\dots,a_n-2)},\\
{}^wD^{>(a_0,\dots,a_n)}(1) &= {}^wD^{>(a_0-2,\dots,a_n-2)}.
\end{aligned}
$$

D'après [BBD, 1.3.3], l'inclusion ${}^wD^{\leq\underline{a}} \subset D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$ (resp. ${}^wD^{>\underline{a}} \subset D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$) admet un adjoint à droite (resp. à gauche), qu'on note $w_{\leq\underline{a}}$ (resp. $w_{>\underline{a}}$). Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, il existe un unique morphisme $w_{>\underline{a}}K \longrightarrow (w_{\leq\underline{a}}K)[1]$ tel que le triangle

$$w_{\leq\underline{a}}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{>\underline{a}}K \longrightarrow (w_{\leq\underline{a}}K)[1]$$

soit distingué. De plus, à isomorphisme unique près, il existe un unique triangle distingué $K' \longrightarrow K \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1}$ avec $K' \in {}^wD^{\leq\underline{a}}$ et $K'' \in {}^wD^{>\underline{a}}$.

Enfin, la dualité de Poincaré échange $w_{\leq\underline{a}}$ et $w_{\geq-\underline{a}}$ (car elle échange ${}^wD^{\leq\underline{a}}$ et ${}^wD^{\geq-\underline{a}}$).

Lemme 3.3.3. *Si $a_0 = \cdots = a_n = a$, alors $({}^wD^{\leq\underline{a}}, {}^wD^{>\underline{a}})$ est la t-structure $({}^wD^{\leq a}(X), {}^wD^{>a}(X))$ de la section 3.1.*

Démonstration. Soit $K \in {}^wD^{\leq a}$. D'après le (iv) de la proposition 3.1.3, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $i_k^*K \in {}^wD^{\leq a}(S_k)$. Donc $K \in {}^wD^{\leq\underline{a}}$. Par dualité, on a ${}^wD^{>a} \subset {}^wD^{>\underline{a}}$.

Soit $K \in {}^wD^{\leq\underline{a}}$. On a un triangle distingué

$$w_{\leq a}K \longrightarrow K \longrightarrow w_{>a}K \xrightarrow{+1} .$$

D'après ce qui précède, $w_{\leq a}K \in {}^wD^{\leq\underline{a}}$ et $w_{>a} \in {}^wD^{>\underline{a}}$; donc $w_{\leq a}K = w_{\leq\underline{a}}K = K$, et $K \in {}^wD^{\leq a}$. Par dualité, on a ${}^wD^{>\underline{a}} \subset {}^wD^{>a}$. $\square$

Proposition 3.3.4. *Pour tous $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on note*

$$
\begin{aligned}
w^k_{\leq a} &= w_{\leq(+\infty,\dots,+\infty,a,+\infty,\dots,+\infty)},\\
w^k_{\geq a} &= w_{\geq(-\infty,\dots,-\infty,a,-\infty,\dots,-\infty)}
\end{aligned}
$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

où, dans les deux formules, le a est en k-ième position (et on commence à compter à 0).

(i) On a

$$w_{\leq \underline{a}} = w^n_{\leq a_n} \circ \cdots \circ w^0_{\leq a_0},$$
$$w_{\geq \underline{a}} = w^n_{\geq a_n} \circ \cdots \circ w^0_{\geq a_0}.$$

(ii) Soient $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $k \in \{0, \dots, n\}$ et $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Alors on a des triangles distingués (uniques à isomorphisme unique près)

$$w^k_{\leq a} K \longrightarrow K \longrightarrow Ri_{k*} w_{>a} i^*_k K \xrightarrow{+1},$$
$$i_{k!} w_{\leq a} i^!_k K \longrightarrow K \longrightarrow w^k_{>a} K \xrightarrow{+1} .$$

Démonstration. (i) Il suffit d'appliquer plusieurs fois [BBD, 1.4.13.1].

(ii) Il suffit de traiter le cas de $w^k_{\leq a}$ (celui de $w^k_{>a}$ en résulte par dualité). On définit $\underline{a} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ par : $a_r = +\infty$ et si $r \neq k$, et $a_k = a$.

On note $L = Ri_{k*} w_{>a} i^*_k K \in {}^w D^{>\underline{a}}$, et on complète le morphisme évident $K \xrightarrow{adj} Ri_{k*} i^*_k K \longrightarrow L$ en un triangle distingué $L' \longrightarrow K \longrightarrow L \xrightarrow{+1}$.

Il suffit de montrer que $L \in {}^w D^{>\underline{a}}$ et que $L' \in {}^w D^{\leq \underline{a}}$. Si $r \neq k$, $i^!_r L = 0$, car $i^!_r Ri_{k*} = 0$; donc $i^!_r L \in {}^w D^{>a_r}(S_r)$ (et il est évident que $i^*_r L' \in {}^w D^{\leq a_r}(S_r)$). De plus, $i^*_k L = i^!_k L = w_{>a} i^*_k K \in {}^w D^{>a_k}(S_k)$ et on a un triangle distingué $i^*_k L' \longrightarrow i^*_k K \longrightarrow i^*_k L = w_{>a} i^*_k K \xrightarrow{+1}$; donc $i^*_k L' \simeq w_{\leq a} i^*_k K \in {}^w D^{\leq a_k}(S_k)$. □

Théorème 3.3.5. *Pour tout $\underline{a} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$, pour tout $K \in {}^w D^{\leq a_0}(U)$ on a*

$$[w_{\leq \underline{a}} Rj_* K] = \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_r \leq n} (-1)^r [Ri_{n_r *} w_{>a_{n_r}} i^*_{n_r} \dots Ri_{n_1 *} w_{>a_{n_1}} i^*_{n_1} Rj_* K]$$

dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$.

Démonstration. D'après la proposition ci-dessus, on a, dans l'anneau des endomorphismes du groupe de Grothendieck de $D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$:

$$w_{\leq \underline{a}} = w^n_{\leq a_n} \circ \cdots \circ w^0_{\leq a_0} = (1 - Ri_{n*} w_{>a_n} i^*_n) \circ \cdots \circ (1 - Ri_{1*} w_{>a_1} i^*_1) \circ (1 - Rj_* w_{>a_0} j^*).$$

Le théorème résulte de cette égalité et du fait que $Rj_* w_{>a_0} j^* Rj_* K = 0$ (car $K \in {}^w D^{\leq a_0}(U)$). □

3.4. **Propriétés supplémentaires des t-structures recollées.**

Proposition 3.4.1. *(i) Si $K \in D^{\leq \underline{a}}$ et $L \in {}^w D^{>\underline{a}}$, alors $R\operatorname{Hom}(K, L) = 0$.*

(ii) $w_{\leq \underline{a}}$ et $w_{>\underline{a}}$ commutent au foncteur de décalage [1], *et ils envoient les triangles distingués sur des triangles distingués. Pour tout $K \in D^b_m(X, \mathbb{Q}_\ell)$, on a*

$$w_{\leq (a_0, \dots, a_n)}(K(1)) = (w_{\leq (a_0+2, \dots, a_n+2)} K)(1),$$
$$w_{>(a_0, \dots, a_n)}(K(1)) = (w_{>(a_0+2, \dots, a_n+2)} K)(1).$$

(iii) Soit $\underline{a}' = (a'_0, \dots, a'_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ tel que $a_k \leq a'_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Alors, pour tous $K \in {}^w D^{\leq \underline{a}}$ et $L \in {}^w D^{>\underline{a}'}$, le morphisme canonique

$$R\operatorname{Hom}(K, L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(j^* K, j^* L)$$

est un isomorphisme.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

(iv) Soient $f : Y \longrightarrow X$ un morphisme et $(S'_k)_{0\le k\le n}$ une stratification de Y telle que, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $f(S'_k) \subset S_k$. On suppose que la dimension des fibres de f est inférieure ou égale à d. Alors

$$\begin{aligned}
f^*({}^wD^{\le(a_0,\dots,a_n)}(X)) &\subset {}^wD^{\le(a_0+d,\dots,a_n+d)}(Y),\\
f^!({}^wD^{>(a_0,\dots,a_n)}(X)) &\subset {}^wD^{>(a_0-d,\dots,a_n-d)}(Y),\\
Rf_*({}^wD^{>(a_0,\dots,a_n)}(Y)) &\subset {}^wD^{>(a_0-d,\dots,a_n-d)}(X),\\
Rf_!({}^wD^{\le(a_0,\dots,a_n)}(Y)) &\subset {}^wD^{\le(a_0+d,\dots,a_n+d)}(X).
\end{aligned}$$

Démonstration. (i) Montrons le résultat par récurrence sur n. Si $n = 0$, c'est le lemme 3.2.1. Soit $n \ge 1$, et supposons le résultat vrai pour $n' < n$. On note $\underline{a}' = (a_0,\dots,a_{n-1})$, $V = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n-1} S_k$, $Y = S_n = X - V$, j_1 l'immersion ouverte de V dans X et i l'immersion fermée de S_n dans X. Soient $K \in {}^wD^{\le\underline{a}}$ et $L \in {}^wD^{>\underline{a}}$. On a un triangle distingué

$$R\operatorname{Hom}(i^*K, i^!L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(K,L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(j_1^*K, j_1^*L) \xrightarrow{+1} .$$

Or $j_1^*K \in {}^wD^{\le\underline{a}'}(U)$, $j_1^*L \in {}^wD^{>\underline{a}'}(U)$, $i^*K \in {}^wD^{\le a_n}(Y)$ et $i_k^!L \in {}^wD^{>a_n}(Y)$; donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$R\operatorname{Hom}(j_1^*K, j_1^*L) = R\operatorname{Hom}(i^*K, i^!L) = 0,$$

d'où

$$R\operatorname{Hom}(K,L) = 0.$$

(ii) $w_{\le\underline{a}}$ et $w_{>\underline{a}}$ commutent au foncteur de décalage car ${}^wD^{\le\underline{a}}$ et ${}^wD^{>\underline{a}}$ sont stables par décalage. Soit $K \longrightarrow K' \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1}$ un triangle distingué. D'après [BBD, 1.1.11], on peut construire un diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont distinguées :

$$\begin{tikzcd}
w_{\le\underline{a}}K \arrow[r] \arrow[d] & w_{\le\underline{a}}K' \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
K \arrow[r] \arrow[d] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r, "+1"] \arrow[d] & {} \\
w_{>\underline{a}}K \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & w_{>\underline{a}}K' \arrow[r] \arrow[d, "+1"] & L' \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "+1"] & {} \\
{} & {} & {} &
\end{tikzcd}.$$

Comme ${}^wD^{\le\underline{a}}$ et ${}^wD^{>\underline{a}}$ sont des sous-catégories stables par extensions de $D_m^b(X,\mathbb{Q}_\ell)$, $L \in {}^wD^{\le\underline{a}}$ et $L' \in {}^wD^{>\underline{a}}$, donc $L = w_{\le\underline{a}}K''$ et $L' = w_{>\underline{a}}K''$. La dernière assertion se prouve exactement comme la propriété analogue dans le (i) de la proposition 3.1.3.

(iii) Notons i l'immersion fermée $X - U = S_1 \cup \dots \cup S_n \subset X$, $\underline{b} = (a_1,\dots,a_n)$ et $\underline{b}' = (a'_1,\dots,a'_n)$. Soient $K \in {}^wD^{\le\underline{a}}$ et $L \in {}^wD^{>\underline{a}'}$. On a un triangle distingué canonique

$$R\operatorname{Hom}(i^*K, i^!L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(K,L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(j^*K, j^*L) \xrightarrow{+1} .$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Or $i^*K \in {}^wD^{\leq \underline{b}}(X-U)$ et $i^!L \in {}^wD^{>\underline{b}'}(X-U)$; donc, d'après le point (i), $R\operatorname{Hom}(i^*K, i^!L) = 0$.

(iv) Il suffit de traiter les cas de f^* et $Rf_!$, car ceux de $f^!$ et Rf_* en résultent par dualité. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note i'_k l'inclusion $S'_k \subset Y$ et $f_k : S'_k \longrightarrow S_k$ la restriction de f. Soit $K \in {}^wD^{\leq \underline{a}}(X)$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, ${i'_k}^* f^* K = f_k^* i_k^* K$; $i_k^* K \in {}^wD^{\leq a_k}(S_k)$ par la définition de ${}^wD^{\leq \underline{a}}(X)$. Donc, d'après le (iv) de la proposition 3.1.3, $f_k^* i_k^* K \in {}^wD^{\leq a+d}(S'_k)$. On a donc bien $f^*K \in {}^wD^{\leq (a_0+d, \dots, a_n+d)}(Y)$.

Soit $K \in {}^wD^{\leq \underline{a}}(Y)$. Fixons $k \in \{0, \dots, n\}$. Comme $S'_k = f^{-1}(S_k)$, le diagramme suivant est cartésien aux nilpotents près

$$\begin{tikzcd} S'_k \arrow[r, "i'_k"] \arrow[d, "f_k"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ S_k \arrow[r, "i_k"] & X. \end{tikzcd}$$

Donc, d'après le théorème de changement de base propre, ${i_k}^* Rf_! K \simeq Rf_{k!} {i'_k}^* K$. Or ${i'_k}^* K \in {}^wD^{\leq a_k}(S'_k)$; donc, d'après le (iv) de la proposition 3.1.3, $i_k^* Rf_! K \simeq Rf_{k!} {i'_k}^* K \in {}^wD^{\leq a_k+d}(S_k)$. On a donc bien $Rf_! K \in {}^wD^{\leq (a_0+d, \dots, a_n+d)}(X)$. □

La proposition suivante est une reformulation de [BBD, 1.4.14] dans le cas particulier considéré.

Proposition 3.4.2. *Soit $\underline{a} = (a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$. On note $\underline{a}' = (a_0, a_1 + 1, \dots, a_n + 1)$. Alors, pour tout $K \in {}^wD^{\leq a_0}(U) \cap {}^wD^{\geq a_0}(U)$, $w_{\geq \underline{a}'} j_! K = w_{\leq \underline{a}} Rj_* K$ est l'unique prolongement de K dans ${}^wD^{\leq \underline{a}} \cap {}^wD^{\geq \underline{a}'}$.*

En particulier, si K est pervers pur de poids a sur U, on a

$$w_{\geq (a, a+1, \dots, a+1)} j_! K = j_{!*} K = w_{\leq a} Rj_* K,$$

et par dualité on obtient aussi

$$w_{\geq a} j_! K = j_{!*} K = w_{\leq (a, a-1, \dots, a-1)} Rj_* K.$$

3.5. **Quelques lemmes techniques.** Ce paragraphe contient quelques lemmes utilisés dans les preuves des résultats des parties 3 et 4.

Lemme 3.5.1. *Soient X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et (S_α) une partition finie de X par des sous-schémas localement fermés. Pour tout α, on note $i_\alpha : S_\alpha \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors, pour tout $K \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$, on a*

(a) $K \in {}^pD_c^{\leq 0}$ si et seulement si pour tout α, pour tout $i \geq 1$, on a ${}^pH^i(i_\alpha^* K) = 0$;

(b) $K \in {}^pD_c^{\geq 0}$ si et seulement si pour tout α, pour tout $i \leq -1$, on a ${}^pH^i(i_\alpha^! K) = 0$.

De plus, si U est un ouvert de X réunion de strates, si $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion et si K est un faisceau pervers sur U, alors $j_{!*}K$ est l'unique prolongement $L \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ de K tel que : pour tout α tel que $S_\alpha \subset X - U$, on a

$$\begin{cases} {}^pH^i(i_\alpha^* L) = 0 \text{ pour } i \geq 0, \\ {}^pH^i(i_\alpha^! L) = 0 \text{ pour } i \leq 0. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de montrer (a), car (b) en résulte par dualité. D'après [BBD, 2.2.5], les i_α^* sont t-exacts à droite ; donc, si $K \in {}^pD_c^{\leq 0}$, on a bien ${}^pH^i(i_\alpha^* K) = 0$ pour tout α et pour $i \geq 1$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Réciproquement, soit $K \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ tel que pour tout α, pour tout $i \geq 1$, ${}^pH^i(i_\alpha^* K) = 0$. On sait par [BBD, 2.2.12] qu'un complexe L est dans ${}^pD_c^{\leq 0}$ si et seulement si pour tout point x de X, notant $i_x : x \longrightarrow X$ et $dim(x) = dim(\overline{\{x\}})$, on a $H^i(i_x^* L) = 0$ pour $i < p(2dim(x))$. On va utiliser cette caractérisation pour montrer que $K \in {}^pD_c^{\leq 0}$. Soit x un point de X, et soit α tel que $x \in S_\alpha$. Comme S_α est localement fermé dans X, $\overline{\{x\}} \cap S_\alpha$ est ouvert dans $\overline{\{x\}}$, donc $dim(\overline{\{x\}} \cap S_\alpha) = dim(\overline{\{x\}})$ ($\overline{\{x\}}$ est irréductible), et $dim(x)$ ne change pas si on considère x comme un point de S_α. Comme par hypothèse $i_\alpha^* K \in {}^pD_c^{\leq 0}(S_\alpha)$, on a bien $H^i(i_x^* K) = 0$ si $i < p(2dim(x))$.

Montrons enfin la dernière assertion du lemme. U est un ouvert de X réunion de strates, $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion, K est un faisceau pervers sur U. D'après [BBD], 1.4.24 (qui s'applique par [BBD], 2.2.3 et 2.2.11), on a ${}^pH^0(i_\alpha^* j_{!*} K) = 0$ pour tout α tel que $S_\alpha \subset X - U$. L'annulation des ${}^pH^0(i_\alpha^! j_{!*} K)$ s'en déduit par dualité.

Soit $L \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$, muni d'un isomorphisme $j^* L \simeq K$, tel que, pour tout α tel que $S_\alpha \subset X - U$, on ait ${}^pH^i(i_\alpha^* L) = 0$ pour $i \geq 0$ et ${}^pH^i(i_\alpha^! L) = 0$ pour $i \leq 0$. D'après ce qui précède, on sait que L est pervers. En raisonnant par récurrence sur le cardinal de $\{\alpha$ tel que $S_\alpha \subset X - U\}$, on se ramène au cas où $X - U = S_\alpha$ est une strate. Notons $i = i_\alpha$. On a un triangle distingué

$$i_* i^! L \longrightarrow L \longrightarrow Rj_* j^* L \simeq Rj_* K \xrightarrow{+1},$$

d'où une suite exacte

$${}^pH^0(i_* i^! L) \longrightarrow {}^pH^0(L) = L \longrightarrow {}^pH^0(Rj_* K).$$

Comme i_* est t-exact ([BBD], 2.2.6), ${}^pH^0(i_* i^! L) = i_* {}^pH^0(i^! L) = 0$, et le morphisme $L \longrightarrow {}^pH^0(Rj_* K)$ est injectif. D'autre part, on a un triangle distingué

$$j_! j^* L \simeq j_! K \longrightarrow L \longrightarrow i_* i^* L \xrightarrow{+1},$$

d'où une suite exacte

$${}^pH^0(j_! K) \longrightarrow L \longrightarrow {}^pH^0(i_* i^* L) = i_* {}^pH^0(i^* L) = 0.$$

Le morphisme ${}^pH^0(j_! K) \longrightarrow L$ est donc surjectif, ce qui finit la démonstration. □

Lemme 3.5.2. *Soient X un schéma de type fini lisse purement de dimension d sur un corps k de caractéristique 0 ou fini et $K \in D_c^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$. On suppose que les $H^i(K)$ sont lisses. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^i(K) = H^{i-d}(K)[d]$.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur le cardinal $N(K)$ de l'ensemble des $i \in \mathbb{Z}$ tels que $H^i(K) \neq 0$.

Si $N(K) = 1$, on a $K \simeq H^i(K)[-i]$ pour un $i \in \mathbb{Z}$; donc $K[i+d]$ est pervers, et

$${}^pH^j(K) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+d, \\ H^i(K)[d] & \text{si } j = i+d. \end{cases}$$

Soit K tel que $N(K) > 1$, et supposons le résultat prouvé pour tous les L tels que $N(L) < N(K)$. Soit $i = max\{k \in \mathbb{Z}$ tel que $H^k(K) \neq 0\}$. Comme $H^i(K)[-i]$ est lisse, on a comme plus haut

$${}^pH^j(H^i(K)[-i]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i+d, \\ H^i(K)[d] & \text{si } j = i+d. \end{cases}$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$ {}^pH^j(\tau_{\leq i-1}K) = H^{j-d}(\tau_{\leq i-1}K)[d] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq i+d, \\ H^{j-d}(K)[d] & \text{si } j < i+d. \end{cases} $$

On conclut en utilisant la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué

$$ \tau_{\leq i-1}K \longrightarrow \tau_{\leq i}K \simeq K \longrightarrow H^i(K)[-i] \xrightarrow{+1} . $$

□

4. Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel

Dans la suite, $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est une des données de Shimura $(\mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}}, \mathcal{X}_d)$ de la section 1.1, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_d(n)$ avec $n \geq 3$, et ℓ est un nombre premier. On choisit un nombre premier $p \neq \ell$ qui ne divise pas n et on travaille sur les réductions modulo p des schémas de la partie 1, qu'on notera $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$, $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$, etc. Pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, on notera encore $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ le complexe ℓ-adique mixte sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ obtenu en réduisant le complexe $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ sur $\mathcal{M}_{d,n}[1/\ell]$.

4.1. Complexes pondérés.

Dans cette section, on définit à l'aide des foncteurs $w_{\leq \underline{a}}$ de 3.3 une famille de complexes sur la compactification de Baily-Borel, qu'on appellera complexes pondérés, et dont les complexes d'intersection sont des cas particuliers. Ces complexes pondérés sont des analogues en caractéristique strictement positive des complexes pondérés définis sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ par Goresky, Harder et MacPherson dans [GHM].

Notation 4.1.1. Soit $t \in \mathbb{Z}$. Pour tout $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, on note $w_{<t}V$ (resp. $w_{\geq t}V$) la plus grande sous-représentation de V de poids $< t$ (resp. $\geq t$).

Les foncteurs exacts $w_{<t}$ et $w_{\geq t}$ s'étendent trivialement à la catégorie dérivée $D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. En effet, comme $Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ est une catégorie semi-simple (car $\mathbf{G}$ est réductif), le foncteur de cohomologie H^* est une équivalence de catégories de $D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$ avec la catégorie des objets gradués de $Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ qui sont nuls en degré assez grand et en degré assez petit.

Pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, on a

$$ V = w_{<t}V \oplus w_{\geq t}V, $$

et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(w_{<t}V) = w_{<t}H^i(V)$ est de poids $< t$ et $H^i(w_{\geq t}V) = w_{\geq t}H^i(V)$ de poids $\geq t$.

Lemme 4.1.2. *On note $c = d(d+1)/2$ (c'est la dimension de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$). Alors, pour tous $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$ et $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$,*

$$ w_{\leq a}\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}w_{\geq c-a}V, $$
$$ w_{>a}\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}w_{<c-a}V. $$

Démonstration. Notons $t = c - a$, $K = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$, $K_1 = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}w_{\geq t}V$ et $K_2 = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}w_{<t}V$. Comme $V = w_{<t}V \oplus w_{\geq t}V$, on a $K = K_1 \oplus K_2$. Il suffit de montrer que K_1 est dans ${}^wD^{\leq a}(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}))$ et K_2 dans ${}^wD^{>a}(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X}))$.

$M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est lisse et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $H^i(K_1) = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}H^i(w_{\geq t}V)$ et $H^i(K_2) = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}H^i(w_{<t}V)$ sont lisses ; donc, d'après le lemme 3.5.2, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^i(K_1) = H^{i-c}(K_1)[c]$ et ${}^pH^i(K_2) = H^{i-c}(K_2)[c]$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Soit $i \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition 2.1.4, $H^{i-c}(K_1)$ est de poids $\leq -t$ et $H^{i-c}(K_2)$ est de poids $> -t$. On en déduit que ${}^pH^i(K_1) = H^{i-c}(K_1)[c]$ est de poids $\leq -t+c = a$ et que ${}^pH^i(K_2) = H^{i-c}(K_2)[c]$ est de poids $> -t+c = a$. $\square$

On pose $M^* = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, $M_0 = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,d\}$, on note M_r l'union des strates de bord correspondant à $(\mathbf{Q}_{d-r},\mathcal{Y}_{d-r})$. Pour tout $r \in \{0,\dots,d\}$, on pose $c_r = dim(M_r) = (d-r)(d+1-r)/2$.

$(M_0, M_1,\dots,M_d)$ est une stratification de M^* (au sens de la définition 3.3.1) , et c'est toujours celle qu'on utilisera dans la suite.

Définition 4.1.3. Soient $t_0,\dots,t_{d-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$. Pour tout $r \in \{1,\dots,d\}$, on pose $a_r = -t_{d-r} + c_r$. On définit un foncteur additif triangulé

$$W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}} : D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}) \longrightarrow D^b_m(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*)$$

de la manière suivante : pour tout $m \in \mathbb{Z}$, si $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$ est tel que $H^i(V)$ soit de poids m pour tout $i \in \mathbb{Z}$, alors

$$W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}}V = w_{\leq(-m+c_0,-m+a_1,\dots,-m+a_d)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V.$$

Définition 4.1.4. Soit $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$. Comme $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$ est de dimension c_0, $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c_0]$ est un faisceau pervers sur $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$. On pose

$$IC^{\mathrm{K}}V = (j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c_0]))[-c_0].$$

Proposition 4.1.5. *(1) Pour tous $t_0,\dots,t_{d-1} \in \mathbb{Z}\cup\{\pm\infty\}$ et pour tout $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, on a un isomorphisme canonique*

$$D(W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}}V) \simeq W^{\geq s_0,\dots,\geq s_{d-1}}(V^*)[2c_0](c_0),$$

où $V^* = R\operatorname{Hom}(V,\mathbb{Q}_\ell)$ est la représentation duale de V et $s_r = 1-t_r+2(c_{d-r}-c_0)$ pour tout $r \in \{0,\dots,d-1\}$.

(2) Notons, pour tout $r \in \{0,\dots,d-1\}$, $t_r = 1+c_{d-r}-c_0 = 1-codim(M_{d-r})$ et $s_r = c_{d-r}-c_0 = -codim(M_{d-r})$. Alors, pour tout $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$, on a des isomorphismes canoniques

$$IC^{\mathrm{K}}V \simeq W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}}V \xrightarrow{\sim} W^{\geq s_0,\dots,\geq s_{d-1}}V.$$

Démonstration. (1) On peut supposer que $V \in Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)}$ et que V est pure de poids $m \in \mathbb{Z}$. V^* est alors une représentation de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$ pure de poids $-m$. On pose $a_0 = -m + c_0$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,d\}$, $a_r = -(t_{d-r}+m)+c_r$. Alors

$$W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}}V = w_{\leq(a_0,\dots,a_d)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V;$$

donc

$$\begin{aligned} D(W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}}V) &= w_{\geq(-a_0,\dots,-a_d)}(j_!\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V^*[2c_0](c_0)) \\ &= (w_{\geq(-a_0+2c_0,\dots,-a_d+2c_0)}j_!\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V^*)[2c_0](c_0). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.4.2,

$$w_{\geq(-a_0+2c_0,\dots,-a_d+2c_0)}j_!\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V^* = w_{\leq(-a_0+2c_0,-a_1+2c_0-1,\dots,-a_d+2c_0-1)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V^*.$$

Notons $b_0 = m + c_0$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,d\}$, $b_r = -(s_{d-r}-m)+c_r$. Alors $b_0 = -a_0+2c_0$ et, pour tout $r \in \{1,\dots,d\}$, $b_r = -a_r-1+2c_0$. Donc

$$\begin{aligned} D(W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}}V) &= (w_{\leq(b_0,\dots,b_d)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V^*)[2c_0](c_0) \\ &= W^{\geq s_0,\dots,\geq s_{d-1}}(V^*)[2c_0](c_0). \end{aligned}$$

(2) On peut supposer que V est pure. Soit m son poids. $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ est lisse pur de poids $-m$ sur M_0, qui est lisse de dimension c_0 ; donc le seul faisceau de cohomologie

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

perverse non nul de $\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$ est ${}^pH^{c_0}\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V = \mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c_0]$, qui est pur de poids $-m+c_0$. D'après la proposition 3.4.2,

$$\begin{array}{rcl} IC^{\mathrm{K}}V[c_0] & = & j_{!*}(\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c_0]) \\ & = & w_{\leq(-m+c_0,\dots,-m+c_0)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c_0] \\ & = & w_{\leq(-m+c_0,-m-1+c_0,\dots,-m-1+c_0)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V[c_0]; \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} IC^{\mathrm{K}}V & = & w_{\leq(-m+c_0,\dots,-m+c_0)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & = & w_{\leq(-m+c_0,-m-1+c_0,\dots,-m-1+c_0)}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V. \end{array}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tout $r \in \{1,\dots,d\}$, $-t_{d-r}-m+c_r = -m-1+c_0$ et $-s_{d-r}-m+c_r = -m+c_0$. □

4.2. **Restrictions des complexes pondérés aux strates.** On note $\mathbf{S} = \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}.I_{2d}$ le centre de $\mathbf{G}$, pour tout $r \in \{1,\dots,d-1\}$,

$$\mathbf{S}_r = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^2 I_{d-r} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I_{2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d-r} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \right\}$$

et

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}.I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{pmatrix}.$$

Pour tout $r \in \{0,\dots,d-1\}$, $\mathbf{S}_r \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ est le centre de $\mathbf{G}_r$.

On utilisera les notations de 1.2 et les notations suivantes. Soit $S \subset \{0,\dots,d-1\}$ non vide. On pose

$$\mathbf{P}_S = \bigcap_{s\in S} \mathbf{P}_s.$$

C'est un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$, dont on note $\mathbf{N}_S$ le radical unipotent et $\mathbf{L}_S = \mathbf{P}_S/\mathbf{N}_S$ le quotient de Levi. Soit $r = min(S)$. On a $\mathbf{Q}_r \subset \mathbf{P}_S \subset \mathbf{P}_r$. Donc $\mathbf{P}_S/\mathbf{N}_r$ est produit direct de $\mathbf{G}_r$ et d'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}_{\ell,S}$ de $\mathbf{L}_{\ell,r}$, dont on note $\mathbf{L}_{\ell,S}$ le quotient de Levi.

On pose

$$\mathrm{H}_S = \mathrm{K} \cap \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) = \mathrm{K} \cap \mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f),$$
$$\mathrm{H}_{\ell,S} = \mathrm{K} \cap \mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f),$$
$$\Gamma_{\ell,S} = \mathrm{H}_{\ell,S}/(\mathrm{K} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{Q})\mathbf{N}_r(\mathbb{A}_f)) = (\mathrm{K} \cap \mathbf{P}_{\ell,S}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_S(\mathbb{A}_f))/(\mathrm{K} \cap \mathbf{N}_S(\mathbb{A}_f)).$$

On a $\mathrm{K}_r = \mathrm{H}_S/\mathrm{H}_{\ell,S}$, et $\Gamma_{\ell,S} = Ker(\mathbf{L}_{\ell,S}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbf{L}_{\ell,S}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ est un sous-groupe arithmétique net de $\mathbf{L}_{\ell,S}(\mathbb{Q})$.

Soit $V \in Rep_{\mathbf{L}_S(\mathbb{Q}_\ell)}$. Si $(t_s)_{s\in S} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^S$, on note

$$V_{<t_s,s\in S}$$

le sous-espace vectoriel de V sur lequel, pour tout $s \in S$, $\mathbf{S}_s$ agit par des caractères $x \longmapsto x^t$ avec $t < t_s$. Comme les $\mathbf{S}_s$ sont centraux dans $\mathbf{L}_S$, $V_{<t_s,s\in S}$ est stable par $\mathbf{L}_S(\mathbb{Q}_\ell)$.

La définition ci-dessus s'étend trivialement aux complexes et donne un foncteur exact

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D^b(Rep_{\mathbf{L}_S(\mathbb{Q}_\ell)}) & \longrightarrow & D^b(Rep_{\mathbf{L}_S(\mathbb{Q}_\ell)}), \\ V & \longmapsto & V_{<t_s,s\in S}. \end{array} \right.$$

On définit de même $V_{\geq t_s,s\in S}$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Théorème 4.2.1. *Soient $t_0, \ldots, t_{d-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. On suppose que tous les $H^i(V)$ sont purs de même poids $m \in \mathbb{Z}$. On fixe $r \in \{0, \ldots, d-1\}$ et $g \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$. Alors*
$[i_{g,r}^* W^{\geq t_0, \ldots, \geq t_{d-1}}(V)] =$
$$\mathcal{F}^{\mathrm{K}_r}\left(\sum_S \sum_{i \in I_S} (-1)^{card(S)-1}\left[R\Gamma\left(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), g_i g.V)_{\geq t_r+m, <t_s+m, s\in S\setminus\{r\}}\right)\right]\right)$$
où S parcourt les sous-ensembles de $\{r, \ldots, d-1\}$ contenant r et, pour tout $r \in S \subset \{r, \ldots, d-1\}$, $(g_i)_{i\in I_S}$ est un système de représentants dans $\mathbf{P}_r(\mathbb{Z})\mathbf{Q}_r(\widehat{\mathbb{Z}})$ du double quotient $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus (\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_r)$.

Supposons que V est concentré en degré 0. Alors, si $t_s = [s(s+1) - d(d+1)]/2$ pour tout $s \in \{0, \ldots, d-1\}$, ou si $t_s = 1 + [s(s+1) - d(d+1)]/2$ pour tout $s \in \{0, \ldots, d-1\}$, on a $IC^{\mathrm{K}}V = W^{\geq t_0, \ldots, \geq t_{d-1}}(V)$ (proposition 4.1.5 (2)). On obtient donc en particulier une formule pour $[i_{g,r}^* IC^{\mathrm{K}}V]$.

Démonstration. Le théorème résulte du théorème 3.3.5 et de la proposition ci-dessous. □

Remarque 4.2.2. Grâce à ce théorème et aux résultats de [K], on peut calculer la fonction trace de Frobenius pour un complexe pondéré (et en particulier pour les complexes d'intersection à coefficients dans une représentation V de $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)$).

Rappelons qu'on a noté, pour tout $r \in \{1, \ldots, d\}$, M_r l'union des strates $Im(i_{g,d-r})$, $g \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ (c'est-à-dire l'union des strates de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ associées au sous-groupe parabolique maximal $\mathbf{P}_{d-r}$ de $\mathbf{G}$). On note i_r l'inclusion de M_r dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$.

Proposition 4.2.3. *Soient $r_1, \ldots, r_c \in \{0, \ldots, d-1\}$ tels que $r_1 > \cdots > r_c$, $a_1, \ldots, a_c \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, $r \in \{0, \ldots, r_c\}$ et $g \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, c\}$, on pose $t_i = -a_i + r_i(r_i+1)/2$. On note*
$$L = Ri_{d-r_c,*} w_{>a_c} i_{d-r_c}^* \ldots Ri_{d-r_1,*} w_{>a_1} i_{d-r_1}^* Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V)$$
et $i = i_{g,r}$. Soit $S = \{r_1, \ldots, r_c, r\}$.

Alors on a un isomorphisme canonique
$$i^* L \simeq \bigoplus_C L_C,$$
où C parcourt l'ensemble des doubles classes de $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\backslash(\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_r)$, et de plus, si h est un représentant dans $\mathbf{P}_r(\mathbb{Z})\mathbf{Q}_r(\widehat{\mathbb{Z}})$ de la double classe C, on a un isomorphisme
$$L_C \simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}_r} R\Gamma(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), hg.V)_{<t_1, \ldots, <t_c}).$$

Démonstration. Si $r < r_c$, on pose $c' = c+1$, $r_{c'} = r$, $a_{c'} = -\infty$ et $t_{c'} = +\infty$; si $r = r_c$, on pose $c' = c$. On a donc $S = \{r_1, \ldots, r_{c'}\}$, avec $r_1 > \cdots > r_{c'} = r$. D'après la définition de L, on a une décomposition
$$i^* L = \bigoplus L_{X_1, \ldots, X_{c'}},$$
où $(X_1, \ldots, X_{c'})$ parcourt les c'-uplets de strates de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ de la forme $X_i = Im(i_{b_i, r_i})$ tels que $X_{i+1} \subset \overline{X}_i$ pour $1 \leq i \leq c'-1$ et $X_{c'} = Im(i_{g,r})$, et
$$L_{X_1, \ldots, X_{c'}} = w_{>a_{c'}} i^* Ri_{b_{c'-1}, r_{c'-1}*} w_{>a_{c'-1}} i_{b_{c'-1}, r_{c'-1}}^* \ldots Ri_{b_1, r_1 *} w_{>a_1} i_{b_1, r_1}^* Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V.$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Soit $(X_1,\dots,X_{c'})$ un tel c'-uplet. On choisit $g_1\in\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ tel que $X_1=Im(i_{g_1,r_1})$. Pour tout $i\in\{1,\dots,c'-1\}$, $X_{i+1}\subset\overline{X}_i\xleftarrow[\sim]{\bar{i}_{g_i\dots g_1,r_i}}M^{\mathrm{K}_{r_i}}(\mathbf{G}_{r_i},\mathcal{X}_{r_i})^*$ est la strate correspondant au sous-groupe parabolique maximal $\mathbf{R}_{i+1}=(\mathbf{P}_{r_{i+1}}\cap\mathbf{Q}_{r_i})/\mathbf{N}_{r_i}$ de $\mathbf{G}_{r_i}$ et à un $h_{i+1}\in\mathbf{G}_{r_i}(\widehat{\mathbb{Z}})$; on choisit $g_{i+1}\in\mathbf{Q}_{r_i}(\widehat{\mathbb{Z}})$ relevant h_{i+1}. Comme $X_{c'}=Im(i_{g,r})$, il existe $h\in\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)$ tel que $hg\mathrm{K}=g_{c'}\dots g_1\mathrm{K}$, et h est dans $\mathbf{P}_r(\mathbb{Z})\mathbf{Q}_r(\widehat{\mathbb{Z}})=\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\cap\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ car $g,g_1,\dots,g_{c'}\in\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ et $\mathrm{K}\subset\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$. Notons, pour tout $i\in\{1,\dots,c'\}$, $S_i=\{r_1,\dots,r_i\}$. Soit $i\in\{1,\dots,c'-1\}$. Le sous-groupe distingué $\mathbf{Q}_{R_{i+1}}$ de $\mathbf{R}_{i+1}$ défini par Pink est $\mathbf{Q}_{R_{i+1}}=\mathbf{Q}_{r_{i+1}}/(\mathbf{Q}_{r_{i+1}}\cap\mathbf{N}_{r_i})$, le radical unipotent de $\mathbf{R}_{i+1}$ est $\mathbf{N}_{R_{i+1}}=\mathbf{N}_{r_{i+1}}/(\mathbf{N}_{r_{i+1}}\cap\mathbf{N}_{r_i})=\mathbf{N}_{r_{i+1}}\mathbf{N}_{r_i}/\mathbf{N}_{r_i}$, on a $\mathbf{Q}_{R_{i+1}}/\mathbf{N}_{R_{i+1}}=\mathbf{G}_{r_{i+1}}$, et le quotient de Levi $\mathbf{L}_{R_{i+1}}=\mathbf{R}_{i+1}/\mathbf{N}_{R_{i+1}}$ s'écrit $\mathbf{L}_{R_{i+1}}=\mathbf{L}_{\ell,R_{i+1}}\times\mathbf{G}_{r_{i+1}}$, avec $\mathbf{L}_{\ell,R_{i+1}}=(\mathbf{P}_{r_{i+1}}\cap\mathbf{Q}_{r_i})/\mathbf{Q}_{r_{i+1}}\mathbf{N}_{r_i}$. On voit facilement que $\mathbf{L}_{\ell,S_{i+1}}=\mathbf{L}_{\ell,S_i}\times\mathbf{L}_{\ell,R_{i+1}}$ et que $\mathbf{N}_{R_{i+1}}=\mathbf{N}_{S_{i+1}}/\mathbf{N}_{S_i}$. On en déduit en particulier que le groupe

$$\begin{aligned}\Gamma_{R_{i+1}}&=(\mathrm{K}_{r_i}\cap\mathbf{L}_{\ell,R_{i+1}}(\mathbb{Q})\mathbf{N}_{R_{i+1}}(\mathbb{A}_f))/(\mathrm{K}_{r_i}\cap\mathbf{N}_{R_{i+1}}(\mathbb{A}_f))\\&=Ker(\mathbf{L}_{\ell,R_{i+1}}(\mathbb{Z})\longrightarrow\mathbf{L}_{\ell,R_{i+1}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))\end{aligned}$$

vérifie $\Gamma_{S_{i+1}}=\Gamma_{S_i}\times\Gamma_{R_{i+1}}$. Comme $\mathbf{L}_{\ell,S_i}\subset\mathbf{L}_{\ell,r_i}$ et $\mathbf{G}_{r_i}$ commutent et que $\mathbf{S}_1,\dots,\mathbf{S}_{r_i}$ agissent trivialement sur $\mathbf{N}_{R_{i+1}}$, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}&R\Gamma(\Gamma_{R_{i+1}},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{R_{i+1}}),g_{i+1}.R\Gamma(\Gamma_{S_i},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S_i}),g_i\dots g_1.V)_{<t_1,\dots,<t_i}))_{<t_{i+1}})\\&\qquad\simeq R\Gamma(\Gamma_{S_{i+1}},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S_{i+1}}),g_{i+1}\dots g_1.V)_{<t_1,\dots,<t_{i+1}}),\end{aligned}$$

d'où, grâce au théorème de Pink et au lemme 4.1.2, un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}&w_{>a_{i+1}}i^*_{g_{i+1}\dots g_1,r_{i+1}}Ri_{g_i\dots g_1,r_i*}\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{r_i}}R\Gamma(\Gamma_{S_i},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S_i}),g_i\dots g_1.V)_{<t_1,\dots,<t_i})\\&\qquad\simeq\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{r_{i+1}}}R\Gamma(\Gamma_{S_{i+1}},R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_{S_{i+1}}),g_{i+1}\dots g_1.V)_{<t_1,\dots,<t_{i+1}}).\end{aligned}$$

Une récurrence sur i donne alors un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}L_{X_1,\dots,X_{c'}}&\simeq\mathcal{F}^{\mathrm{K}_r}R\Gamma(\Gamma_S,R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),g_{c'}\dots g_1.V)_{<t_1,\dots,<t_{c'}})\\&\simeq\mathcal{F}^{\mathrm{K}_r}R\Gamma(\Gamma_S,R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),hg.V)_{<t_1,\dots,<t_{c'}})\\&=\mathcal{F}^{\mathrm{K}_r}R\Gamma(\Gamma_S,R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),hg.V)_{<t_1,\dots,<t_c}).\end{aligned}$$

Il reste à compter les c'-uplets $(X_1,\dots,X_{c'})$. On a associé à $(X_1,\dots,X_{c'})$ (de manière non unique) un $(c'+1)$-uplet $(g_1,\dots,g_{c'},h)$, avec $g_1\in\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, $g_i\in\mathbf{Q}_{r_{i-1}}(\widehat{\mathbb{Z}})$ pour $i\geq 2$ et $h\in\mathbf{P}_r(\mathbb{Z})\mathbf{Q}_r(\widehat{\mathbb{Z}})$ tels que $hg\mathrm{K}=g_{c'}\dots g_1\mathrm{K}$. On note $(X_1,\dots,X_{c'})=\underline{X}_{g_1,\dots,g_{c'},h}$. On a $\underline{X}_{g_1,\dots,g_{c'},h}=\underline{X}_{g'_1,\dots,g'_{c'},h'}$ si et seulement si

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{r_1}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_1}(\mathbb{A}_f)g_1\mathrm{K}=\mathbf{P}_{r_1}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_1}(\mathbb{A}_f)g'_1\mathrm{K},\\\mathbf{P}_{\{r_1,r_2\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_2}(\mathbb{A}_f)g_2g_1\mathrm{K}=\mathbf{P}_{\{r_1,r_2\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_2}(\mathbb{A}_f)g'_2g'_1\mathrm{K},\\\dots\\\mathbf{P}_{\{r_1,\dots,r_{c'}\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_{c'}}(\mathbb{A}_f)g_{c'}\dots g_1\mathrm{K}=\mathbf{P}_{\{r_1,\dots,r_{c'}\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_{c'}}(\mathbb{A}_f)g'_{c'}\dots,g'_1\mathrm{K}.\end{gathered}$$

Il est évident que chaque ligne implique la précédente, et que la dernière condition est équivalente à

$$\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)hg\mathrm{K}=\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h'g\mathrm{K},$$

elle-même équivalente à

$$\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h\mathrm{H}_r=\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h'\mathrm{H}_r,$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

car $g\mathrm{K}g^{-1} = \mathrm{K}$ ($g \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$). On en déduit finalement que l'application $\underline{X}_{g_1,\dots,g_{c'},h} \longmapsto \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h\mathrm{H}_r$ induit une bijection entre l'ensemble des c'-uplets $(X_1, \dots, X_{c'})$ et le double quotient $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus (\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)/\mathrm{H}_r)$. □

Remarque 4.2.4. Nous pouvons maintenant rendre plus explicite le rapport entre les complexes pondérés définis ici et ceux de [GHM]. Soient $t_0, \dots, t_{d-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et V une représentation algébrique de $\mathbf{G}$, qu'on suppose pure de poids 0 pour simplifier. Pour tout $r \in \{1, \dots, d\}$, on note $a_r = -t_{d-r} + (d-r)(d+1-r)/2$. Alors, d'après le théorème 3.3.5, on a une égalité dans le groupe de Grothendieck de $D^b_m(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*, \mathbb{Q}_\ell)$,

$$[W^{\geq t_0,\dots,\geq t_{d-1}} V(\mathbb{Q}_\ell)] = \sum_{1 \leq r_1 < \cdots < r_c \leq d} (-1)^c [Ri_{r_c *} w_{>a_{r_c}} i^*_{r_c} \dots Ri_{r_1 *} w_{>a_1} i^*_{r_1} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V(\mathbb{Q}_\ell)].$$

Or, d'après le calcul explicite des

$$L_{r_1,\dots,r_c} = Ri_{r_c *} w_{>a_{r_c}} i^*_{r_c} \dots Ri_{r_1 *} w_{>a_{r_1}} i^*_{r_1} Rj_* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V(\mathbb{Q}_\ell)$$

qui a été fait dans la proposition ci-dessus, il existe une manière naturelle de relever ces complexes en des complexes sur $\mathcal{M}^*_{d,n}[1/\ell]$, qu'on notera encore $L_{r_1,\dots,r_c}$. Notons $L_{r_1,\dots,r_c}(\mathbb{C})$ le complexe de faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $\mathcal{M}^*_{d,n}(\mathbb{C})$ déduit du complexe $L_{r_1,\dots,r_c}$ sur $\mathcal{M}^*_{d,n}[1/\ell]$. Alors la somme alternée

$$\sum_{1 \leq r_1 < \cdots < r_c \leq d} (-1)^c [L_{r_1,\dots,r_c}(\mathbb{C})]$$

est égale à la classe (dans le groupe de Grothendieck de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels sur $\mathcal{M}^*_{d,n}(\mathbb{C})$) de l'image directe par le morphisme canonique de la compactification de Borel-Serre réductive de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}^*_{d,n}(\mathbb{C}) = M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*(\mathbb{C})$ du complexe pondéré de [GHM] associé au profil de poids $(t_0, \dots, t_{d-1})$ et à coefficients dans V.

5. Correspondances de Hecke

Dans toute cette partie, les flèches marquées “CB” seront des flèches de changement de base.

5.1. Correspondances cohomologiques et troncature par le poids.

Soient $\overline{c}_1 : X' \longrightarrow X_1, \overline{c}_2 : X' \longrightarrow X_2$ deux morphismes finis entre des schémas séparés de type fini sur $\mathbb{F}_q$.

Définition 5.1.1. Soient $j_1 : Y_1 \longrightarrow X_1, j_2 : Y_2 \longrightarrow X_2, j' : Y' \longrightarrow X'$ des immersions localement fermées. On suppose que $\overline{c}_1(Y') \subset Y_1$ et $\overline{c}_2(Y') \subset Y_2$, et on note $c_1 : Y' \longrightarrow Y_1$ et $c_2 : Y' \longrightarrow Y_2$ les morphismes obtenus par restriction.

Alors, pour tous $K \in D^b_c(Y_1, \mathbb{Q}_\ell), L \in D^b_c(Y_2, \mathbb{Q}_\ell)$ et pour toute correspondance cohomologique $u : c_1^* K \longrightarrow c_2^! L$ de K à L à support dans (c_1, c_2), on appelle image de u par (j_1, j_2) la correspondance cohomologique de $Rj_{1*}K$ à $Rj_{2*}L$ à support dans $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ suivante :

$$\overline{c}_1^* Rj_{1*} K \xrightarrow{CB} Rj'_* c_1^* K \xrightarrow{u} Rj'_* c_2^! L \xrightarrow{CB} \overline{c}_2^! Rj_{2*} L.$$

Si $X_1 = X_2$ et $j_1 = j_2 = j$, on note aussi $\overline{u} = Rj_* u$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Lemme 5.1.2 ([F, 1.3.1]). *Supposons que $X_1 = X_2$ et que $j = j_1 = j_2$ et j' sont des immersions ouvertes. Alors, pour toute $u : c_1^* K \longrightarrow c_2^! L$, $Rj_* u$ est l'unique prolongement de u en une correspondance cohomologique $\overline{c}_1^* Rj_* K \longrightarrow \overline{c}_2^! Rj_* L$.*

Dans la suite, on suppose que $X_1 = X_2 = X$. Soient $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(S'_k)_{0 \leq k \leq n}$ des stratifications de X et X' (au sens de la définition 3.3.1). On note $i_k : S_k \longrightarrow X$ (resp. $i'_k : S'_k \longrightarrow X'$) l'inclusion, $U = S_0$ (resp. $U' = S'_0$) et $j = i_0$ (resp. $j' = i'_0$).

On suppose que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\overline{c}_1$ et $\overline{c}_2$ envoient S'_k dans S_k.

On note $c_1^k, c_2^k : S'_k \longrightarrow S_k$ les morphismes obtenus ; si $k = 0$, on note aussi $c_1 = c_1^0$ et $c_2 = c_2^0$.

Lemme 5.1.3. *Soient $K, L \in D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$, $u : \overline{c}_1^* K \longrightarrow \overline{c}_2^! L$ une correspondance cohomologique à support dans $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$ et $\underline{a} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$. Alors il existe une et une seule correspondance cohomologique $w_{\leq \underline{a}} u : \overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K \longrightarrow \overline{c}_2^! w_{\leq \underline{a}} L$ (resp. $w_{> \underline{a}} u : \overline{c}_1^* w_{> \underline{a}} K \longrightarrow \overline{c}_2^! w_{> \underline{a}} L$) qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K \arrow[r] \arrow[d, "w_{\leq \underline{a}} u"] & \overline{c}_1^* K \arrow[d, "u"] \\ \overline{c}_2^! w_{\leq \underline{a}} L \arrow[r] & \overline{c}_2^! L \end{tikzcd}$$

$$\left(\text{\textit{resp.}} \quad \begin{tikzcd} \overline{c}_1^* K \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \overline{c}_1^* w_{> \underline{a}} K \arrow[d, "w_{> \underline{a}} u"] \\ \overline{c}_2^! L \arrow[r] & \overline{c}_2^! w_{> \underline{a}} L \end{tikzcd} \right).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas de $w_{\leq \underline{a}}$, car celui de $w_{> \underline{a}}$ s'en déduit par dualité. Considérons le diagramme suivant, dont les lignes sont distinguées :

$$\begin{tikzcd} \overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K \arrow[r] & \overline{c}_1^* K \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \overline{c}_1^* w_{> \underline{a}} K \arrow[r, "+1"] & {} \\ \overline{c}_2^! w_{\leq \underline{a}} L \arrow[r] & \overline{c}_2^! L \arrow[r] & \overline{c}_2^! w_{> \underline{a}} L \arrow[r, "+1"] & {} \end{tikzcd}.$$

D'après le (iv) de la proposition 3.4.1, $\overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K \in {}^w D^{\leq \underline{a}}(X')$ et $\overline{c}_2^! w_{> \underline{a}} L \in {}^w D^{> \underline{a}}(X')$. En appliquant le (i) de la même proposition, on trouve $R\operatorname{Hom}(\overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K, \overline{c}_2^! w_{> \underline{a}} L) = 0$; donc le morphisme canonique

$$R\operatorname{Hom}(\overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K, \overline{c}_2^! w_{\leq \underline{a}} L) \longrightarrow R\operatorname{Hom}(\overline{c}_1^* w_{\leq \underline{a}} K, \overline{c}_2^! L)$$

est un isomorphisme, ce qui donne l'existence et l'unicité de $w_{\leq \underline{a}} u$. □

Nous allons expliciter les correspondances $w_{\leq \underline{a}} u$ et $w_{> \underline{a}} u$ dans deux cas particuliers. On aura besoin d'un morphisme fonctoriel déduit de l'isomorphisme de changement de base propre. Considérons un diagramme cartésien aux éléments nilpotents près

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

On a un isomorphisme de changement de base $Rf'_*g'^! \xrightarrow{\sim} g^!Rf_*$, d'où un morphisme fonctoriel

$$f'^*g^! \xrightarrow{adj} f'^*g^!Rf_*f^* \xleftarrow{\sim} f'^*Rf'_*g'^!f^* \xrightarrow{adj} g'^!f^*.$$

Si $j : U \longrightarrow Y'$ est un morphisme étale, on en déduit un morphisme fonctoriel

$$(f'j)^*g^! = j^!f'^*g^! \longrightarrow j^!g'^!f^* = (g'j)^!f^*.$$

Revenons au calcul de $w_{\leq \underline{a}}u$ et $w_{>\underline{a}}u$.

Lemme 5.1.4. *Soient $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. On définit $\underline{a}, \underline{a}' \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$ par $a_r = -a'_r = +\infty$ si $r \neq k$ et $a_k = a'_k = a$. On suppose que c_1^k et c_2^k sont étales. Alors, pour tous $K, L \in D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et pour toute correspondance cohomologique $u : \overline{c}_1^*K \longrightarrow \overline{c}_2^!L$, $w_{>\underline{a}}u$ est égal au composé*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\overline{c}_1^*w_{>\underline{a}}K \arrow[r, equal] & \overline{c}_1^*Ri_{k*}w_{>a}i_k^*K \arrow[r, "CB"] & Ri'_{k*}c_1^{k*}w_{>a}i_k^*K \arrow[r, equal] & Ri'_{k*}w_{>a}c_1^{k*}i_k^*K \arrow[r, equal] & Ri'_{k*}w_{>a}{i'_k}^*\overline{c}_1^*K \arrow[d, "u"] \\
\overline{c}_2^!w_{>\underline{a}}L \arrow[r, equal] & \overline{c}_2^!Ri_{k*}w_{>a}i_k^*L & Ri'_{k*}c_2^{k!}w_{>a}i_k^*L \arrow[l, "CB"'] \arrow[r, equal] & Ri'_{k*}w_{>a}c_2^{k!}i_k^*L & R'_{k*}w_{>a}{i'_k}^*\overline{c}_2^!L \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et $w_{\leq \underline{a}'}u$ est égal au composé

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\overline{c}_1^*w_{\leq \underline{a}'}K \arrow[r, equal] & \overline{c}_1^*i_{k!}w_{\leq a}i_k^!K \arrow[r, "CB"] & i'_{k!}c_1^{k*}w_{\leq a}i_k^!K \arrow[r, equal] & i'_{k!}w_{\leq a}c_1^{k*}i_k^!K \arrow[r] & i'_{k!}w_{\leq a}{i'_k}^!\overline{c}_1^*K \arrow[d, "u"] \\
\overline{c}_2^!w_{\leq \underline{a}'}L \arrow[r, equal] & \overline{c}_2^!i_{k!}w_{\leq a}i_k^!L & i'_{k!}c_2^{k!}w_{\leq a}i_k^!L \arrow[l, "CB"'] \arrow[r, equal] & i'_{k!}w_{\leq a}c_2^{k!}i_k^!L \arrow[r, equal] & i'_{k!}w_{\leq a}{i'_k}^!\overline{c}_2^!L.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas de $w_{>\underline{a}}u$, l'autre cas s'en déduisant par dualité. Notons $v : \overline{c}_1^*w_{>\underline{a}}K \longrightarrow \overline{c}_2^!w_{>\underline{a}}L$ le morphisme défini dans l'énoncé. D'après le lemme 5.1.3, il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_1^*K \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \overline{c}_1^*w_{>\underline{a}}K \arrow[d, "v"] \\
\overline{c}_2^!L \arrow[r] & \overline{c}_2^!w_{>\underline{a}}L.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme v est le composé de trois morphismes :

(1) un morphisme $v_1 : \overline{c}_1^*w_{>\underline{a}}K \longrightarrow Ri'_{k*}w_{>a}{i'_k}^*\overline{c}_1^*K = w_{>\underline{a}}\overline{c}_1^*K$;

(2) un morphisme $w_{>\underline{a}}\overline{c}_1^*K \longrightarrow w_{>\underline{a}}\overline{c}_2^!L$, obtenu en appliquant à u le foncteur $w_{>\underline{a}}$;

(3) un morphisme $v_2 : w_{>\underline{a}}\overline{c}_2^!L = Ri'_{k*}w_{>a}{i'_k}^*\overline{c}_2^!L \longrightarrow \overline{c}_2^!w_{>\underline{a}}L$.

Il suffit de montrer que les deux diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_1^*K \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{c}_1^*w_{>\underline{a}}K \arrow[d, "v_1"] \\
& w_{>\underline{a}}\overline{c}_1^*K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\overline{c}_2^!L \arrow[r] \arrow[dr] & w_{>\underline{a}}\overline{c}_2^!L \arrow[d, "v_2"] \\
& \overline{c}_2^!w_{>\underline{a}}L.
\end{tikzcd}$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Le premier diagramme se réécrit

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_1^*K \arrow[r, "adj"] \arrow[ddr, "CB"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \overline{c}_1^*Ri_{k*}i_k^*K \arrow[r] \arrow[d, "CB"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \overline{c}_1^*Ri_{k*}w_{>a}i_k^*K \arrow[d, "CB"] \\
& Ri'_{k*}c_1^{k*}i_k^*K \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & Ri'_{k*}c_1^{k*}w_{>a}i_k^*K \arrow[d, "\wr"] \\
& Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_1^*K \arrow[r] & Ri'_{k*}w_{>a}{i'_k}^*\overline{c}_1^*K.
\end{tikzcd}$$

(1) est commutatif par des arguments standard, (2) et (3) sont clairement commutatifs. Pour prouver que le deuxième diagramme est commutatif, on se ramène de la même manière à montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_2^!L \arrow[r, "adj"] \arrow[d, "adj"'] & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!L \arrow[d] \\
\overline{c}_2^!Ri_{k*}i_k^*L & Ri'_{k*}c_2^{k!}i_k^*L. \arrow[l, "CB"']
\end{tikzcd}$$

Si on remplace la flèche de droite par sa définition, ce diagramme se réécrit

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_2^!L \arrow[r, "adj"] \arrow[d, "adj"'] & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!L \arrow[r, "adj"] & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!L \\
\overline{c}_2^!Ri_{k*}i_k^*L & Ri'_{k*}{c_2^k}^!i_k^*L \arrow[l, "CB"'] & Ri'_{k*}{i'_k}^*Ri'_{k*}{c_2^k}^!i_k^*L. \arrow[l, "adj"'] \arrow[u, "\wr", "CB"']
\end{tikzcd}$$

En développant les flèches de changement de base, on obtient le diagramme ci-dessous (où toutes les flèches sont des flèches d'adjonction), qui est clairement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_2^!L \arrow[r] \arrow[d] & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!L \arrow[r] & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!Ri_{k*}i_k^*L & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!Ri_{k*}c^k_{2*}{c_2^k}^!i_k^*L \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
\overline{c}_2^!Ri_{k*}i_k^*L \arrow[urr] & & & Ri'_{k*}{i'_k}^*\overline{c}_2^!\overline{c}_{2*}Ri'_{k*}{c_2^k}^!i_k^*L \\
\overline{c}_2^!Ri_{k*}c^k_{2*}{c_2^k}^!i_k^*L \arrow[r, equal] \arrow[u] \arrow[uurrr] & \overline{c}_2^!\overline{c}_{2*}Ri'_{k*}{c_2^k}^!i_k^*L \arrow[urr] & Ri'_{k*}{c_2^k}^!i_k^*L \arrow[l] \arrow[r] & Ri'_{k*}{i'_k}^*Ri'_{k*}{c_2^k}^!i_k^*L. \arrow[u] \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}$$

□

Nous appelons "groupe de Grothendieck des correspondances cohomologiques à support dans $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$" le groupe engendré par les classes d'isomorphisme de triplets (K, L, u), où $K, L \in D_m^b(X, \mathbb{Q}_\ell)$ et u est un morphisme $\overline{c}_1^*K \longrightarrow \overline{c}_2^!L$ (un isomorphisme $(K, L, u) \xrightarrow{\sim} (K', L', u')$ est un couple d'isomorphismes $(f : K \xrightarrow{\sim} K', g : L \xrightarrow{\sim} L')$ tel que $\overline{c}_2^!(g) \circ u = u' \circ \overline{c}_1^*(f)$), soumis aux relations $[(K', L', u')] = [(K, L, u)] + [(K'', L'', u'')]$ s'il existe des triangles distingués $K \longrightarrow K' \longrightarrow K'' \xrightarrow{+1}$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

et $L \longrightarrow L' \longrightarrow L'' \xrightarrow{+1}$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\overline{c}_1^* K \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \overline{c}_1^* K' \arrow[r] \arrow[d, "u'"'] & \overline{c}_1^* K'' \arrow[r, "+1"] \arrow[d, "u''"'] & {} \\
\overline{c}_2^! L \arrow[r] & \overline{c}_2^! L' \arrow[r] & \overline{c}_2^! L'' \arrow[r, "+1"] & {}
\end{tikzcd}.$$

La proposition suivante se prouve exactement comme le théorème 3.3.5.

Proposition 5.1.5. *Pour tout $\underline{a} \in (\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\})^{n+1}$, pour tous $K, L \in {}^w D^{\leq a_0}(U)$ et pour toute correspondance cohomologique $u : c_1^* K \longrightarrow c_2^! L$, on a*

$$[w_{\leq \underline{a}} Rj_* u] = \sum_{1 \leq n_1 < \ldots n_r \leq n} (-1)^r [Ri_{n_r *} w_{>a_r} i_{n_r}^* \ldots Ri_{n_1 *} w_{>a_1} i_{n_1}^* Rj_* u]$$

dans le groupe de Grothendieck des correspondances cohomologiques à support dans $(\overline{c}_1, \overline{c}_2)$.

5.2. **Correspondances de Hecke sur les complexes pondérés.** Dans cette section, $(\mathbf{G}, \mathcal{X})$ est la donnée de Shimura $(\mathbf{GSp}_{2d,\mathbb{Q}}, \mathcal{X}_d)$ de la section 1.1, et on utilise les notations de la partie 4. On fixe $n \geq 3$, un nombre premier $p \neq \ell$ qui ne divise pas n, et $g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$, et on note $\mathrm{K} = \mathrm{K}_d(n)$. Comme dans la partie 4, on travaille sur les réductions modulo p des variétés de Shimura.

Définition 5.2.1. Soient $g_1, g_2 \in \mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$. Soient $m \geq 3$ tel que p ne divise pas m et $\mathrm{K}' := \mathrm{K}_d(m) \subset g_1 \mathrm{K}_{g_1}^{-1} \cap g_2 \mathrm{K}_{g_2}^{-1}$, et $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. La multiplication par $g_2^{-1} g_1$ induit un isomorphisme $g_1.V \xrightarrow{\sim} g_2.V$, d'où une correspondance cohomologique sur $\mathcal{F}^{\mathrm{K}} V$ à support dans (T_{g_1}, T_{g_2}),

$$u_{g_1,g_2} : T_{g_1}^* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V \simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} g_1.V \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{\mathrm{K}'} g_2.V \simeq T_{g_2}^* \mathcal{F}^{\mathrm{K}} V,$$

qu'on appelle correspondance de Hecke associée à (g_1, g_2) si $g_1 = g$ et $g_2 = 1$, on note $u_{g_1,g_2} = u_g$.

Dans cette section, nous allons calculer, pour $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$, $0 \leq r_c < \cdots < r_1 \leq d-1$ et $a_1, \ldots, a_c \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, la correspondance $Ri_{d-r_c,*} w_{>a_c} i_{d-r_c}^* \cdots Ri_{d-r_1,*} w_{>a_1} i_{d-r_1}^* Rj_* u_g$ (d'après la proposition 5.1.5, on pourra en déduire la classe dans le groupe de Grothendieck d'une correspondance $w_{\leq \underline{a}} Rj_* u_g$). Pour tout $s \in \{1, \ldots, c\}$, on pose $t_s = -a_s + r_s(r_s+1)/2$.

Notons $S = \{r_1, \ldots, r_c\}$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des c-uplets $(X_1, \ldots, X_c)$ tels que $X_i \subset M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ soit de la forme $Im(i_{b_i, r_i})$, $b_i \in \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, et $X_{i+1} \subset \overline{X}_i$ pour $1 \leq i \leq c-1$.

On définit une application

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}}) \times \mathbf{Q}_{r_1}(\widehat{\mathbb{Z}}) \times \cdots \times \mathbf{Q}_{r_{c-1}}(\widehat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (g_1, \ldots, g_c) & \longmapsto & \underline{X}_{g_1,\ldots,g_c} \end{cases}$$

de la manière suivante : $\underline{X}_{g_1,\ldots,g_c} = (X_1, \ldots, X_c)$ avec $X_1 = Im(i_{g_1,r_1})$, et, pour tout $j \in \{1, \ldots, c-1\}$, X_{j+1} la strate de bord de $M^{\mathrm{K}_{r_j}}(\mathbf{G}_{r_j}, \mathcal{X}_{r_j})^* \xrightarrow[\sim]{\overline{i}_{g_j \cdots g_1, r_j}} \overline{X}_j$ associée au sous-groupe parabolique maximal $(\mathbf{P}_{r_{j+1}} \cap \mathbf{Q}_{r_j})/\mathbf{N}_{r_j}$ de $\mathbf{G}_{r_j}$ et à l'image de g_{j+1} dans $\mathbf{G}_{r_j}(\widehat{\mathbb{Z}})$.

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

Cette application est surjective, et on a $\underline{X}_{g_1,\dots,g_c} = \underline{X}_{g'_1,\dots,g'_c}$ si et seulement si

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{r_1}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_1}(\mathbb{A}_f)g_1\mathrm{K} = \mathbf{P}_{r_1}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_1}(\mathbb{A}_f)g'_1\mathrm{K},\\ \mathbf{P}_{\{r_1,r_2\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_2}(\mathbb{A}_f)g_2g_1\mathrm{K} = \mathbf{P}_{\{r_1,r_2\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_2}(\mathbb{A}_f)g'_2g'_1\mathrm{K},\\ \dots\\ \mathbf{P}_{\{r_1,\dots,r_c\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)g_c\dots g_1\mathrm{K} = \mathbf{P}_{\{r_1,\dots,r_c\}}(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)g'_c\dots g'_1\mathrm{K}.\end{gathered}$$

Comme chaque ligne implique la précédente, on en déduit que $\underline{X}_{g_1,\dots,g_c} = \underline{X}_{g_c\dots g_1,1,\dots,1}$, et que $g \longmapsto \underline{X}_{(g,1,\dots,1)}$ induit une bijection $\varphi : \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$.

D'après la proposition 4.2.3, on a un isomorphisme canonique

$$Ri_{d-r_c,*}w_{>a_c}i^*_{d-r_c}\dots Ri_{d-r_1,*}w_{>a_1}i^*_{d-r_1}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \simeq \bigoplus_{C\in\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}} L_C,$$

où, pour tout C, si $\varphi(C) = (Im(i_{b_1,r_1}),\dots,Im(i_{b_c,r_c})) \in \mathcal{E}$, alors

$$L_C = Ri_{b_c,r_c,*}w_{>a_c}i^*_{b_c,r_c}\dots Ri_{b_1,r_1,*}w_{>a_1}i^*_{b_1,r_1}Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V.$$

La correspondance $Ri_{d-r_c,*}w_{>a_c}i^*_{d-r_c}\dots Ri_{d-r_1,*}w_{>a_1}i^*_{d-r_1}Rj_*u_g$ est donc donnée par une matrice $(u_{C_1,C_2})_{C_1,C_2\in\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}}$, dont nous allons calculer les coefficients.

Dans la suite, on utilisera les notations de la section 1.2 (en particulier H_r, $\mathrm{H}_{\ell,r}$, etc.) et on notera avec un $'$ les groupes analogues obtenus en remplaçant K par K$'$.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$. On fixe $h_1 \in C_1 \cap \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ et $h_2 \in C_2 \cap \mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$. D'après la proposition 4.2.3, on a des isomorphismes

$$\begin{aligned}L_{C_1} &\simeq Ri_{h_1,r_c,*}\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{r_c}}R\Gamma(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), h_1.V)_{<t_1,\dots,<t_c}),\\ L_{C_2} &\simeq Ri_{h_2,r_c,*}\mathcal{F}^{\mathrm{K}_{r_c}}R\Gamma(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), h_2.V)_{<t_1,\dots,<t_c}).\end{aligned}$$

Soient C' une double classe dans $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}'$ et $h \in C'\cap\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$. On suppose que $C_1 = C'g\mathrm{K}$ et $C_2 = C'\mathrm{K}$. Il existe donc $q_1, q_2 \in \mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\cap\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ tels que $q_1h_1 \in hg\mathrm{K}$ et $q_2h_2 \in h\mathrm{K}$, et les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} M^{\mathrm{K}'_{r_c}}(\mathbf{G}_{r_c},\mathcal{X}_{r_c}) \arrow[r, "i'_{h,r_c}"] \arrow[d, "T_{\overline{q}_1}"'] & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \arrow[d, "\overline{T}_g"'] \\ M^{\mathrm{K}_{r_c}}(\mathbf{G}_{r_c},\mathcal{X}_{r_c}) \arrow[r, "i_{h_1,r_c}"] & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M^{\mathrm{K}'_{r_c}}(\mathbf{G}_{r_c},\mathcal{X}_{r_c}) \arrow[r, "i'_{h,r_c}"] \arrow[d, "T_{\overline{q}_2}"'] & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \arrow[d, "\overline{T}_1"'] \\ M^{\mathrm{K}_{r_c}}(\mathbf{G}_{r_c},\mathcal{X}_{r_c}) \arrow[r, "i_{h_2,r_c}"] & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \end{tikzcd}$$

où $\overline{q}_1$ (resp. $\overline{q}_2$) est l'image de q_1 (resp. q_2) dans $\mathbf{G}_{r_c}(\mathbb{A}_f^p)$.

On note $v_{C'}$ la correspondance cohomologique de L_{C_1} à L_{C_2} à support dans $(\overline{T}_g, \overline{T}_1)$ image par $(i_{h_1,r_c}, i_{h_2,r_c})$ de la correspondance

$$\begin{aligned}T^*_{\overline{q}_1}i^*_{h_1,r_c}L_{C_1} &\simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_{r_c}}R\Gamma(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), q_1h_1.V)_{<t_1,\dots,<t_c})\\ &\xrightarrow{q_2^{-1}h_2^{-1}q_1h_1} \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_{r_c}}R\Gamma(\Gamma_S, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S), q_2h_2.V)_{<t_1,\dots,<t_c}) \simeq T^*_{\overline{q}_2}i^*_{h_2,r_c}L_{C_2},\end{aligned}$$

où la flèche du milieu est induite par l'isomorphisme $q_1h_1.V \xrightarrow{\sim} q_2h_2.V, v \longmapsto q_{2,\ell}^{-1}h_{2,\ell}^{-1}q_{1,\ell}h_{1,\ell}.v$.

Théorème 5.2.2. *On a*

$$u_{C_1,C_2} = [\mathrm{H}_{\ell,S} : \mathrm{H}'_{\ell,S}]\sum_{C'} v_{C'},$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

où la somme est sur les doubles classes C' dans $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}'$ telles que $C_1 = C'g\mathrm{K}$ et $C_2 = C'\mathrm{K}$.

Démonstration. On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des c-uplets $(X'_1,\dots,X'_c)$ tels que, pour tout $i\in\{1,\dots,c\}$, $X'_i\subset M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ soit de la forme $Im(i'_{b_i,r_i})$, $b_i\in\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, et, pour tout $i\in\{1,\dots,c-1\}$, $X'_{i+1}\subset\overline{X'}_i$. On construit comme plus haut une bijection $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}'\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}'$ et, pour tout $C'\in\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}'$, un complexe $L'_{C'}$, qui, si $h\in C'\cap\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, est isomorphe à

$$Ri_{h,r_c,*}\mathcal{F}^{\mathrm{K}'_{r_c}}R\Gamma(\Gamma_S,R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_S),h.V)_{<t_1,\dots,<t_c}).$$

Les morphismes $\overline{T}_g$ et $\overline{T}_1$ induisent de manière évidente des applications $\mathcal{E}'\longrightarrow\mathcal{E}$, qu'on notera encore $\overline{T}_g$ et $\overline{T}_1$. Si on identifie $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) à $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$ (resp. $\mathbf{P}_S(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_{r_c}(\mathbb{A}_f)\setminus\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}'$), $\overline{T}_g$ et $\overline{T}_1$ sont simplement les applications $C'\longmapsto C'g\mathrm{K}$ et $C'\longmapsto C'\mathrm{K}$.

D'après le lemme 5.1.4, u_{C_1,C_2} s'écrit $\sum u_{C'}$, pour C' parcourant $\overline{T}_g^{-1}(C_1)\cap\overline{T}_1^{-1}(C_2)$, où $u_{C'}$ est de la forme $\overline{T}_g^*L_{C_1}\longrightarrow L'_{C'}\longrightarrow\overline{T}_1^*L_{C_2}$. Pour voir que $u_{C'}=[\mathrm{H}_{\ell,S}:\mathrm{H}'_{\ell,S}]v_{C'}$, il suffit de raisonner par récurrence sur c comme dans la preuve de la proposition 4.2.3, en utilisant la description du lemme 5.1.4 et le corollaire de la proposition ci-dessous. □

Proposition 5.2.3. *Soient $h,h'\in\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$, $m\geq 3$ tel que p ne divise pas m et $\mathrm{K}':=\mathrm{K}_d(m)\subset g\mathrm{K}g^{-1}$, et $r\in\{0,\dots,d-1\}$. On note $i=i_{h,r}:M_1=M^{\mathrm{K}_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)\longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ (resp. $i'=i'_{h',r}:M'_1=M^{\mathrm{K}'_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r)\longrightarrow M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$). On suppose que $\overline{T}_g(i'(M'_1))=i(M_1)$, c'est-à-dire que $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h\mathrm{K}=\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h'g\mathrm{K}$. On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} M'_1 \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "d"'] & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \arrow[d, "\overline{T}_g"'] & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X}) \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, "T_g"'] \\ M_1 \arrow[r, "i"] & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}). \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

Le carré de droite est cartésien, et T_g et d sont finis étales. Alors, pour tout $L\in D^b_c(M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X}),\mathbb{Q}_\ell)$, la flèche composée

$$\begin{aligned} u:d^*i^*Rj_*L=i'^*\overline{T}_g^*Rj_*L &\xrightarrow{CB} i'^*Rj'_*T_g^*L=i'^*Rj'_*T_g^!L \\ &\xrightarrow{CB} i'^*\overline{T}_g^!Rj_*L \\ &\longrightarrow d^!i^*Rj_*L=d^*i^*Rj_*L \end{aligned}$$

(où la dernière flèche est celle définie avant le lemme 5.1.4) est égale à $[\mathrm{H}_{\ell,r}:\mathrm{H}'_{\ell,r}]id$.

Corollaire 5.2.4. *Soient $r\in\{0,\dots,d-1\}$, $h_1,h_2,h'\in\mathbf{G}(\widehat{\mathbb{Z}})$ et $g_1,g_2\in\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$. Soit $m\geq 3$ tel que p ne divise pas m et $\mathrm{K}':=\mathrm{K}_d(m)\subset g_1\mathrm{K}g_1^{-1}\cap g_2\mathrm{K}g_2^{-1}$. On suppose que $\overline{T}_{g_1}$ (resp. $\overline{T}_{g_2}$) envoie $Im(i'_{h',r})$ dans $Im(i_{h_1,r})$ (resp. $Im(i_{h_2,r})$). Il existe donc $q_1,q_2\in\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)\cap\mathbf{G}(\mathbb{A}_f^p)$ et $k_1,k_2\in\mathrm{K}$ tels que $q_1h_1=h'g_1k_1$ et*

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

$q_2h_2 = h'g_2k_2$, *et les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{array}{ccc} M^{\mathrm{K}'_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r) & \xrightarrow{i'_{h',r}} & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \\ {\scriptstyle T_{\overline{q}_1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{T}_{g_1}} \\ M^{\mathrm{K}_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r) & \xrightarrow{i_{h_1,r}} & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M^{\mathrm{K}'_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r) & \xrightarrow{i'_{h',r}} & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \\ {\scriptstyle T_{\overline{q}_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{T}_{g_2}} \\ M^{\mathrm{K}_r}(\mathbf{G}_r,\mathcal{X}_r) & \xrightarrow{i_{h_2,r}} & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \end{array}$$

où $\overline{q}_1$ *et* $\overline{q}_2$ *sont les images dans* $\mathbf{G}_r(\mathbb{A}_f^p)$ *de* q_1 *et* q_2.

Soit $V \in D^b(Rep_{\mathbf{G}(\mathbb{Q}_\ell)})$. *Alors la correspondance cohomologique*

$$v_1 : T^*_{\overline{q}_1} i^*_{h_1,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \longrightarrow T^*_{\overline{q}_2} i^*_{h_2,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V$$

définie par

$$\begin{array}{rcl} T^*_{\overline{q}_1} i^*_{h_1,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V & = & {i'_{h',r}}^*\overline{T}^*_{g_1} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & \xrightarrow{Rj_*u_{g_1,g_2}} & {i'_{h',r}}^*\overline{T}^!_{g_2} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & \longrightarrow & T^!_{\overline{q}_2} i^*_{h_2,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}(V) \\ & = & T^*_{\overline{q}_2} i^*_{h_2,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \end{array}$$

est égale à $[\mathrm{H}_{\ell,r} : \mathrm{H}'_{\ell,r}]$ *fois la correspondance*

$$v_2 : T^*_{\overline{q}_1} i^*_{h_1,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \simeq \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\Gamma_{\ell,r}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_r), q_1h_1.V))$$
$$\xrightarrow{q_2^{-1}h_2^{-1}q_1h_1} \mathcal{F}^{\mathrm{K}'_r} R\Gamma(\Gamma_{\ell,r}, R\Gamma(Lie(\mathbf{N}_r), q_2h_2.V)) \simeq T^*_{\overline{q}_2} i^*_{h_2,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V.$$

Démonstration. Notons

$$\begin{array}{rcl} \varphi_j : T^*_{\overline{q}_j} i^*_{h_j,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V & = & {i'_{h',r}}^*\overline{T}^*_{g_j} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & \xrightarrow{CB} & {i'_{h',r}}^* Rj'_* T^*_{g_j}\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & \simeq & {i'_{h',r}}^* Rj'_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}'} g_j.V \\ & \xrightarrow{g_j} & {i'_{h',r}}^* Rj'_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}'}V \end{array}$$

pour $j = 1, 2$, et

$$\begin{array}{rcl} \psi : {i'_{h',r}}^* Rj'_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}'}V & \xrightarrow{g_2^{-1}} & {i'_{h',r}}^* Rj'_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}'} g_2.V \\ & \simeq & {i'_{h',r}}^* Rj'_* T^!_{g_2}\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & \xrightarrow{CB} & {i'_{h',r}}^*\overline{T}^!_{g_2} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V \\ & \longrightarrow & T^!_{\overline{q}_2} i^*_{h_2,r} Rj_*\mathcal{F}^{\mathrm{K}}V. \end{array}$$

On a $v_1 = \psi\varphi_1$ par définition de $Rj_*u_{g_1,g_2}$, $\varphi_2 v_2 = \varphi_1$ d'après la proposition 2.2.3 et $\psi\varphi_2 = [\mathrm{H}_{\ell,r} : \mathrm{H}'_{\ell,r}]id$ d'après la proposition ci-dessus ; donc

$$v_1 = \psi\varphi_1 = \psi\varphi_2 v_2 = [\mathrm{H}_{\ell,r} : \mathrm{H}'_{\ell,r}]v_2.$$

□

Démonstration de la proposition. On peut supposer que $g = 1$, et on le fera pour simplifier les notations.

Comme $\overline{T}_1$ est un morphisme fini entre schémas normaux, on dispose d'un morphisme fonctoriel trace $Tr_{\overline{T}_1} : \overline{T}_{1*}\overline{T}_1^* \longrightarrow id$ (SGA XVII 6.2.5 et 6.2.6). On notera encore $Tr_{\overline{T}_1}$ le morphisme fonctoriel $\overline{T}_1^* \longrightarrow \overline{T}_1^!$ qui s'en déduit par adjonction.

D'après le lemme 5.1.2, le morphisme

$$\overline{T}_1^* Rj_*L \xrightarrow{CB} Rj'_*T_1^*L = Rj'_*T_1^!L \xrightarrow{CB} \overline{T}_1^! Rj_*L$$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

est égal à

$$Tr_{\overline{T}_1} : \overline{T}_1^* Rj_*L \longrightarrow \overline{T}_1^! Rj_*L.$$

Soit $Z = (M_1 \times_{M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*} M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*)_{red}$ (c'est l'union disjointe des strates $Im(i'_{b,r})$ de $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ au-dessus de M_1). On a un diagramme commutatif dont le carré du bas est cartésien aux nilpotents près

$$\begin{tikzcd}
M'_1 \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "i'"] \arrow[ddr, "d"'] & & \\
& Z \arrow[r, "I"] \arrow[d, "c"] & M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^* \arrow[d, "\overline{T}_1"] \\
& M_1 \arrow[r, "i"'] & M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*
\end{tikzcd}$$

où c est fini étale et k est une immersion ouverte.

Notons n_T la pondération de $\overline{T}_1$ définie dans SGA XVII 6.2.6 : si x' est un point géométrique de $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ d'image x dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, et si $K_{x'}$ (resp. K_x) est le corps des fractions de l'anneau strictement local de $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ en x' (resp. de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ en x), alors $n_T(x') = [K_{x'} : K_x]$. En particulier, si l'image de x' est dans $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})$, alors $n_T(x') = 1$ (puisque T_1 est étale). Pour tout point géométrique x de $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})$, on a donc

$$(+) \qquad \sum_{x' \in \overline{T}_1^{-1}(x)} n_T(x') = deg(T_1) = [\mathrm{K} : \mathrm{K}'].$$

n_T donne par changement de base une pondération de c, d'où des morphismes trace $Tr_c : c_*c^* \longrightarrow id$ et $Tr_c : c^* \longrightarrow c^!$. D'après la compatibilité aux changements de base du morphisme trace, le morphisme fonctoriel

$$c^*i^* = I^*\overline{T}_1^* \xrightarrow{I^*Tr_{\overline{T}_1}} I^*\overline{T}_1^! \longrightarrow c^!i^*$$

est égal au morphisme $Tr_c : c^*i^* \longrightarrow c^!i^*$; donc l'endomorphisme u de $d^*i^*Rj_*L$ qu'on veut calculer est égal au morphisme

$$d^*i^*Rj_*L = k^*c^*i^*Rj_*L \xrightarrow{Tr_c} k^*c^!i^*Rj_*L = d^*i^*Rj_*L.$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que si x' est un point géométrique de $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ qui se factorise par $i' : M'_1 \longrightarrow M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$, alors $n_T(x') = [\mathrm{H}_{\ell,r} : \mathrm{H}'_{\ell,r}]$.

Soit x' un tel point. Son image x dans $M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ se factorise évidemment par $i : M_1 \longrightarrow M^{\mathrm{K}}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$. D'après la propriété SGA XVII 6.2.4 (*) des pondérations et l'égalité (+) ci-dessus, on a

$$\sum_{x'' \in \overline{T}_1^{-1}(x)} n_T(x'') = [\mathrm{K} : \mathrm{K}'].$$

Or le groupe K/K' agit transitivement sur $\overline{T}_1^{-1}(x)$; donc les $n_T(x'')$, $x'' \in \overline{T}^{-1}(x)$, sont tous égaux. On en déduit que $n_T(x') = [\mathrm{K} : \mathrm{K}']/card(\overline{T}_1^{-1}(x))$.

Il reste à calculer $card(\overline{T}_1^{-1}(x))$. Notons N le nombre de strates de $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G},\mathcal{X})^*$ de la forme $Im(i'_{b,r})$ qui sont envoyées sur M_1 par $\overline{T}_1$. Comme on a $Im(i'_{b_1,r}) =$

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

$Im(i'_{b_2,r})$ si et seulement si $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)b_1\mathrm{K}' = \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)b_2\mathrm{K}'$, N est égal au cardinal de la fibre en $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f)h\mathrm{K}$ de l'application évidente $\mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}' \longrightarrow \mathbf{P}_r(\mathbb{Q})\mathbf{Q}_r(\mathbb{A}_f) \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/\mathrm{K}$, c'est-à-dire à $[\mathrm{K} : \mathrm{K}']/[\mathrm{H}_r : \mathrm{H}'_r]$. Comme chaque strate $Im(i'_{b,r})$ de $M^{\mathrm{K}'}(\mathbf{G}, \mathcal{X})^*$ qui s'envoie sur M_1 a $[\mathrm{K}_r : \mathrm{K}'_r]$ points géométriques au-dessus de x, on trouve finalement

$$card(\overline{T}_1^{-1}(x)) = [\mathrm{K}_r : \mathrm{K}'_r]\frac{[\mathrm{K} : \mathrm{K}']}{[\mathrm{H}_r : \mathrm{H}'_r]} = \frac{[\mathrm{K} : \mathrm{K}']}{[\mathrm{H}_{\ell,r} : \mathrm{H}'_{\ell,r}]},$$

ce qui finit la preuve. □

Références

[AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport et Y.Tai, *Smooth compactification of locally symmetric spaces*, Lie groups : History, frontiers and applications vol. 4, 1975. MR0457437 (56:15642)

[BB] W. Baily et A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Ann. of Math. (2) 84 (1966), 442-528. MR0216035 (35:6870)

[B] A. Beilinson, *On the derived category of perverse sheaves*, dans *K-theory, Arithmetic and Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1289, Springer, 1987, 27-41. MR0923133 (89b:14027)

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I)*, Astérisque 100, 1982. MR0751965 (85i:32001a)

[BL] J.-L. Brylinski et J.-P. Labesse, *Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura*, Ann. Scient. de l'ÉNS, 4ième série, tome 17 (1984), 361-412. MR0777375 (86i:11026)

[CF] C.-L. Chai et G. Faltings, *Degenerations of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 22, Springer, 1980. MR1083353 (92d:14036)

[D] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II.*, Publications Mathématiques de l'IHES 52, 1981, 137-251. MR0601520 (83c:14017)

[F] K. Fujiwara, *Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture*, Invent. Math. 127 (1997), 489-533. MR1431137 (99c:14030)

[GHM] M. Goresky, G. Harder et R. MacPherson, *Weighted cohomology*, Invent. Math. 166 (1994), 139-213. MR1253192 (95c:11068)

[K] R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, Journal of the AMS, Vol. 5, n°2 (1992), 373-444. MR1124982 (93a:11053)

[KR] R. Kottwitz et M. Rapoport, *Contribution of the points at the boundary*, dans [LR], 111-150. MR1155228 (93e:11070a)

[L] R. Langlands, *Modular forms and ℓ-adic representations*, dans *Modular Functions of One Variable II*, Lecture Notes in Mathematics 349, Springer, 1972, 361-500. MR0354617 (50:7095)

[Le] M. Levine, *Tate motives and the vanishing conjectures for algebraic K-theory*, dans *Algebraic K-theory and Algebraic Topology* (Lake Louise, AB, 1991), pp. 167–188, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 407 (1993). MR1367296 (97e:19008)

[LR] R. Langlands et D. Ramakrishnan (éditeurs), *The zeta function of Picard modular surfaces*, publications du CRM, Montréal, 1992. MR1155223 (92m:14001)

[LR2] E. Looijenga et M. Rapoport, *Weights in the local cohomology of a Baily-Borel compactification*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 53, 1991, 223-260. MR1141203 (93b:14022)

[M] S. Morel, *Complexes d'intersection des compactifications de Baily-Borel : Le cas des groupes unitaires sur* $\mathbb{Q}$, thèse de doctorat de l'université Paris-Sud, 2005.

[P1] R. Pink, *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, thèse, Bonner Mathematische Schriften 209, 1989. MR1128753 (92h:11054)

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use

[P2] R. Pink, *On ℓ-adic sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily-Borel compactification*, Math. Ann. 292 (1992), 197-240. MR1149032 (93c:11042)

[P3] R. Pink, *On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne*, Annals of Math., 135 (1992), 483-525. MR1166642 (93m:14017)

[R] M. Rapoport, *On the shape of the contribution of a fixed point on the boundary : The case of $\mathbb{Q}$-rank one*, dans [LR], pp. 479-488, avec un appendice de L. Saper et M. Stern, 489-491. MR1155239 (93e:11070b)

[S] M. Saito, *Mixed Hodge Modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), 221-333. MR1047415 (91m:14014)

[V] Y. Varshavsky, *Lefschetz-Verdier trace formula and a generalization of a theorem of Fujiwara*, preprint, arXiv:math.AG/0505564

Laboratoire de mathématique, Université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

E-mail address: sophie.morel@math.u-psud.fr

Current address: After September 1, 2006: School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540

License or copyright restrictions may apply to redistribution; see https://www.ams.org/journal-terms-of-use