

CHTOUCAS POUR LES GROUPES RÉDUCTIFS ET PARAMÉTRISATION DE LANGLANDS GLOBALE

VINCENT LAFFORGUE

SOMMAIRE

Introduction	719
1. Champs de Hecke, grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld, et équivalence de Satake géométrique	756
2. Champs de G -chtoucas	766
3. Morphismes de Frobenius partiels	776
4. Faisceaux de cohomologie et coalescence des pattes	778
5. Morphismes de création et d’annihilation	784
6. Morphismes de Frobenius partiels, coalescence des pattes et opérateurs de Hecke	786
7. Relations d’Eichler-Shimura	813
8. Sous-faisceaux constructibles stables par les morphismes de Frobenius partiels	818
9. Opérateurs d’excursion	837
10. Propriétés des opérateurs d’excursion	842
11. Décomposition suivant les paramètres de Langlands	849
12. Cas des groupes non nécessairement déployés	856
13. Résultats à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}_\ell}$	873
14. Indications sur le cas des groupes métaplectiques	876
15. Lien avec le programme de Langlands géométrique	879
16. Cas de GL_r	881
Remerciements	884
Bibliographie	884

INTRODUCTION

Soit \mathbb{F}_q un corps fini et ℓ un nombre premier ne divisant pas q . Soit X une courbe projective lisse géométriquement irréductible sur \mathbb{F}_q et F son corps de fonctions. Soit G un groupe réductif connexe sur F .

On montre dans cet article le sens “automorphe vers Galois” de la correspondance de Langlands globale pour G [Lan70]. En fait on construit une décomposition *canonique* de l’espace des formes automorphes cuspidales pour G à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ (ou plus précisément, lorsque G n’est pas déployé, d’une somme, indexée par

Received by the editors December 13, 2012, and, in revised form, October 15, 2013, September 19, 2015, August 11, 2017, December 20, 2017, and January 5, 2018.

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14G35, 14H60, 11F70.

L’auteur fait partie de l’ANR-13-BS01-0001-01.

$\ker^1(F, G)$, des espaces de formes automorphes cuspidales pour des formes intérieures de G). Cette décomposition canonique est indexée par les paramètres de Langlands globaux ℓ -adiques.

On n'obtient pas de résultat nouveau dans le cas où $G = GL_r$ puisque tout était déjà connu par Drinfeld [Dri80, Dri87a, Dri88, Dri87b] pour $r = 2$ et Laurent Lafforgue [Laf02a] pour r arbitraire (voir la section 16 pour le cas de GL_r).

Cet article est totalement indépendant de la formule des traces d'Arthur-Selberg. Il utilise les deux ingrédients suivants :

- les champs classifiants de chtoucas, introduits par Drinfeld pour GL_r [Dri80, Dri87a] et généralisés à tous les groupes réductifs par Varshavsky [Var04],
- l'équivalence de Satake géométrique de Lusztig, Drinfeld, Ginzburg, et Mirkovic–Vilonen [Lus83, Gin95, BD99, MV07].

Pour énoncer le théorème principal on suppose que G est déployé. On note \widehat{G} le groupe dual de Langlands de G , considéré comme un groupe déployé sur \mathbb{Q}_ℓ . Ses racines et ses poids sont les coracines et les copoids de G , et vice-versa (voir [Bor79] pour plus de détails).

Pour des raisons topologiques on doit travailler avec des extensions finies de \mathbb{Q}_ℓ au lieu de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ contenant une racine carrée de q et \mathcal{O}_E son anneau d'entiers.

Soit v une place de X . On note \mathcal{O}_v l'anneau local complété en v et F_v son corps de fractions. On a l'isomorphisme de Satake $[V] \mapsto h_{V,v}$ de l'anneau des représentations (de dimension finie) de \widehat{G} à coefficients dans E vers l'algèbre de Hecke $C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v), E)$ (voir [Sat63, Car79, Gro98]). En fait les $h_{V,v}$ pour V irréductible forment une base sur \mathcal{O}_E de $C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v), \mathcal{O}_E)$. On note $\mathbb{A} = \prod'_{v \in |X|} F_v$ l'anneau des adèles de F et $\mathbb{O} = \prod_{v \in |X|} \mathcal{O}_v$. Soit N un sous-schéma fini de X . On note \mathcal{O}_N l'anneau des fonctions sur N , et

$$(0.1) \quad K_N = \text{Ker}(G(\mathbb{O}) \rightarrow G(\mathcal{O}_N))$$

le sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A})$ associé au niveau N . On fixe un réseau $\Xi \subset Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$ (où Z est le centre de G). Une fonction $f \in C_c(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E)$ est dite cuspidale si pour tout parabolique $P \subsetneq G$, de Levi M et de radical unipotent U , le terme constant $f_P : g \mapsto \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} f(ug)$ est nul comme fonction sur $U(\mathbb{A})M(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi$. On rappelle que le E -espace vectoriel $C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E)$ des formes automorphes cuspidales est de dimension finie. Il est muni d'une structure de module sur l'algèbre de Hecke $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$: on convient que la fonction caractéristique de K_N est une unité et agit par l'identité et pour $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$ on note

$$T(f) \in \text{End}(C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E))$$

l'opérateur de Hecke correspondant.

0.1. Énoncé du théorème principal. On construira les opérateurs suivants, dits "d'excursion". Soient I un ensemble fini, f une fonction sur $\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G}$ (quotient grossier de $(\widehat{G})^I$ par les translations à gauche et à droite par \widehat{G} diagonal), et $(\gamma_i)_{i \in I} \in (\text{Gal}(\overline{F}/F))^I$. On construira l'opérateur d'excursion

$$S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}} \in \text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)}(C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E)).$$

On montrera que ces opérateurs engendrent une sous-algèbre commutative \mathcal{B} .

On ne sait pas si \mathcal{B} est réduite mais par décomposition spectrale on obtient néanmoins une décomposition canonique

$$(0.2) \quad \overline{C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})} = \bigoplus_{\nu} \mathfrak{H}_\nu$$

où la somme directe dans le membre de droite est indexée par des caractères ν de \mathcal{B} , et où \mathfrak{H}_ν est l'espace propre généralisé (ou "espace caractéristique") associé à ν . On montrera ensuite qu'à tout caractère ν de \mathcal{B} correspond un *unique* paramètre de Langlands σ (au sens du théorème suivant), caractérisé par (0.4) ci-dessous. En posant $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{H}_\nu$, on en déduira le théorème suivant.

Théorème 0.1 (Théorème 11.11). *On possède une décomposition canonique de $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ -modules*

$$(0.3) \quad \overline{C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma,$$

où la somme directe dans le membre de droite est indexée par des paramètres de Langlands globaux, c'est-à-dire des classes de $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ -conjugaison de morphismes $\sigma : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ définis sur une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ , continus, semi-simples et non ramifiés en dehors de N .

Cette décomposition est caractérisée par la propriété suivante : \mathfrak{H}_σ est égal à l'espace propre généralisé \mathfrak{H}_ν associé au caractère ν de \mathcal{B} défini par

$$(0.4) \quad \nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i \in I}).$$

Elle est compatible avec l'isomorphisme de Satake en toute place v de $X \setminus N$, c'est-à-dire que pour toute représentation irréductible V de \widehat{G} , $T(h_{V,v})$ agit sur \mathfrak{H}_σ par multiplication par le scalaire $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$, où χ_V est le caractère de V et Frob_v est un relèvement arbitraire d'un élément de Frobenius en v . Elle est aussi compatible avec la limite sur N .

La compatibilité avec l'isomorphisme de Satake en les places de $X \setminus N$ montre que ce théorème réalise la "correspondance" de Langlands globale dans le sens "automorphe vers Galois".

Dans la section 12 on traitera le cas des groupes réductifs non nécessairement déployés et on prouvera le théorème 12.3 qui est similaire au théorème ci-dessus, à part que le membre de gauche est remplacé par une somme directe indexée par $\ker^1(F, G)$ d'espaces de formes automorphes cuspidales pour des formes intérieures de G , et les paramètres de Langlands σ sont définis à l'aide du L -groupe.

Les paragraphes 12.1 et 12.2, qui peuvent être lus en complément de cette introduction, contiennent les énoncés dans le cas non déployé, ainsi que les deux conjectures suivantes. La conjecture 12.7 affirme que les paramètres de Langlands intervenant dans la décomposition (0.3) (ou la décomposition analogue dans le cas non déployé) proviennent de paramètres d'Arthur elliptiques. D'autre part la conjecture 12.12 affirme que cette décomposition est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et est indépendante de ℓ .

La section 13 montre que la décomposition (0.3) existe aussi à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}_\ell}$. La section 14 indique comment adapter ces méthodes au cas métaplectique.

Dans le cas où $G = GL_r$ les théorèmes inverses [CPS94] et la formule du produit de Laumon [Lau87] fournissent, par récurrence, le sens “Galois vers automorphe” (voir [Laf02a] ainsi que la section 16). Pour G quelconque, les conjectures de Langlands consistent plutôt en

- une paramétrisation, obtenue dans le théorème ci-dessus,
- des formules de multiplicités d’Arthur pour les \mathfrak{H}_σ , que nous ne savons pas calculer avec les méthodes de cet article.

Dans un article avec Alain Genestier [GL17], nous montrons la paramétrisation de Langlands locale et la compatibilité local-global.

Dans les paragraphes 0.2 à 0.6 nous esquissons la preuve du théorème 0.1.

0.2. Chtoucas de Drinfeld pour les groupes réductifs, d’après Varshavsky.

La preuve repose sur le fait que les champs de chtoucas, qui jouent un rôle analogue aux variétés de Shimura sur les corps de nombres, existent dans une généralité beaucoup plus grande. En effet, alors que les variétés de Shimura sont définies sur un ouvert du spectre d’un anneau d’entiers d’un corps de nombres et sont associées à *un copoids minuscule* du groupe dual, on possède pour tout ensemble fini I , pour tout niveau N et pour toute représentation irréductible W de $(\widehat{G})^I$ un champ de chtoucas $\text{Cht}_{N,I,W}$ qui est défini sur $(X \setminus N)^I$.

Les chtoucas ont été introduits par Drinfeld [Dri80, Dri87a] pour GL_r (et $I = \{1, 2\}$, $W = \text{St} \otimes \text{St}^*$) et généralisés aux groupes réductifs (et aux copoids arbitraires) par Varshavsky dans [Var04] (entre-temps le cas des algèbres à division a été étudié par Laumon-Rapoport-Stuhler, Laurent Lafforgue, Ngô Bao Châu et Eike Lau, et des copoids arbitraires introduits simultanément par Ngô Bao Châu et Eike Lau, voir les références dans le paragraphe 0.8).

Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ contenant une racine carrée de q . On note \mathcal{O}_E son anneau d’entiers.

Soit I un ensemble fini et W une représentation E -linéaire irréductible de $(\widehat{G})^I$. On écrit $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$ où W_i est une représentation irréductible de \widehat{G} . Le champ $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ classifiant les G -chtoucas avec structure de niveau N , a été étudié dans [Var04]. Contrairement à [Var04] nous imposons dans la définition suivante qu’il soit réduit (bien sûr cela ne change rien pour la cohomologie étale).

Notation. Pour tout schéma S sur \mathbb{F}_q et pour tout G -torseur \mathcal{G} sur $X \times S$ on note ${}^\tau \mathcal{G} = (\text{Id}_X \times \text{Frob}_S)^*(\mathcal{G})$.

Définition 0.2. On définit $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ comme le champ de Deligne-Mumford *réduit* dont les points sur un schéma S sur \mathbb{F}_q classifient

- des points $(x_i)_{i \in I} : S \rightarrow (X \setminus N)^I$,
- un G -torseur \mathcal{G} sur $X \times S$,
- un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} {}^\tau \mathcal{G}|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I} \Gamma_{x_i})}$$

où Γ_{x_i} désigne le graphe de x_i , tel que la position relative en x_i soit bornée par le copoids dominant de G correspondant au poids dominant ω_i de W_i ,

- une trivialisations de (\mathcal{G}, ϕ) sur $N \times S$.

Pour que la condition bornant les positions relatives soit définie sans ambiguïté on demande que $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ soit réduit et égal à l’adhérence de Zariski de son intersection avec l’ouvert où les x_i sont deux à deux distincts.

Cette définition sera généralisée dans la définition 0.6 ci-dessous.

On note $\text{Cht}_{I,W}^{(I)}$ lorsque N est vide et on remarque que $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ est un $G(\mathcal{O}_N)$ -torseur sur $\text{Cht}_{I,W}^{(I)}|_{(X \setminus N)^I}$.

Remarque 0.3. Les lecteurs connaissant le programme de Langlands géométrique noteront que $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ est l'intersection d'un champ de Hecke (considéré comme une correspondance entre $\text{Bun}_{G,N}$ et lui-même) avec le graphe du morphisme de Frobenius de $\text{Bun}_{G,N}$.

Les x_i seront appelés les pattes du chtouca. On notera

$$\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I)} : \text{Cht}_{N,I,W}^{(I)} \rightarrow (X \setminus N)^I$$

le morphisme correspondant.

Pour tout copoids dominant μ de G^{ad} on note $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu}$ l'ouvert de $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ défini par la condition que le polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{G} (ou plutôt, pour être précis, du G^{ad} -torseur associé) est $\leq \mu$. On fixe un réseau $\Xi \subset Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$. Alors Ξ s'envoie dans $\text{Bun}_{Z,N}(\mathbb{F}_q)$ qui agit sur $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ par torsion, et préserve les ouverts $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu}$. On montrera que $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} / \Xi$ est un champ de Deligne-Mumford de type fini. On note $\text{IC}_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} / \Xi}$ le faisceau d'intersection de $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} / \Xi$ à coefficients dans E , normalisé relativement à $(X \setminus N)^I$. On note

$$\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} : \text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} / \Xi \rightarrow (X \setminus N)^I$$

le morphisme déduit de $\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I)}$ par restriction à $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu}$ et quotient par Ξ .

La définition suivante sera rendue plus canonique dans la définition 0.11.

Définition 0.4. On pose

$$\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} = R^0(\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu})_! \left(\text{IC}_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} / \Xi} \right).$$

Dans le membre de droite le faisceau d'intersection est à coefficients dans E et la cohomologie est prise au sens de [LMB00, LO08a, LO08b]. En fait la cohomologie étale des schémas suffirait (en effet, dès que le degré de N est suffisamment grand en fonction de μ , $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu} / \Xi$ est un schéma de type fini).

Bien sûr $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ dépend de Ξ mais on omet Ξ de la notation pour raccourcir un peu.

Quand I est vide et $W = \mathbf{1}$, on a

$$(0.5) \quad \lim_{\mu} \mathcal{H}_{N, \emptyset, \mathbf{1}}^{0, \leq \mu, E} |_{\mathbb{F}_q} = C_c(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E)$$

car $\text{Cht}_{N, \emptyset, \mathbf{1}}$ est le champ discret $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$, considéré comme un champ constant sur \mathbb{F}_q , et par ailleurs $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) = G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N$. On utilise ici l'hypothèse que G est déployé, en général $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ est une réunion finie de quotients adéliques pour des formes intérieures de G , comme on le verra dans la section 12 (pous plus de détails on renvoie le lecteur aux remarques 8.21 et 12.2).

Remarque 0.5. Plus généralement pour tout I et $W = \mathbf{1}$, le champ $\text{Cht}_{N,I, \mathbf{1}}^{(I)} / \Xi$ est simplement le champ constant $G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi$ sur $(X \setminus N)^I$.

On considère $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}$ comme un système inductif de E -faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^I$. On va introduire maintenant les actions des morphismes de Frobenius partiels et des opérateurs de Hecke sur ce système inductif (on notera que ces actions augmentent μ). Pour toute partie $J \subset I$ on note

$$\text{Frob}_J : (X \setminus N)^I \rightarrow (X \setminus N)^I$$

le morphisme qui à $(x_i)_{i \in I}$ associe $(x'_i)_{i \in I}$ avec

$$x'_i = \text{Frob}(x_i) \text{ si } i \in J \text{ et } x'_i = x_i \text{ sinon.}$$

Alors on possède

- pour κ assez grand en fonction de W , pour tout $i \in I$ et pour tout μ , un morphisme

$$(0.6) \quad F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^* (\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}) \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E}$$

de faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^I$, de sorte que les $F_{\{i\}}$ commutent entre eux et que leur produit pour $i \in I$ est l'action naturelle du morphisme de Frobenius total de $(X \setminus N)^I$ sur le faisceau $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}$,

- pour tout $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$, pour κ assez grand en fonction de W et de f , et pour tout μ , un morphisme

$$(0.7) \quad T(f) : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus \mathfrak{P})^I} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E} \Big|_{(X \setminus \mathfrak{P})^I}$$

de faisceaux constructibles sur $(X \setminus \mathfrak{P})^I$ où \mathfrak{P} est un ensemble fini de places contenant $|N|$ et en dehors duquel f est triviale.

Les morphismes $T(f)$ sont appelés des “opérateurs de Hecke” bien que ce soient des morphismes de faisceaux. Ils sont obtenus grâce à la construction, assez évidente, de correspondances de Hecke entre les champs de chtoucas. On verra après la proposition 0.16 que $T(f)$ peut être étendu naturellement en un morphisme de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$, mais cela n’est pas trivial. Bien sûr lorsque $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$, les morphismes $T(f)$ sont les opérateurs de Hecke habituels sur (0.5).

Pour construire les actions (0.6) des morphismes de Frobenius partiels, on a besoin d’une petite généralisation des champs $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$ où l’on demande une factorisation de ϕ en une suite de plusieurs modifications. Soit (I_1, \dots, I_k) une partition (ordonnée) de I . Comme précédemment $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$ est une représentation irréductible de $(\widehat{G})^I$.

Définition 0.6. On définit $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme le champ de Deligne-Mumford *réduit* dont les points sur un schéma S sur \mathbb{F}_q classifient les données

$$(0.8) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0))$$

avec

- $x_i \in (X \setminus N)(S)$ pour $i \in I$,
- pour $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $(\mathcal{G}_i, \psi_i) \in \text{Bun}_{G,N}(S)$ (c’est-à-dire que \mathcal{G}_i est un G -torseur sur $X \times S$ et $\psi_i : \mathcal{G}_i|_{N \times S} \xrightarrow{\sim} G|_{N \times S}$ est une trivialisatıon au-dessus de $N \times S$) et on note $(\mathcal{G}_k, \psi_k) = (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)$,

- pour $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\phi_j : \mathcal{G}_{j-1}|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})}$$

est un isomorphisme tel que la position relative de \mathcal{G}_{j-1} par rapport à \mathcal{G}_j en x_i (pour $i \in I_j$) soit bornée par le copoids dominant de G correspondant au poids dominant de W_i ,

- les ϕ_j , qui induisent des isomorphismes sur $N \times S$, respectent les structures de niveau, c'est-à-dire que $\psi_j \circ \phi_j|_{N \times S} = \psi_{j-1}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$.

On note $\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ l'ind-champ obtenu en oubliant la condition sur les positions relatives.

De plus on note $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ l'ouvert de $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ défini par la condition que le polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{G}_0 est $\leq \mu$. On note

$$\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow (X \setminus N)^I$$

le morphisme qui à un chtouca associe la famille de ses pattes.

Exemple. Lorsque $G = GL_r$, $I = \{1, 2\}$ et $W = \text{St} \boxtimes \text{St}^*$, les champs $\text{Cht}_{N,I,W}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$, *resp.* $\text{Cht}_{N,I,W}^{\{\{2\}, \{1\}\}}$ sont les champs de chtoucas à gauche, *resp.* à droite introduits par Drinfeld [Dri87a] (et utilisés dans [Laf02a]), et x_1 et x_2 sont le zéro et le pôle.

On construit maintenant un morphisme lisse (0.12) de $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ vers le quotient d'une strate fermée d'une grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld par un schéma en groupes lisse. Les lecteurs familiers avec les variétés de Shimura peuvent considérer ce morphisme comme un "modèle local" à condition de noter

- que l'on est dans une situation de bonne réduction puisque les x_i appartiennent à $X \setminus N$,
- et que pourtant ce modèle local n'est pas lisse (sauf si tous les I_j sont des singletons et tous les copoids sont minuscules).

Définition 0.7. La grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld est l'ind-schéma $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur X^I dont les S -points classifient la donnée de

$$(0.9) \quad ((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{G}_{k-1} \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \xrightarrow{\theta} G_{X \times S})$$

où les \mathcal{G}_i sont des G -torseurs sur $X \times S$, ϕ_i est un isomorphisme sur $(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})$ et θ est une trivialisation de \mathcal{G}_k . La strate fermée $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est le sous-schéma fermé réduit de $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ défini par la condition que la position relative de \mathcal{G}_{j-1} par rapport à \mathcal{G}_j en x_i (pour $i \in I_j$) est bornée par le copoids dominant de G correspondant au poids dominant ω_i de W_i . Plus précisément au-dessus de l'ouvert \mathcal{U} de X^I où les x_i sont deux à deux distincts, $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ est un produit de grassmanniennes affines usuelles et

- on définit la restriction de $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ au-dessus de \mathcal{U} comme le produit des strates fermées habituelles (notées $\overline{\text{Gr}}_{\omega_i}$ dans [MV07, BG02] où ω_i est le plus haut poids de W_i),
- puis on définit $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme l'adhérence de Zariski (dans $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$) de sa restriction au-dessus de \mathcal{U} .

D'après Beauville-Laszlo [BL95] (voir aussi le premier chapitre pour des références complémentaires dans [BD99]), $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ peut aussi être défini comme l'ind-schéma dont les S -points classifient

$$(0.10) \quad ((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{G}_{k-1} \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \xrightarrow{\theta} G_{\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}})$$

où les \mathcal{G}_i sont des G -torseurs sur le voisinage formel $\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}$ de la réunion des graphes des x_i dans $X \times S$, ϕ_i est un isomorphisme sur $\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}} \setminus (\bigcup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})$ et θ est une trivialisaton de \mathcal{G}_k . La restriction à la Weil $G_{\Sigma_{\infty x_i}}$ de G de $\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}$ à S agit donc sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ par changement de la trivialisaton θ .

On a un morphisme naturel

$$(0.11) \quad \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma_{\infty x_i}}$$

qui associe à un chtouca (0.8) le $G_{\Sigma_{\infty x_i}}$ -torseur $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}}$ et, pour toute trivialisaton θ de celui-ci, le point de $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ égal à (0.10).

Remarque 0.8. La meilleure façon d'énoncer la condition sur les positions relatives dans la définition 0.6 est de définir $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme l'image inverse de $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma_{\infty x_i}}$ par le morphisme $\mathrm{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma_{\infty x_i}}$ construit comme (0.11).

Pour $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ on note $\Gamma_{\Sigma_{n_i x_i}}$ le sous-schéma fermé de $X \times S$ associé au diviseur de Cartier $\sum n_i x_i$ qui est effectif et relatif sur S . On note $G_{\Sigma_{n_i x_i}}$ le schéma en groupes lisse sur S obtenu par restriction à la Weil de G de $\Gamma_{\Sigma_{n_i x_i}}$ à S . Alors si les entiers n_i sont assez grands en fonction de W , l'action de $G_{\Sigma_{\infty x_i}}$ sur $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ se factorise par $G_{\Sigma_{n_i x_i}}$. Le morphisme (0.11) fournit donc un morphisme

$$(0.12) \quad \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\Sigma_{n_i x_i}}$$

(qui associe à un chtouca (0.8) le $G_{\Sigma_{n_i x_i}}$ -torseur $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\Sigma_{n_i x_i}}}$ et, pour toute trivialisaton λ de celui-ci, le point de $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ égal à (0.10) pour toute trivialisaton θ de $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}}$ prolongeant λ de $\Gamma_{\Sigma_{n_i x_i}}$ à $\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}$).

On montrera dans la proposition 2.8 que le morphisme (0.12) est lisse de dimension $\dim G_{\Sigma_{n_i x_i}} = (\sum_{i \in I} n_i) \dim G$ (l'idée est la suivante : il suffit de le montrer dans le cas où N est vide et alors cela résulte facilement du fait que le morphisme de Frobenius de Bun_G a une dérivée nulle).

On en déduit que le morphisme d'oubli des modifications intermédiaires

$$(0.13) \quad \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$$

$$\text{qui envoie (0.8) sur } ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_k \cdots \phi_1} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0))$$

est petit. En effet il est connu que le morphisme analogue

$$(0.14) \quad \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I)} \text{ qui envoie (0.10) sur } ((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_k \cdots \phi_1} \mathcal{G}_k \xrightarrow{\theta} G_{\Gamma_{\Sigma_{\infty x_i}}})$$

est petit, et d'ailleurs cela joue un rôle essentiel dans [MV07]. De plus l'image inverse de $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I), \leq \mu}$ par (0.13) est exactement $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ puisque les troncutures

ont été définies à l'aide du polygône de Harder-Narasimhan de \mathcal{G}_0 . On a donc

$$\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} = R^0(\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu})! \left(\text{IC}_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}} / \Xi \right)$$

pour toute partition (I_1, \dots, I_k) de I (alors que la définition 0.4 utilisait la partition grossière (I)).

Le morphisme de Frobenius partiel

$$\text{Fr}_{I_1}^{(I_1,\dots,I_k)} : \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)} \rightarrow \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_2,\dots,I_k,I_1)},$$

défini par

$$\begin{aligned} \text{Fr}_{I_1}^{(I_1,\dots,I_k)} & \left((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \right) \\ & = \left(\text{Frob}_{I_1} \left((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} (\mathcal{G}_2, \psi_2) \xrightarrow{\phi_3} \dots \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \right) \xrightarrow{\tau \phi_1} (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \right) \end{aligned}$$

est au-dessus du morphisme $\text{Frob}_{I_1} : (X \setminus N)^I \rightarrow (X \setminus N)^I$. Comme $\text{Fr}_{I_1}^{(I_1,\dots,I_k)}$ est un homéomorphisme local totalement radiciel, on a un isomorphisme canonique

$$\left(\text{Fr}_{I_1}^{(I_1,\dots,I_k)} \right)^* \left(\text{IC}_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_2,\dots,I_k,I_1)}} \right) = \text{IC}_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}}.$$

L'isomorphisme de changement de base propre fournit alors un morphisme

$$F_{I_1} : \text{Frob}_{I_1}^* \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \right) \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E}$$

pour κ assez grand (en effet, dans les notations ci-dessus, si le polygône de Harder-Narasimhan de \mathcal{G}_1 est $\leq \mu$, comme la modification entre \mathcal{G}_0 et \mathcal{G}_1 est bornée en fonction de W , le polygône de Harder-Narasimhan de \mathcal{G}_0 est $\leq \mu + \kappa$ où κ dépend de W). En prenant n'importe quelle partition (I_1, \dots, I_k) telle que $I_1 = \{i\}$ on obtient $F_{\{i\}}$ dans (0.6).

Pour l'instant on a défini $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}$ pour les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles W de $(\widehat{G})^I$. On va raffiner cette construction en celle *canonique* d'un *foncteur* E -linéaire

$$(0.15) \quad W \mapsto \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}$$

de la catégorie des représentations E -linéaires de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des E -faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^I$. En particulier pour tout morphisme $u : W \rightarrow W'$ de représentations E -linéaires de $(\widehat{G})^I$ on notera

$$\mathcal{H}(u) : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W'}^{0,\leq\mu,E}$$

le morphisme de faisceaux constructibles associé.

Le foncteur (0.15) sera compatible à la coalescence des pattes, au sens suivant. Dans tout cet article nous appelons coalescence la situation où des pattes fusionnent entre elles. Nous aurions pu employer le mot fusion plutôt que coalescence mais nous avons préféré utiliser le mot coalescence pour les pattes (qui ne sont que des points sur la courbe) en gardant le mot fusion pour le produit de fusion (qui intervient dans l'équivalence de Satake géométrique et concerne les faisceaux pervers sur les grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld). Soit $\zeta : I \rightarrow J$ une application. On note W^ζ la représentation de \widehat{G}^J qui est la composée de la représentation W avec le morphisme diagonal

$$\widehat{G}^J \rightarrow \widehat{G}^I, (g_j)_{j \in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i \in I}.$$

On note

$$(0.16) \quad \Delta_\zeta : X^J \rightarrow X^I, (x_j)_{j \in J} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i \in I}$$

le morphisme diagonal. On va construire, d'après [Var04] et [BV06] un isomorphisme de faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^J$, dit de *coalescence*:

$$(0.17) \quad \chi_\zeta : \Delta_\zeta^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{N,J,W\zeta}^{0,\leq\mu,E}.$$

Cet isomorphisme sera *canonique*, au sens où ce sera un isomorphisme de foncteurs en W , compatible à la composition de ζ .

On explique maintenant la construction du foncteur (0.15) et de l'isomorphisme de coalescence (0.17).

Lorsque W n'est pas irréductible on note $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}$ la réunion des $\mathrm{Gr}_{I,V}^{(I_1,\dots,I_k)} \subset \mathrm{Gr}_I^{(I_1,\dots,I_k)}$ pour V constituant irréductible de W . On fait de même avec $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}$.

On rappelle maintenant l'équivalence de Satake géométrique, due à Lusztig, Drinfeld, Ginzburg et Mirkovic-Vilonen. Pour des références on cite [Lus83, Gin95, BD99, MV07, Gai01, Gai07, Ric14, Zhu15]. On va utiliser ici la forme expliquée par Gaitsgory dans [Gai07]. Habituellement l'équivalence de Satake géométrique s'exprime de la manière suivante. Pour tout corps k algébriquement clos de caractéristique première à ℓ , la catégorie des faisceaux pervers $G(k[[z]])$ -équivariants sur la grassmannienne affine $G(k((z)))/G(k[[z]])$ est munie d'une structure tensorielle par le produit de fusion (ou de convolution) et d'un foncteur fibre donné par la cohomologie totale. Comme cela est expliqué dans [MV07, BD99] et rappelé plus en détails ci-dessous, on modifie un peu la règle des signes dans la contrainte de commutativité pour que le foncteur fibre soit tensoriel à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels (et non pas des super-espaces vectoriels). Pour être plus canonique il faut introduire en plus une torsion à la Tate, c'est-à-dire tensoriser par $E(\frac{i}{2})$ la partie de degré cohomologique i pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Cette catégorie est donc équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie du groupe algébrique des automorphismes du foncteur fibre, qui s'avère être isomorphe à \widehat{G} (muni d'un épingleage canonique). De plus ces faisceaux pervers sont naturellement équivariants par le groupe des automorphismes de $k[[z]]$. Ceci permet de remplacer $\mathrm{Spf}(k[[z]])$ par un disque formel arbitraire, et en particulier un disque formel variant sur une courbe.

Ici on utilise seulement un sens de l'équivalence, à savoir le foncteur de la catégorie des représentations de dimension finie de \widehat{G} vers la catégorie des faisceaux pervers $G(k[[z]])$ -équivariants sur la grassmannienne affine. En revanche on l'énonce en utilisant la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld. Dans les notations du théorème ci-dessous, (0.18) est un foncteur en W , et cela est plus fort que si on avait seulement la propriété d) du théorème, qui détermine de façon non canonique la classe d'isomorphisme de $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ pour chaque classe de représentation irréductible W de $(\widehat{G})^I$. Comme on l'a rappelé précédemment, la construction de ce foncteur repose sur le foncteur fibre donné par la cohomologie totale. Par exemple, dans les notations du théorème ci-dessous, W est *égal* à la cohomologie totale de $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ dans les fibres de $\mathrm{Gr}_I^{(I_1,\dots,I_k)}$ au-dessus de X^I (avec les avertissements précédents concernant la règle des signes et les torsions à la Tate). On note cependant que l'on n'utilise pas cette propriété en tant que telle, seulement à travers le fait qu'elle fournit le foncteur (0.18), et donc la canonicité de nos constructions.

Théorème 0.9 (Un sens de l'équivalence de Satake géométrique [BD99, MV07, Gai07], voir le théorème 1.17 ci-dessous pour les détails). *On possède pour tout ensemble fini I et pour toute partition (I_1, \dots, I_k) un foncteur E -linéaire*

$$(0.18) \quad W \mapsto \mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

de la catégorie des représentations E -linéaires de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des E -faisceaux pervers $G_{\sum \infty x_i}$ -équivariants sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ (pour la normalisation perverse relative à X^I). De plus $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est supporté par $\mathrm{Gr}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et universellement localement acyclique relativement à X^I . Ces foncteurs vérifient les propriétés suivantes.

a) *Compatibilité aux morphismes d'oubli (des modifications intermédiaires) : $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I)}$ est canoniquement isomorphe à l'image directe de $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ par le morphisme d'oubli $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \mathrm{Gr}_I^{(I)}$ (défini dans (0.14)).*

b) *Compatibilité à la convolution : si $W = \boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} W_j$ où W_j est une représentation de $(\widehat{G})^{I_j}$, $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse de $\boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} \mathcal{S}_{I_j, W_j, E}^{(I_j)}$ par le morphisme*

$$\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\mathrm{Gr}_{I_j}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} \infty x_i} \right)$$

$$(\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{G}_k) \mapsto \left((\mathcal{G}_{j-1}|_{\Gamma_{\sum_{i \in I_j} \infty x_i}} \rightarrow \mathcal{G}_j|_{\Gamma_{\sum_{i \in I_j} \infty x_i}}) \right)_{j=1, \dots, k}$$

où les \mathcal{G}_i sont des G -torseurs sur $\Gamma_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$.

c) *Compatibilité à la fusion: soient I, J des ensembles finis et $\zeta : I \rightarrow J$ une application. Soit (J_1, \dots, J_k) une partition de J . Son image inverse $(\zeta^{-1}(J_1), \dots, \zeta^{-1}(J_k))$ est une partition de I . On note*

$$\Delta_\zeta : X^J \rightarrow X^I, \quad (x_j)_{j \in J} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i \in I}$$

le morphisme diagonal associé à ζ . On note encore Δ_ζ l'inclusion

$$\mathrm{Gr}_J^{(J_1, \dots, J_k)} = \mathrm{Gr}_I^{(\zeta^{-1}(J_1), \dots, \zeta^{-1}(J_k))} \times_{X^I} X^J \hookrightarrow \mathrm{Gr}_I^{(\zeta^{-1}(J_1), \dots, \zeta^{-1}(J_k))}.$$

Soit W une représentation E -linéaire de dimension finie de \widehat{G}^I . On note W^ζ la représentation de \widehat{G}^J qui est la composée de la représentation W avec le morphisme diagonal

$$\widehat{G}^J \rightarrow \widehat{G}^I, \quad (g_j)_{j \in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i \in I}.$$

On a alors un isomorphisme canonique

$$(0.19) \quad \Delta_\zeta^* \left(\mathcal{S}_{I, W, E}^{(\zeta^{-1}(J_1), \dots, \zeta^{-1}(J_k))} \right) \simeq \mathcal{S}_{J, W^\zeta, E}^{(J_1, \dots, J_k)}$$

qui est fonctoriel en W et compatible avec la composition pour ζ .

d) *Lorsque W est irréductible, le faisceau pervers $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est isomorphe au faisceau d'intersection (avec la normalisation perverse relative à X^I).*

Dans le théorème précédent $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est supporté par $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et on peut donc le considérer comme un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$ (avec les entiers n_i assez grands).

Comme on le dira plus en détails dans la remarque 1.19 la contrainte de commutativité est définie par la convention *modifiée*, introduite dans la discussion qui précède la proposition 6.3 de [MV07]. La contrainte de commutativité modifiée est celle que l'on obtiendrait naturellement si tous les faisceaux d'intersection $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ pour W irréductible étaient normalisés, du point de vue du degré cohomologique modulo 2, pour être en degré cohomologique pair au point générique de $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/G_{\sum n_i x_i}$, et alors le lemme 3.9 de [MV07] affirme que leur cohomologie totale serait supportée en degrés cohomologiques pairs. Donc avec cette contrainte de commutativité modifiée le foncteur fibre donné par la cohomologie totale sur la catégorie tensorielle des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$ -équivariants sur la grassmannienne affine est un foncteur tensoriel à valeurs dans la catégorie tensorielle des espaces vectoriels (et non pas des super-espaces vectoriels), d'où l'équivalence avec la catégorie tensorielle des représentations de dimension finie de \widehat{G} (défini comme le groupe d'automorphismes du foncteur fibre).

Remarque 0.10. Dans le théorème précédent $Z_{\sum_{i \in I} \infty x_i} \subset G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1,\dots,I_k)}$ et donc (par d)) sur tous les faisceaux $\mathcal{S}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}$. On note $G^{\mathrm{ad}} = G/Z$. On peut donc considérer $\mathcal{S}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}$ comme un faisceau pervers (à un décalage près) $G_{\sum \infty x_i}^{\mathrm{ad}}$ -équivariant sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1,\dots,I_k)}$ ou si on préfère comme un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/G_{\sum n_i x_i}^{\mathrm{ad}}$ (avec les entiers n_i assez grands).

Voici la construction du foncteur (0.15). Le morphisme (0.12) ne se factorise pas par le quotient par Ξ (comme me l'a fait remarquer un rapporteur anonyme), mais c'est le cas de sa composée avec le morphisme d'oubli $\mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/G_{\sum n_i x_i} \rightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/G_{\sum n_i x_i}^{\mathrm{ad}}$. Autrement dit on possède un morphisme

$$(0.20) \quad \mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/\Xi \rightarrow \mathrm{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/G_{\sum n_i x_i}^{\mathrm{ad}}$$

et d'après la remarque 0.10, $\mathcal{S}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}$ est un faisceau pervers (à un décalage près) sur l'espace d'arrivée.

Définition 0.11. On définit le faisceau pervers (avec la normalisation relative à $(X \setminus N)^I$) $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ sur $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/\Xi$ comme l'image inverse de $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ par le morphisme (0.20). On définit alors le foncteur (0.15) en posant

$$(0.21) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} = R^0(\mathfrak{p}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\leq \mu})! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} \Big|_{\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\leq \mu}/\Xi} \right)$$

pour toute partition (I_1, \dots, I_k) de I .

Grâce au a) du théorème précédent la définition (0.21) ne dépend pas du choix de la partition (I_1, \dots, I_k) .

Lorsque W est irréductible, la lissité du morphisme (0.12), donc celle du morphisme (0.20), et le calcul de sa dimension impliquent que $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ est isomorphe au faisceau d'intersection de $\mathrm{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/\Xi$ (avec la normalisation perverse relative à $(X \setminus N)^I$). Donc la définition précédente est cohérente avec la définition 0.4 (et la raffine en la rendant plus canonique).

L'action des opérateurs de Hecke et des morphismes de Frobenius partiels peut se reformuler à l'aide de la définition (0.21). La canonicité de la définition (0.21) est surtout cruciale pour la construction des isomorphismes de coalescence (0.17), que nous allons expliquer maintenant, car les espaces de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes.

Définition 0.12. L'isomorphisme *canonique* (0.17) est défini (grâce au théorème de changement de base propre) par l'isomorphisme *canonique* entre $\mathcal{F}_{N,J,W^\zeta,\Xi,E}^{(J_1,\dots,J_k)}$ et l'image inverse de $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(\zeta^{-1}(J_1),\dots,\zeta^{-1}(J_k))}$ par (le quotient par Ξ de) l'inclusion

$$\text{Cht}_{N,J}^{(J_1,\dots,J_k)} = \text{Cht}_{N,I}^{(\zeta^{-1}(J_1),\dots,\zeta^{-1}(J_k))} \times_{(X \setminus N)^I} (X \setminus N)^J \hookrightarrow \text{Cht}_{N,I}^{(\zeta^{-1}(J_1),\dots,\zeta^{-1}(J_k))}$$

qui provient de l'isomorphisme (0.19) dans le c) du théorème 0.9.

La définition précédente est indépendante du choix de la partition (J_1, \dots, J_k) .

Remarque 0.13. Le fait d'avoir pris une partition (J_1, \dots, J_k) arbitraire permet de montrer la compatibilité entre l'isomorphisme de coalescence (0.17) et les morphismes de Frobenius partiels, à savoir que pour tout $j \in J$, $\Delta_\zeta^*(F_{\zeta^{-1}(\{j\})})$ et $F_{\{j\}}$ se correspondent par l'isomorphisme χ_ζ de (0.17).

0.3. Morphismes de création et d'annihilation. Dans ce paragraphe notre but est d'utiliser les isomorphismes de coalescence (0.17) pour construire des morphismes de création et d'annihilation, puis d'exprimer les opérateurs de Hecke en les places de $X \setminus N$ comme la composée

- d'un morphisme de création,
- de l'action d'un morphisme de Frobenius partiel,
- d'un morphisme d'annihilation,

et d'utiliser cela pour étendre les opérateurs de Hecke (0.7) en des morphismes de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$ tout entier et pour obtenir les relations d'Eichler-Shimura.

Soient I et J des ensembles finis. On va définir maintenant les morphismes de création et d'annihilation, dont l'idée est la suivante. Les pattes indexées par I restent inchangées et on crée (ou on annihile) les pattes indexées par J en un même point de la courbe (indexé par un ensemble à un élément, que l'on note $\{0\}$).

On a des applications évidentes

$$\zeta_J : J \rightarrow \{0\}, \quad \zeta_J^I = (\text{Id}_I, \zeta_J) : I \cup J \rightarrow I \cup \{0\} \quad \text{et} \quad \zeta_\emptyset^I = (\text{Id}_I, \zeta_\emptyset) : I \rightarrow I \cup \{0\}.$$

Soient W et U des représentations E -linéaires de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ et $(\widehat{G})^J$ respectivement. On rappelle que U^{ζ_J} est la représentation de \widehat{G} obtenue en restreignant U à la diagonale $\widehat{G} \subset (\widehat{G})^J$. Soient $x \in U$ et $\xi \in U^*$ invariants sous l'action diagonale de \widehat{G} . Alors $W \boxtimes U$ est une représentation de $(\widehat{G})^{I \cup J}$ et $W \boxtimes U^{\zeta_J}$ et $W \boxtimes \mathbf{1}$ sont des représentations de $(\widehat{G})^{I \cup \{0\}}$ reliées par les morphismes

$$W \boxtimes \mathbf{1} \xrightarrow{\text{Id}_W \boxtimes x} W \boxtimes U^{\zeta_J} \quad \text{et} \quad W \boxtimes U^{\zeta_J} \xrightarrow{\text{Id}_W \boxtimes \xi} W \boxtimes \mathbf{1}.$$

On note $\Delta : X \rightarrow X^J$ le morphisme diagonal et on désigne par $E_{X \setminus N}$ le faisceau constant sur $X \setminus N$.

Définition 0.14. On définit le morphisme de création $\mathcal{C}_x^\#$ comme la composée

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \xrightarrow{\chi_{\zeta_\emptyset^I}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\},W \boxtimes \mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E} \\ & \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes x)} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\},W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{0,\leq\mu,E} \xrightarrow{\chi_{\zeta_J^I}^{-1}} \mathcal{H}_{N,I \cup J,W \boxtimes U}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \end{aligned}$$

où $\chi_{\zeta_\emptyset^I}$ et $\chi_{\zeta_J^I}$ sont les isomorphismes de coalescence de (0.17). De même on définit le morphisme d'annihilation \mathcal{C}_ξ^b comme la composée

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N,I \cup J,W \boxtimes U}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \xrightarrow{\chi_{\zeta_J^I}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\},W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{0,\leq\mu,E} \\ & \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes \xi)} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\},W \boxtimes \mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E} \xrightarrow{\chi_{\zeta_\emptyset^I}^{-1}} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \boxtimes E_{(X \setminus N)}. \end{aligned}$$

Tous les morphismes ci-dessus sont des morphismes de faisceaux sur $(X \setminus N)^I \times (X \setminus N)$.

Nous allons maintenant utiliser ces morphismes avec $J = \{1, 2\}$. Soit v une place dans $|X| \setminus |N|$. On considère v également comme un sous-schéma de X et on note E_v le faisceau constant sur v . Soit V une représentation irréductible de \widehat{G} . On note $\mathbf{1} \xrightarrow{\delta_V} V \otimes V^*$ et $V \otimes V^* \xrightarrow{\text{ev}_V} \mathbf{1}$ les morphismes naturels.

Pour κ assez grand (en fonction de $\deg(v)$, V), on définit $S_{V,v}$ comme la composée

$$(0.22) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \boxtimes E_v$$

$$(0.23) \quad \xrightarrow{\mathcal{C}_v^\# \Big|_{(X \setminus N)^I \times v}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{1,2\},W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)}$$

$$(0.24) \quad \xrightarrow{(F_{\{1\}})^{\deg(v)} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{1,2\},W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{0,\leq\mu+\kappa,E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)}$$

$$(0.25) \quad \xrightarrow{\mathcal{C}_{\text{ev}_V}^b \Big|_{(X \setminus N)^I \times v}} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E} \boxtimes E_v.$$

Autrement dit on crée deux nouvelles pattes en v à l'aide de $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$, on applique le morphisme de Frobenius partiel (à la puissance $\deg(v)$) à la première, puis on les annihile à l'aide de $\text{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$.

En tant que morphisme de faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^I \times v$, $S_{V,v}$ commute avec l'action naturelle du morphisme de Frobenius partiel sur E_v dans (0.22) et (0.25), puisque

- les morphismes de création et d'annihilation entrelacent cette action avec l'action de $F_{\{1,2\}}$ sur (0.23) et (0.24), par la remarque 0.13,
- $F_{\{1\}}$ et donc $F_{\{1\}}^{\deg(v)}$ commutent avec $F_{\{1,2\}} = F_{\{1\}}F_{\{2\}}$.

Définition 0.15. Par abus on note encore

$$S_{V,v} : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E}$$

le morphisme de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$ obtenu par descente relativement à $\mathbb{Z}/\deg(v)\mathbb{Z}$ (en prenant les invariants par l'action naturelle du morphisme de Frobenius partiel sur E_v dans (0.22) et (0.25)).

Proposition 0.16. *La restriction de $S_{V,v}$ à $(X \setminus (N \cup v))^I$ est égale, en tant que morphisme de faisceaux sur $(X \setminus (N \cup v))^I$, à l'opérateur de Hecke*

$$T(h_{V,v}) : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I}.$$

Il suffit de le démontrer lorsque V et W sont irréductibles. La preuve est de nature géométrique. Nous l'esquisons ici dans un cas simple, où elle se réduit à l'intersection de deux sous-champs lisses dans un champ de Deligne-Mumford lisse et où cette intersection s'avère être transverse. La preuve est plus compliquée en général à cause des singularités. On renvoie à la preuve de la proposition 6.2 pour le cas général (mais une solution alternative consisterait à se ramener à une situation d'intersection transverse lisse à l'aide des résolutions de Bott-Samelson).

Démonstration lorsque V est minuscule et $\deg(v) = 1$. On rappelle qu'une représentation irréductible de \widehat{G} est dite minuscule si tous ses poids sont conjugués par le groupe de Weyl. Cela équivaut au fait que l'orbite correspondante dans la grassmannienne affine est fermée (et implique donc que la strate fermée correspondante est lisse). On note d la dimension de l'orbite associée à V .

Grâce à l'hypothèse que $\deg(v) = 1$ on peut supprimer $\boxtimes E_v$ partout. On considère le champ de Deligne-Mumford

$$\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} = \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\},W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\},I\}} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I \times \Delta(v)}.$$

On va construire deux sous-champs fermés \mathcal{Y}_1 et \mathcal{Y}_2 dans $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$, munis de morphismes α_1 et α_2 vers

$$\mathcal{Z}^{(I)} = \text{Cht}_{N,I,W}^{(I)} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I}$$

de sorte que

- **A)** la restriction à $(X \setminus (N \cup v))^I$ de la composée (0.22)→(0.23)→(0.24) du morphisme de création et de l'action du morphisme de Frobenius partiel est réalisée par une correspondance cohomologique supportée par la correspondance \mathcal{Y}_2 de $\mathcal{Z}^{(I)}$ vers $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$, et dont la restriction aux ouverts de lissité est déterminée par son support, avec un coefficient correctif de $q^{-d/2}$,
- **B)** la restriction à $(X \setminus (N \cup v))^I$ du morphisme d'annihilation (0.24)→(0.25) est réalisée par une correspondance cohomologique supportée par la correspondance \mathcal{Y}_1 de $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$ vers $\mathcal{Z}^{(I)}$, et dont la restriction aux ouverts de lissité est déterminée par son support.

Le coefficient correctif de $q^{-d/2}$ est évidemment dû à l'action du morphisme de Frobenius partiel. On justifiera dans la remarque 6.9 qu'il n'y a pas de signe à ajouter.

Donc $S_{V,v}$ sera réalisée par une correspondance cohomologique supportée par le produit $\mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \mathcal{Y}_2$ de ces correspondances. On verra

- que le produit $\mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \mathcal{Y}_2$ n'est autre que la correspondance de Hecke $\Gamma^{(I)}$ de $\mathcal{Z}^{(I)}$ dans lui-même (qui est une correspondance finie étale),
- que $S_{V,v}$, qui est donc une correspondance cohomologique supportée par $\Gamma^{(I)}$ est en fait égale à la correspondance cohomologique supportée par $\Gamma^{(I)}$ avec un coefficient correctif de $q^{-d/2}$ (cette correspondance réalise $T(h_{V,v})$ puisque V est minuscule).

Grâce à l'hypothèse que V est minuscule il suffira de faire le calcul sur les ouverts de lissité, et le calcul sera évident car on verra que sur les ouverts de lissité l'intersection $\mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{Z}(\{1\},\{2\},I)} \mathcal{Y}_2$ est une intersection transverse de deux sous-champs lisses.

On construit maintenant tous ces objets. La correspondance de Hecke $\Gamma^{(I)}$ est le champ classifiant la donnée de $(x_i)_{i \in I}$ et d'un diagramme

$$(0.26) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \psi') & \xrightarrow{\phi'} & (\tau \mathcal{G}', \tau \psi') \\ \uparrow \kappa & & \uparrow \tau \kappa \\ (\mathcal{G}, \psi) & \xrightarrow{\phi} & (\tau \mathcal{G}, \tau \psi) \end{array}$$

tel que

- la ligne inférieure $((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}, \psi) \xrightarrow{\phi} (\tau \mathcal{G}, \tau \psi))$ et la ligne supérieure $((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}', \psi') \xrightarrow{\phi'} (\tau \mathcal{G}', \tau \psi'))$ appartiennent à $\mathcal{Z}^{(I)}$,
- $\kappa : \mathcal{G}|_{(X \setminus v) \times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'|_{(X \setminus v) \times S}$ est un isomorphisme tel que la position relative de \mathcal{G} par rapport à \mathcal{G}' en v est *égale* au poids dominant de V (on rappelle que V est minuscule),
- la restriction de κ à $N \times S$, qui est un isomorphisme, entrelace les structures de niveau ψ et ψ' .

De plus les deux projections $\Gamma^{(I)} \rightarrow \mathcal{Z}^{(I)}$ sont les morphismes qui conservent les lignes inférieures et supérieures de (0.26).

Comme les pattes indexées par I varient dans $X \setminus (N \cup v)$ et restent disjointes des pattes 1 et 2 fixées en v , on peut changer la partition $(\{1\}, \{2\}, I)$ en $(\{1\}, I, \{2\})$ et on a donc

$$\mathcal{Z}^{\{1\},\{2\},I} = \text{Cht}_{N, I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{1\}, I, \{2\}} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I \times \Delta(v)}.$$

Autrement dit le champ $\mathcal{Z}^{\{1\},\{2\},I}$ classifie la donnée de $(x_i)_{i \in I}$ et d'un diagramme

$$(0.27) \quad \begin{array}{ccccc} & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\phi'_2} & (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) & & (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & \downarrow \phi'_3 & \nearrow \tau \phi_1 & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) & \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) &\xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} (\mathcal{G}_2, \psi_2) \xrightarrow{\phi_3} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)) \\ &\in \text{Cht}_{N, I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{1\}, \{2\}, I} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I \times \Delta(v)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) &\xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi'_2} (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) \xrightarrow{\phi'_3} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)) \\ &\in \text{Cht}_{N, I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{1\}, I, \{2\}} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I \times \Delta(v)}. \end{aligned}$$

Les flèches obliques, verticales et horizontales du diagramme (0.27) sont respectivement les modifications associées à la patte 1, à la patte 2 et aux pattes indexées par I . La flèche $\tau \phi_1$ à droite du diagramme (0.27) est déterminée par ϕ_1 , mais on l'a dessinée car elle servira pour définir \mathcal{Y}_2 ci-dessous.

On note $\mathcal{Y}_1 \xrightarrow{t_1} \mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I)$ le sous-champ fermé défini par la condition que dans le diagramme (0.27), $\phi_2\phi_1 : \mathcal{G}_0|_{(X-v)\times S} \rightarrow \mathcal{G}_2|_{(X-v)\times S}$ s'étend en un isomorphisme sur $X \times S$. On a un morphisme

$$\alpha_1 : \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{Z}^{(I)}$$

qui envoie

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\phi'_2} & (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) & & (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi'_3 & \nearrow \tau \phi_1 & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) & & \end{array}$$

sur la ligne du bas, c'est-à-dire

$$(0.28) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_3(\phi_2\phi_1)} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)).$$

L'assertion B) ci-dessus vient d'un énoncé similaire concernant les faisceaux de Mirkovic-Vilonen. En effet

- par le a) du théorème 0.9 l'image directe de $\mathcal{S}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, E}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ (qui est le faisceau constant E décalé) par le morphisme d'oubli (de la modification intermédiaire) $\mathrm{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{\{\{1,2\}\}}$ est égale à $\mathcal{S}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, E}^{\{\{1,2\}\}}$,
- par le c) du théorème 0.9 la restriction de $\mathcal{S}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, E}^{\{\{1,2\}\}}$ au-dessus de la diagonale (et donc en particulier au-dessus de $\Delta(v)$) est égale à $\mathcal{S}_{\{0\}, V \otimes V^*, E}^{\{\{0\}\}}$ que l'on envoie dans le faisceau gratte-ciel $\mathcal{S}_{\{0\}, 1, E}^{\{\{0\}\}}$ par $\mathrm{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$

et par le théorème de changement de base propre cela donne lieu à une correspondance cohomologique entre $\mathrm{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}}|_{\Delta(v)}$ et le point, et on vérifie que celle-ci est la correspondance cohomologique évidente supportée par le sous-schéma fermé lisse de $\mathrm{Gr}_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}}|_{\Delta(v)}$ formé des $(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\sim} G)$ tels que $\phi_2\phi_1$ soit un isomorphisme.

On note $\mathcal{Y}_2 \xrightarrow{t_2} \mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I)$ le sous-champ fermé défini par la condition que dans le diagramme (0.27), $\tau \phi_1 \phi'_3 : \mathcal{G}'_2|_{(X-v)\times S} \rightarrow \tau \mathcal{G}_1|_{(X-v)\times S}$ s'étend un isomorphisme sur $X \times S$. On a un morphisme

$$\alpha_2 : \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathcal{Z}^{(I)}$$

qui envoie

$$(0.29) \quad \begin{array}{ccccc} & & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\phi'_2} & (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) & \xrightarrow{\sim} & (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi'_3 & \nearrow \tau \phi_1 & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) & & \end{array}$$

sur la ligne du haut, c'est-à-dire

$$(0.30) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{(\tau \phi_1 \phi'_3)\phi'_2} (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1)).$$

La justification de l’assertion A) ci-dessus se fait

- par un argument similaire à celui donné pour justifier B) mais concernant cette fois-ci $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$ et le champ

$$\text{Cht}_{N, I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{(I, \{2\}, \{1\})} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I \times \Delta(v)},$$

- par le fait que la restriction à $(X \setminus (N \cup v))^I \times \Delta(v)$ du morphisme de Frobenius partiel

$$\text{Fr}_{\{1\}}^{(\{1\}, I, \{2\})} : \text{Cht}_{N, I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{(\{1\}, I, \{2\})} \rightarrow \text{Cht}_{N, I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{(I, \{2\}, \{1\})}$$

envoie (0.27) sur

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\phi'_2} & (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) & & (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \\ & & \downarrow \phi'_3 & \nearrow \tau \phi_1 & \\ & & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) & & \end{array}$$

Le fait qu’on n’ait pas besoin d’introduire de signe dans A) et B) ci-dessus sera justifié dans la remarque 6.9, que le lecteur peut lire dès à présent s’il le souhaite.

D’autre part on a un isomorphisme canonique

$$(0.31) \quad \Gamma^{(I)} \simeq \mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I)} \mathcal{Y}_2.$$

En effet un point de $\mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I)$ appartenant à \mathcal{Y}_1 et à \mathcal{Y}_2 est donné par un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\phi'_2} & (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) & \xrightarrow{\sim} & (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi'_3 & \nearrow \tau \phi_1 & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) & & \end{array}$$

Il équivaut donc à la donnée d’un point de $\Gamma^{(I)}$, car en contractant les deux isomorphismes du diagramme précédent on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{(\tau \phi_1 \phi'_3) \phi'_2} & (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \\ \uparrow \phi_1 & & \uparrow \tau \phi_1 \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\phi_3(\phi_2 \phi_1)} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \end{array}$$

que l’on identifie au diagramme (0.26).

On a des morphismes naturels des champs $\mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I), \mathcal{Z}^{(I)}, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ et $\Gamma^{(I)}$ vers $\text{Gr}_{I,W}^{(I)} / G_{\sum n_i x_i}$. Comme V est minuscule ces morphismes sont lisses. Donc les ouverts de lissité ${}^\circ \mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I), {}^\circ \mathcal{Z}^{(I)}, {}^\circ \mathcal{Y}_1, {}^\circ \mathcal{Y}_2, {}^\circ \Gamma^{(I)}$ sont les images inverses de ${}^\circ \text{Gr}_{I,W}^{(I)} / G_{\sum n_i x_i}$ où ${}^\circ \text{Gr}_{I,W}^{(I)}$ désigne l’ouvert de lissité de $\text{Gr}_{I,W}^{(I)}$.

Un calcul d’espaces tangents montre que ${}^\circ \mathcal{Y}_1$ et ${}^\circ \mathcal{Y}_2$ sont des sous-champs lisses dans le champ de Deligne-Mumford lisse ${}^\circ \mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I)$ et s’y s’intersectent transversalement, et de plus il résulte de (0.31) que leur intersection est ${}^\circ \Gamma^{(I)}$. On a

donc l'égalité de correspondances cohomologiques entre $S_{V,v}$ et $T(h_{V,v})$ sur ${}^\circ\Gamma^{(I)}$ mais comme $\Gamma^{(I)}$ est une correspondance étale entre $\mathcal{Z}^{(I)}$ et lui-même l'égalité a lieu partout (en effet un morphisme du faisceau pervers $\mathrm{IC}_{\Gamma^{(I)}}$ dans lui-même est déterminé par sa restriction à ${}^\circ\Gamma^{(I)}$). \square

Une conséquence de la proposition 0.16 est que l'on possède, pour tout $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$ et κ assez grand, une extension naturelle du morphisme $T(f)$ (introduit dans (0.7)) en un morphisme $T(f) : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E}$ de faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^I$ tout entier, de façon compatible avec la composition des opérateurs de Hecke. En effet, en notant $K_N = \prod K_{N,v}$, il suffit de le montrer pour toute place v et pour $f \in C_c(K_{N,v} \backslash G(F_v)/K_{N,v}, E)$. Il n'y a rien à faire si $v \in N$. Si $v \notin N$ il suffit de traiter le cas où $f = h_{V,v}$ et alors l'extension est donnée par $S_{V,v}$ grâce à la proposition 0.16. Pour plus de détails, on renvoie au corollaire 6.5.

Pour les variétés de Shimura sur les corps de nombres de tels prolongements ont été définis dans de nombreux cas, de façon modulaire, par adhérence de Zariski ou à l'aide de cycles proches (voir [Del71, FC90, GT05]).

Comme $S_{V,v}$ est le prolongement de $T(h_{V,v})$, la proposition suivante exprime exactement la relation d'Eichler-Shimura. Cette relation affirme que pour toute place finie et pour tout $i \in I$ le morphisme de Frobenius partiel en v est annulé par un polynôme en les opérateurs de Hecke en v (à coefficients dans \mathcal{O}_E).

On utilise encore $\{0\}$ pour noter un ensemble à un élément (indexant la patte à laquelle s'applique la relation d'Eichler-Shimura).

Proposition 0.17 (Proposition 7.1). *Soient I, W comme ci-dessus et V une représentation irréductible de \widehat{G} . Alors*

$$F_{\{0\}}^{\mathrm{deg}(v)} : \lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times v} \rightarrow \lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times v}$$

est annulé par un polynôme de degré $\dim(V)$ dont les coefficients sont les restrictions à $(X \setminus N)^I \times v$ des morphismes $S_{\Lambda^i V, v}$. Plus précisément on a

$$\sum_{i=0}^{\dim V} (-1)^i (F_{\{0\}}^{\mathrm{deg}(v)})^i \circ S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v} \Big|_{(X \setminus N)^I \times v} = 0.$$

On rappelle que $S_{\Lambda^i V, v}$ étend l'opérateur de Hecke $T(h_{\Lambda^i V, v})$

$$\text{de } (X \setminus (N \cup v))^{I \cup \{0\}} \text{ à } (X \setminus N)^{I \cup \{0\}}$$

et on remarque que cette extension est absolument nécessaire pour prendre la restriction à $(X \setminus N)^I \times v$. Grâce à la définition des morphismes $S_{\Lambda^i V, v}$ par (0.22)-(0.25), la preuve de la proposition 0.17 est un simple calcul d'algèbre tensorielle (inspiré d'une démonstration du théorème de Hamilton-Cayley, et fondée uniquement sur le fait que $\Lambda^{\dim V + 1} V = 0$). On renvoie à la section 7 pour cette preuve.

0.4. Propriétés des faisceaux de cohomologie des champs de chtoucas.

On rappelle que si \bar{x} est un point géométrique d'un schéma Y son localisé strict (ou hensélisé strict) $Y_{(\bar{x})}$ est défini comme la limite projective des voisinage étales \bar{x} -pointés de x . Si \bar{y} est un autre point géométrique on appelle flèche de spécialisation $\mathfrak{sp} : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ un morphisme $Y_{(\bar{x})} \rightarrow Y_{(\bar{y})}$, ou de façon équivalente un morphisme $\bar{x} \rightarrow Y_{(\bar{y})}$. Pour tout faisceau \mathcal{F} sur Y (pour la topologie étale), \mathfrak{sp} induit un

homomorphisme de spécialisation $\mathfrak{sp}^* : \mathcal{F}_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}}$ (voir le paragraphe 7 de l'exposé VIII de [SGA4-2]).

On fixe une clôture algébrique \bar{F} de F et on note $\bar{\eta} = \text{Spec}(\bar{F})$ le point géométrique correspondant au-dessus du point générique η de X .

On note $\Delta : X \rightarrow X^I$ le morphisme diagonal. On fixe un point géométrique $\bar{\eta}^I$ au-dessus du point générique η^I de X^I et une flèche de spécialisation $\mathfrak{sp} : \bar{\eta}^I \rightarrow \Delta(\bar{\eta})$. Le rôle de \mathfrak{sp} est de rendre le foncteur fibre en $\bar{\eta}^I$ plus canonique, et en particulier compatible avec la coalescence des pattes (cette dernière affirmation est claire lorsque \mathfrak{sp}^* est un isomorphisme et en pratique nous serons dans cette situation). Donc $\bar{\eta}^I$ et \mathfrak{sp} vont ensemble et ci-dessous les énoncés faisant intervenir $\bar{\eta}^I$ dépendent du choix de \mathfrak{sp} .

Un résultat fondamental de Drinfeld (théorème 2.1 de [Dri80] et proposition 6.1 de [Dri87b]) est rappelé dans le lemme suivant (voir la section 8 pour d'autres références, notamment [Lau04]). On notera toujours les \mathcal{O}_E -modules et les \mathcal{O}_E -faisceaux par des lettres gothiques.

Lemme 0.18 (Drinfeld). *Si \mathfrak{E} est un \mathcal{O}_E -faisceau lisse constructible sur un ouvert dense de $(X \setminus N)^I$, muni d'une action des morphismes de Frobenius partiels, c'est-à-dire d'isomorphismes*

$$F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^*(\mathfrak{E})|_{\eta^I} \rightarrow \mathfrak{E}|_{\eta^I}$$

commutant entre eux et dont la composée est l'isomorphisme naturel $\text{Frob}^(\mathfrak{E}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{E}$, alors il s'étend en un faisceau lisse sur U^I , où U est un ouvert dense assez petit de $X \setminus N$, et la fibre $\mathfrak{E}|_{\Delta(\bar{\eta})}$ est munie d'une action de $\pi_1(U, \bar{\eta})^I$. De plus, si on fixe U , le foncteur $\mathfrak{E} \mapsto \mathfrak{E}|_{\Delta(\bar{\eta})}$ fournit une équivalence*

- de la catégorie des \mathcal{O}_E -faisceaux lisses constructibles sur U^I munis d'une action des morphismes de Frobenius partiels,
- vers la catégorie des représentations continues de $\pi_1(U, \bar{\eta})^I$ sur des \mathcal{O}_E -modules de type fini,

de façon compatible avec la coalescence (c'est-à-dire avec l'image inverse par le morphisme $U^J \rightarrow U^I$ associé à toute application $I \rightarrow J$).

Remarque 0.19. Dans la situation du lemme précédent, $\mathfrak{sp}^* : \mathfrak{E}|_{\Delta(\bar{\eta})} \rightarrow \mathfrak{E}|_{\bar{\eta}^I}$ est un isomorphisme, donc $\mathfrak{E}|_{\bar{\eta}^I}$ est muni lui aussi d'une action de $\pi_1(U, \bar{\eta})^I$.

Soit I un ensemble fini et $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$ une représentation irréductible de $(\widehat{G})^I$.

On ne peut pas appliquer directement le lemme précédent, car l'action des morphismes de Frobenius partiels augmente μ , et d'autre part la limite inductive $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ n'est pas constructible (car ses fibres sont de dimension infinie). Mais on pourra l'appliquer à la partie "Hecke-finie", au sens suivant.

Définition 0.20. Soit \bar{x} un point géométrique de $(X \setminus N)^I$. Un élément de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\bar{x}}$ est dit Hecke-finie s'il appartient à un sous- \mathcal{O}_E -module de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\bar{x}}$ qui est stable par $T(f)$ pour tout $f \in C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$.

On note $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\bar{x}} \right)^{\text{Hf}}$ l'ensemble de tous les éléments Hecke-finis. C'est un sous- E -espace vectoriel de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\bar{x}}$ et il est stable par $\pi_1(x, \bar{x})$ et $C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, E)$.

Remarque 0.21. La définition ci-dessus sera appliquée avec \bar{x} égal à $\Delta(\bar{\eta})$ ou $\bar{\eta}^I$. Dans ce cas l'action des opérateurs de Hecke $T(f)$ sur $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\bar{x}}$ est évidente (et ne nécessite pas leur extension en des morphismes de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$ réalisée après la proposition 0.17).

On possède l'homomorphisme de spécialisation

$$(0.32) \quad \mathbf{sp}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\Delta(\bar{\eta})} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\bar{\eta}^I}$$

où les deux membres sont considérés comme des E -espaces vectoriels (limites inductives de E -espaces vectoriels de dimension finie).

Lemme 0.22 (Proposition 8.27). *L'espace $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\bar{\eta}^I}\right)^{\text{Hf}}$ est la réunion de sous- \mathcal{O}_E -modules $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}|_{\bar{\eta}^I}$ où \mathfrak{G} est un sous- \mathcal{O}_E -faisceau constructible de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$ stable sous l'action des morphismes de Frobenius partiels.*

Démonstration. On renvoie à la démonstration de la proposition 8.27 pour plus de détails. Il suffit de traiter le cas où $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$ est irréductible. Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de points fermés de $X \setminus N$, on note $\times_{i \in I} v_i$ leur produit, qui est une réunion finie de points fermés de $(X \setminus N)^I$. Soit $\check{\mathfrak{M}}$ un sous- \mathcal{O}_E -module de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$ stable par $\pi_1(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ et $C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$. On va construire $\mathfrak{M} \supset \check{\mathfrak{M}}$ vérifiant les propriétés de l'énoncé. Comme $\check{\mathfrak{M}}$ est de type fini, il existe μ_0 tel que $\check{\mathfrak{M}}$ soit inclus dans l'image de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\eta^I}$ dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$. Quitte à augmenter μ_0 , on peut supposer que $\check{\mathfrak{M}}$ est un sous- \mathcal{O}_E -module de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\eta^I}$. Soit Ω_0 un ouvert dense de X^I sur lequel $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}$ est lisse. Il existe un unique sous- \mathcal{O}_E -faisceau lisse $\check{\mathfrak{G}} \subset \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\Omega_0}$ sur Ω_0 tel que $\check{\mathfrak{G}}|_{\eta^I} = \check{\mathfrak{M}}$. On choisit $(v_i)_{i \in I}$ tel que $\times_{i \in I} v_i$ soit inclus dans Ω_0 . Pour tout i , la relation d'Eichler-Shimura (proposition 0.17) implique alors que

$$(0.33) \quad (F_{\{i\}}^{\deg(v_i)})^{\dim W_i}(\check{\mathfrak{G}}|_{\times_{i \in I} v_i}) \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i-1} (F_{\{i\}}^{\deg(v_i)})^{\alpha}(S_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i}(\check{\mathfrak{G}}|_{\times_{i \in I} v_i}))$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\times_{i \in I} v_i}$. Grâce à la lissité de $(\text{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)})^{\dim W_i}(\check{\mathfrak{G}})$ en $\times_{i \in I} v_i$, l'inclusion (0.33) se propage en η^I , c'est-à-dire que

$$(0.34) \quad \begin{aligned} & F_{\{i\}}^{\deg(v_i)}{}^{\dim W_i}((\text{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)})^{\dim W_i}(\check{\mathfrak{G}}|_{\eta^I})) \\ & \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i-1} F_{\{i\}}^{\deg(v_i)\alpha}(\text{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)\alpha})^*(S_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i}(\check{\mathfrak{G}})|_{\eta^I}) \end{aligned}$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$. Or $\check{\mathfrak{G}}|_{\eta^I}$ est stable par $S_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i} = T(h_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i})$ puisque

$$h_{\Lambda^{\dim W_i-\alpha} W_i, v_i} \in C_c(G(\mathcal{O}_{v_i}) \setminus G(F_{v_i})/G(\mathcal{O}_{v_i}), \mathcal{O}_E) \subset C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E).$$

Par conséquent (0.34) se simplifie en

$$F_{\{i\}}^{\deg(v_i) \dim W_i} ((\text{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i) \dim W_i})^* (\check{\mathfrak{G}}|_{\eta^I})) \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i - 1} F_{\{i\}}^{\deg(v_i)\alpha} (\text{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)\alpha})^* (\check{\mathfrak{G}}|_{\eta^I})$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I}$. On en déduit que

$$\mathfrak{G} = \sum_{(n_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0, \dots, \deg(v_i) \dim(W_i) - 1\}} \prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{n_i} \left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i} \right)^* (\check{\mathfrak{G}})|_{\eta^I}$$

est un sous- \mathcal{O}_E -faisceau constructible de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I}$ qui est stable sous l'action des morphismes de Frobenius partiels. Comme $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ est la réunion de sous- \mathcal{O}_E -modules $\check{\mathfrak{M}}$ comme au début de la démonstration et que $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}|_{\eta^I}$ contient $\check{\mathfrak{M}}$ on obtient l'énoncé du lemme. \square

Proposition 0.23. *L'espace $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ est muni d'une action naturelle de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$. Plus précisément c'est une réunion de sous- E -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$.*

Démonstration. Pour tout sous- \mathcal{O}_E -faisceau constructible \mathfrak{G} de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I}$ stable sous l'action des morphismes de Frobenius partiels, le lemme de Drinfeld lemme 0.18 fournit (grâce à \mathfrak{sp} et à la remarque 0.19) une action continue de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$ sur $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}|_{\eta^I}$. D'après le lemme 0.22, $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ est la réunion de tels \mathfrak{M} . \square

Remarque 0.24. L'action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$ sur $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ est déterminée de manière unique par les actions de $\pi_1(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ et des morphismes de Frobenius partiels. Cela résulte du lemme 0.18 mais voici une autre façon de le voir (pour plus de détails on renvoie à la section 8). Suivant [Dri80], on va définir un groupe $\text{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I)$

- qui est une extension de \mathbb{Z}^I par $\text{Ker}(\pi_1(\eta^I, \bar{\eta}^I) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}})$,
- et qui, lorsque I est un singleton, s'identifie au groupe de Weil usuel $\text{Weil}(\eta, \bar{\eta}) = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) \times_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}$.

On note F^I le corps des fonctions de X^I , $(F^I)^{\text{perf}}$ son perfectisé et $\overline{F^I}$ la clôture algébrique de F^I telle que $\bar{\eta}^I = \text{Spec}(\overline{F^I})$. On définit alors

$$\text{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I) = \{ \varepsilon \in \text{Aut}_{\overline{\mathbb{F}_q}}(\overline{F^I}), \exists (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I, \varepsilon|_{(F^I)^{\text{perf}}} = \prod_{i \in I} (\text{Frob}_{\{i\}})^{n_i} \}.$$

Le choix de \mathfrak{sp} fournit une inclusion $\overline{F} \otimes_{\overline{\mathbb{F}_q}} \dots \otimes_{\overline{\mathbb{F}_q}} \overline{F} \subset \overline{F^I}$. Par restriction des automorphismes, on en déduit un morphisme surjectif

$$(0.35) \quad \text{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I) \rightarrow \text{Weil}(\eta, \bar{\eta})^I$$

(dépendant du choix de \mathfrak{sp}). L'énoncé de la proposition 0.23 se reformule alors en disant que l'action naturelle de $\text{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ sur $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ se factorise par le morphisme (0.35), et même à travers $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I$.

Proposition 0.25 (Corollaire 8.34). *La restriction de l'homomorphisme \mathfrak{sp}^* de (0.32) aux parties Hecke-finies est un isomorphisme*

$$(0.36) \quad \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{sp}^* \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\overline{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}.$$

Pour la preuve de la proposition 0.25 le lecteur peut lire dès à présent, s'il le souhaite, les énoncés et les démonstrations des propositions 8.31 et 8.32 et du corollaire 8.34.

Les propositions 0.23 et 0.25 permettent de définir maintenant les E -espaces vectoriels $H_{I,W}$ (on omet N dans la notation $H_{I,W}$ pour limiter la taille des diagrammes dans le paragraphe suivant). Dans la définition suivante on utilise le membre de gauche de (0.36) car il est plus canonique et ne dépend pas du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp} .

Définition 0.26. On définit $H_{I,W}$ comme le *membre de gauche* de (0.36).

L'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I = \pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ sur $H_{I,W}$ ne dépend pas du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp}^* . En effet on peut reformuler ce qui précède en disant que d'après la proposition 0.23 on peut trouver

- une réunion croissante (indexée par $\lambda \in \mathbb{N}$) de sous- \mathcal{O}_E -faisceaux constructibles $\mathfrak{F}_\lambda \subset \lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\eta^I}$ stables par les morphismes de Frobenius partiels (auxquels s'applique donc le lemme de Drinfeld),
- une suite décroissante d'ouverts denses $U_\lambda \subset X \setminus N$ tels que \mathfrak{F}_λ se prolonge en un faisceau lisse sur $(U_\lambda)^I$

de sorte que $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\overline{\eta}^I} = \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\overline{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}$. Alors la proposition 0.25 implique que le morphisme naturel

$$(0.37) \quad H_{I,W} = \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\Delta(\overline{\eta})}$$

(qui vient de la lissité de \mathfrak{F}_λ sur $(U_\lambda)^I \ni \Delta(\overline{\eta})$) est un isomorphisme. Or l'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ sur le membre de droite de (0.37), qui est donnée par le lemme de Drinfeld, ne dépend pas du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp} , et donc l'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ sur le membre de gauche n'en dépend pas non plus.

Remarque 0.27. Dans cet article nous montrons seulement que $H_{I,W}$ est une limite inductive de E -espaces vectoriels de dimension finie munis de représentations continues de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$. En fait Cong Xue a montré dans [Xue17] que $H_{I,W}$ est de dimension finie. Les arguments de notre article nous permettent de montrer notre résultat principal en nous passant de ce résultat, qui est de démonstration délicate, et est seulement disponible dans le cas des groupes déployés pour le moment.

Pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, l'isomorphisme de coalescence (0.17) respecte trivialement les parties Hecke-finies et induit donc un isomorphisme

$$(0.38) \quad H_{I,W} = \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\chi_\zeta} \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N,J,W^\zeta}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} = H_{J,W^\zeta}$$

où Δ désigne le morphisme diagonal $X \rightarrow X^I$ ou $X \rightarrow X^J$.

On note

$$(0.39) \quad \chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta}$$

l'isomorphisme (0.38) ci-dessus. Il est $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant, où $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ agit sur le membre de gauche par le morphisme diagonal

$$\text{Gal}(\overline{F}/F)^J \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)^I, (\gamma_j)_{j \in J} \mapsto (\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I}.$$

En effet, si $\Delta_\zeta : X^J \rightarrow X^I$ est le morphisme diagonal (0.16) et si la suite $(\mathfrak{F}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ est comme ci-dessus relativement à I et W , alors la suite $(\Delta_\zeta^*(\mathfrak{F}_\lambda))_{\lambda \in \mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés relativement à J et W^ζ , donc

$$\chi_\zeta : H_{I,W} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda|_{\Delta(\overline{\eta})} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \Delta_\zeta^*(\mathfrak{F}_\lambda)|_{\Delta(\overline{\eta})} = H_{J,W^\zeta}$$

est $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant.

Proposition 0.28 (Proposition 9.7). *Les $H_{I,W}$ vérifient les propriétés suivantes :*

a) *pour tout ensemble fini I ,*

$$W \mapsto H_{I,W}, \quad u \mapsto \mathcal{H}(u)$$

est un foncteur E -linéaire de la catégorie des représentations E -linéaires de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des limites inductives de représentations E -linéaires continues de dimension finie de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$,

b) *pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, on possède un isomorphisme*

$$\chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta},$$

qui est

– *fonctoriel en W , où W est une représentation de $(\widehat{G})^I$ et W^ζ désigne la représentation de $(\widehat{G})^J$ sur W obtenue en composant avec le morphisme diagonal*

$$(\widehat{G})^J \rightarrow (\widehat{G})^I, (g_j)_{j \in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i \in I}$$

– *$\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant, où $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ agit sur le membre de gauche par le morphisme diagonal*

$$\text{Gal}(\overline{F}/F)^J \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)^I, (\gamma_j)_{j \in J} \mapsto (\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I},$$

– *et compatible avec la composition, c'est-à-dire que pour $I \xrightarrow{\zeta} J \xrightarrow{\eta} K$ on a $\chi_{\eta \circ \zeta} = \chi_\eta \circ \chi_\zeta$,*

c) *pour $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$, on a un isomorphisme*

$$H_{\emptyset, \mathbf{1}} = C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E).$$

Par ailleurs les $H_{I,W}$ sont des modules sur $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$, de façon compatible avec les propriétés a), b), c) ci-dessus.

Démonstration de la proposition 0.28. Les propriétés a) et b) ont déjà été expliquées. On remarque qu'en appliquant b) à l'application évidente $\zeta_\emptyset : \emptyset \rightarrow \{0\}$, on obtient un isomorphisme

$$(0.40) \quad \chi_{\zeta_\emptyset} : H_{\emptyset, \mathbf{1}} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}, \mathbf{1}}$$

que l'on connaissait déjà par la remarque 0.5 (appliquée à $I = \{0\}$).

La propriété c) résulte du fait que la partie Hecke-finie de (0.5) est formée exactement des formes automorphes cuspidales, c'est-à-dire que

$$\left(C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E) \right)^{\text{Hf}} = C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E).$$

Preuve de \supset . Toute fonction cuspidale est Hecke-finie car le \mathcal{O}_E -module $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \mathcal{O}_E)$ est de type fini et stable par tous les opérateurs $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$.

Preuve de \subset . On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une fonction Hecke-finie f n'est pas cuspidale. Il existe alors un parabolique $P \subsetneq G$, de Levi M et radical unipotent U , tel que le terme constant $f_P : g \mapsto \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)$ soit non nul. Soit v une place de $X \setminus N$. Comme l'anneau des représentations (de dimension finie) de \widehat{M} est un module de type fini sur l'anneau des représentations de \widehat{G} , f_P est également Hecke-finie relativement aux opérateurs de Hecke pour M en v . Ceux-ci comprennent comme cas particuliers les translations par les éléments de $Z_M(F_v)$. On possède une application degré (relativement à M/Z), de $U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$ à valeurs dans un \mathbb{Z} -module libre de type fini, sur lequel $Z_M(F_v)$ agit par des translations non triviales. Or le support de f_P est inclus dans le translaté d'un cône dans ce \mathbb{Z} -module libre de type fini, et cela contredit le fait que f_P appartient à un espace vectoriel de dimension finie stable par $Z_M(F_v)$. On renvoie à la proposition 8.23 pour une preuve plus détaillée de $c)$. □

Dans le prochain paragraphe, nous expliquerons l'idée de la preuve du théorème 0.1 à l'aide des propriétés a), b), c) de la proposition 0.28. Cette esquisse sera complétée par la preuve de la compatibilité avec l'isomorphisme de Satake dans le paragraphe 0.6.

0.5. Idée de la preuve du théorème 0.1 partir de la proposition 0.28.
L'idée se résume ainsi : grâce à (0.40) et au c) de la proposition 0.28, on a

$$H_{\{0\},1} = C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E).$$

Pour obtenir la décomposition (0.3) il est donc équivalent de construire (quitte à augmenter E) une décomposition canonique

$$(0.41) \quad H_{\{0\},1} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}.$$

Cette dernière sera obtenue par décomposition spectrale d'une famille commutative d'endomorphismes de $H_{\{0\},1}$, appelés opérateurs d'excursion, que nous allons construire et étudier à l'aide des propriétés a) et b) de la proposition 0.28.

Soit I un ensemble fini et W une représentation E -linéaire de dimension finie de $(\widehat{G})^I$. On note $\zeta_I : I \rightarrow \{0\}$ l'application évidente, si bien que W^{ζ_I} est simplement W muni de l'action diagonale de \widehat{G} . Soit $x : \mathbf{1} \rightarrow W^{\zeta_I}$ et $\xi : W^{\zeta_I} \rightarrow \mathbf{1}$ des morphismes de représentations de \widehat{G} (autrement dit $x \in W$ et $\xi \in W^*$ sont invariants sous l'action diagonale de \widehat{G}). Soit $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$.

Définition 0.29. On définit l’opérateur

$$S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}} \in \text{End}(H_{\{0\},\mathbf{1}})$$

comme la composée

$$(0.42) \quad H_{\{0\},\mathbf{1}} \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \xrightarrow{\chi_{\zeta_I}^{-1}} H_{I,W} \xrightarrow{(\gamma_i)_{i \in I}} H_{I,W} \xrightarrow{\chi_{\zeta_I}} H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \xrightarrow{\mathcal{H}(\xi)} H_{\{0\},\mathbf{1}}.$$

Cet opérateur sera appelé “opérateur d’excursion”. En paraphrasant (0.42) il est la composée

- d’un opérateur de création associé à x , dont l’effet est de créer des pattes en le même point (générique) de la courbe,
- d’une action de Galois, qui promène les pattes sur la courbe indépendamment les unes des autres, puis les ramène au même point (générique) de la courbe,
- d’un opérateur d’annihilation associé à ξ , qui annihile les pattes.

La remarque suivante propose une description conjecturale des $H_{I,W}$ qui permet de mieux comprendre, de façon heuristique, le sens des opérateurs d’excursion. Bien sûr cette description conjecturale n’intervient nulle part dans les raisonnements.

Remarque 0.30. On conjecture qu’il existe un ensemble fini Σ (dépendant de N) de paramètres de Langlands semi-simples (bien déterminés à conjugaison près), et que, quitte à augmenter E , ils soient définis sur E et qu’on possède pour tout $\sigma \in \Sigma$ une représentation E -linéaire A_σ du centralisateur S_σ de l’image de σ dans \widehat{G} (triviale sur $Z_{\widehat{G}}$), de telle sorte que pour tout I et W

$$(0.43) \quad H_{I,W} \stackrel{?}{=} \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} \left(A_\sigma \otimes_E W_{\sigma^I} \right)^{S_\sigma},$$

où W_{σ^I} désigne la représentation de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ obtenue en composant la représentation W avec le morphisme $\sigma^I : \text{Gal}(\overline{F}/F)^I \rightarrow (\widehat{G}(E))^I$. De plus A_σ doit être un module sur $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$, et (0.43) doit être un isomorphisme de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$ -modules. Dans le cas particulier où $I = \emptyset$ et $W = 1$, (0.43) doit être la décomposition (0.41) et on doit avoir $\mathfrak{H}_\sigma = (A_\sigma)^{S_\sigma}$.

Ces conjectures sont bien connues des experts, par extrapolation des conjectures d’Arthur [Art89] et de Kottwitz [Kot90] sur les multiplicités dans les espaces de formes automorphes et dans la cohomologie des variétés de Shimura, et grâce à l’égalité montrée par Cong Xue [Xue17] entre une variante de $H_{I,W}$ (qui lui est conjecturalement égale) et la “cohomologie cuspidale”. Dans le cas de GL_r on s’attend à ce que Σ soit l’ensemble des représentations irréductibles de dimension r de $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})$ et que pour tout $\sigma \in \Sigma$, $S_\sigma = \mathbb{G}_m = Z_{\widehat{G}}$ et $A_\sigma = (\pi_\sigma)^{K_N}$ où π_σ est la représentation automorphe cuspidale correspondant à σ (voir [Laf02a] et la conjecture 2.35 de [Var04]). En général si σ est associé à un paramètre d’Arthur elliptique ψ (voir le paragraphe 12.2.2 ci-dessous), A_σ devrait être induit d’une représentation de dimension finie du sous-groupe de S_σ engendré par le centralisateur de ψ et par le sous-groupe diagonal $\mathbb{G}_m \subset SL_2$ (parce que nous considérons seulement la cohomologie en degré 0).

On conjecture de plus que (0.43) est fonctoriel en W et que pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$ il entrelace χ_ζ avec

$$\text{Id} : \bigoplus_{\sigma} \left(A_{\sigma} \otimes_E W_{\sigma I} \right)^{S_{\sigma}} \rightarrow \bigoplus_{\sigma} \left(A_{\sigma} \otimes_E (W^{\zeta})_{\sigma J} \right)^{S_{\sigma}}$$

(comme $W_{\sigma I}$ et $(W^{\zeta})_{\sigma J}$ sont tous les deux égaux à W comme E -espaces vectoriels, le morphisme Id a bien un sens et est $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant). Sous ces hypothèses, la composée (0.42) (qui définit $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$) agit sur $\mathfrak{H}_{\sigma} = (A_{\sigma})^{S_{\sigma}} \subset H_{\{0\},1}$ par la composée

$$(A_{\sigma})^{S_{\sigma}} \xrightarrow{\text{Id}_{A_{\sigma}} \otimes x} \left(A_{\sigma} \otimes_E W_{\sigma I} \right)^{S_{\sigma}} \xrightarrow{\text{Id}_{A_{\sigma}} \otimes (\gamma_i)_{i \in I}} \left(A_{\sigma} \otimes_E W_{\sigma I} \right)^{S_{\sigma}} \xrightarrow{\text{Id}_{A_{\sigma}} \otimes \xi} (A_{\sigma})^{S_{\sigma}}$$

c'est-à-dire par le produit par le scalaire $\langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i \in I} \cdot x \rangle = f((\sigma(\gamma_i))_{i \in I})$.

La conjecture (0.43) n'est pas démontrée mais suivant une idée de Drinfeld on peut montrer que les propriétés a) et b) de la proposition 0.28 suffisent à impliquer une décomposition assez proche de (0.43) (mais plus difficile à énoncer, car remplaçant la donnée de Σ et des A_{σ} par celle d'un "O-module sur le champ des paramètres de Langlands").

D'après l'observation 0.32 et la proposition 0.37 ci-dessous, la connaissance de $\langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i \in I} \cdot x \rangle$ (pour I, W, x, ξ et $(\gamma_i)_{i \in I}$ arbitraires) détermine σ à conjugaison près. Par conséquent si l'on croit à la conjecture (0.43), la décomposition (0.41) s'obtient par diagonalisation simultanée des opérateurs d'excursion. En fait nous ne savons pas montrer qu'ils sont diagonalisables, et nous obtiendrons la décomposition (0.41) par décomposition spectrale, c'est-à-dire "trigonalisation simultanée" des opérateurs d'excursion.

De plus on devine que les opérateurs d'excursion vérifient les propriétés énoncées dans le lemme suivant.

Cette remarque était heuristique et à partir de maintenant on oublie la conjecture (0.43) (sauf dans la remarque 0.35).

Le lemme suivant va résulter des propriétés a) et b) de la proposition 0.28.

Lemme 0.31 (Lemme 10.1). *Les opérateurs d'excursion $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ vérifient les propriétés suivantes :*

$$(0.44) \quad S_{I,W,x,u(\xi'),(\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I,W',u(x),\xi',(\gamma_i)_{i \in I}}$$

où $u : W \rightarrow W'$ est un morphisme $(\widehat{G})^I$ -équivariant et $x \in W$ et $\xi' \in (W')^*$ sont \widehat{G} -invariants,

$$(0.45) \quad S_{J,W^{\zeta},x,\xi,(\gamma_j)_{j \in J}} = S_{I,W,x,\xi,(\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I}},$$

$$(0.46)$$

$$S_{I_1 \cup I_2, W_1 \boxtimes W_2, x_1 \boxtimes x_2, \xi_1 \boxtimes \xi_2, (\gamma_i^1)_{i \in I_1} \times (\gamma_i^2)_{i \in I_2}} = S_{I_1, W_1, x_1, \xi_1, (\gamma_i^1)_{i \in I_1}} \circ S_{I_2, W_2, x_2, \xi_2, (\gamma_i^2)_{i \in I_2}},$$

$$(0.47)$$

$$S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i(\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i)_{i \in I}} = S_{I \cup I \cup I, W \boxtimes W^* \boxtimes W, \delta_W \boxtimes x, \xi \boxtimes \text{ev}_W, (\gamma_i)_{i \in I} \times (\gamma'_i)_{i \in I} \times (\gamma''_i)_{i \in I}}$$

où la plupart des notations sont évidentes, $I_1 \cup I_2$ et $I \cup I \cup I$ désignent des réunions disjointes, et $\delta_W : \mathbf{1} \rightarrow W \otimes W^*$ et $\text{ev}_W : W^* \otimes W \rightarrow \mathbf{1}$ sont les morphismes naturels.

La démonstration est très simple (elle utilise seulement les propriétés a) et b) de la proposition 0.28). Le lecteur peut lire dès à présent, s'il le souhaite, la preuve du lemme 10.1.

On note $\mathcal{B} \subset \widehat{\text{End}}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)}(H_{\{0,1\}})$ la sous-algèbre engendrée par tous les opérateurs d'excursion $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$. En vertu de (0.46), \mathcal{B} est commutative.

Dans la suite de l'introduction on considère \widehat{G} comme un schéma en groupes défini sur E .

Observation 0.32. Les fonctions

$$(0.48) \quad f : (g_i)_{i \in I} \mapsto \langle \xi, (g_i)_{i \in I} \cdot x \rangle$$

que l'on obtient en faisant varier W , x , et ξ sont exactement les fonctions régulières sur le quotient grossier de $(\widehat{G})^I$ par translation à gauche et à droite par \widehat{G} diagonal, que l'on notera $\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G}$.

Lemme 0.33 (Lemme 10.6). *L'opérateur $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ dépend seulement de I , f , et $(\gamma_i)_{i \in I}$, où f est donnée par (0.48).*

Cela résulte facilement de (0.44). Le lecteur peut lire dès à présent, s'il le souhaite, la démonstration du lemme 10.6.

Le lemme précédent permet d'introduire la notation suivante.

Définition 0.34. Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G})$ on pose

$$(0.49) \quad S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}} \in \mathcal{B}$$

où W, x, ξ sont tels que f satisfasse (0.48).

Cette nouvelle notation va permettre, dans les assertions (i) à (iv) de la proposition suivante, de formuler de façon plus synthétique les propriétés (0.45), (0.46) et (0.47).

Remarque 0.35. Si on se place dans l'heuristique de la remarque 0.30, on peut deviner facilement les propriétés énoncées dans la proposition suivante en remarquant que d'après la conjecture (0.43), $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ devrait agir sur \mathfrak{H}_σ par multiplication par le scalaire $f((\sigma(\gamma_i))_{i \in I})$.

Proposition 0.36 (Proposition 10.8). *Les opérateurs d'excursion $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ vérifient les propriétés suivantes:*

(i) *pour tout I et $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$,*

$$f \mapsto S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$$

est un morphisme d'algèbres commutatives $\mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G}) \rightarrow \mathcal{B}$,

(ii) *pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, toute fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G})$ et tout $(\gamma_j)_{j \in J} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^J$, on a*

$$S_{J,f^\zeta,(\gamma_j)_{j \in J}} = S_{I,f,(\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I}}$$

où $f^\zeta \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^J / \widehat{G})$ est définie par

$$f^\zeta((g_j)_{j \in J}) = f((g_{\zeta(i)})_{i \in I}),$$

(iii) *pour tout $f \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G})$ et $(\gamma_i)_{i \in I}, (\gamma'_i)_{i \in I}, (\gamma''_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ on a*

$$S_{I \cup I \cup I, \tilde{f}, (\gamma_i)_{i \in I} \times (\gamma'_i)_{i \in I} \times (\gamma''_i)_{i \in I}} = S_{I,f,(\gamma_i(\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i)_{i \in I}}$$

où $I \cup I \cup I$ est une réunion disjointe et $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^{I \cup I \cup I} / \widehat{G})$ est définie par

$$\tilde{f}((g_i)_{i \in I} \times (g'_i)_{i \in I} \times (g''_i)_{i \in I}) = f((g_i(g'_i)^{-1}g''_i)_{i \in I}),$$

(iv) pour tout I et tout f , le morphisme

$$(0.50) \quad \text{Gal}(\overline{F}/F)^I \rightarrow \mathcal{B}, \quad (\gamma_i)_{i \in I} \mapsto S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$$

est continu, avec \mathcal{B} munie de la topologie E -adique.

Esquisse de démonstration. Cela résulte formellement de la proposition 0.28. En effet, on déduit (ii) de (0.45). Pour montrer (i) on invoque (0.46) avec $I_1 = I_2 = I$, et on applique (0.45) à l'application évidente $\zeta : I \cup I \rightarrow I$. La propriété (iii) résulte de (0.47), après avoir remarqué que

$$\langle \xi \boxtimes \text{ev}_W, ((g_i)_{i \in I} \boxtimes (g'_i)_{i \in I} \boxtimes (g''_i)_{i \in I}) \cdot (\delta_W \boxtimes x) \rangle = \langle \xi, (g_i (g'_i)^{-1} g''_i)_{i \in I} \cdot x \rangle.$$

Enfin (iv) résulte du fait que $H_{I,W}$ est une limite inductive de représentations continues de dimension finie de $(\text{Gal}(\overline{F}/F))^I$. \square

On ne sait pas si \mathcal{B} est réduite. On possède néanmoins une décomposition spectrale (c'est-à-dire une décomposition en espaces propres généralisés, ou "espaces caractéristiques")

$$(0.51) \quad H_{\{0\},1} = \bigoplus_{\nu} \mathfrak{H}_{\nu}$$

où dans le membre de droite la somme directe est indexée par les caractères ν de \mathcal{B} . Quitte à augmenter E on suppose que tous les caractères de \mathcal{B} sont définis sur E .

La proposition suivante permet d'obtenir la décomposition (0.41) à partir de (0.51) en associant à chaque caractère ν un paramètre de Langlands σ .

Proposition 0.37. *Pour tout caractère ν de \mathcal{B} il existe un morphisme $\sigma : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ tel que*

(C1) σ prend ses valeurs dans $\widehat{G}(E')$, où E' est une extension finie de E , et il est continu,

(C2) σ est semi-simple, c'est-à-dire que si son image est incluse dans un parabolique elle est incluse dans un Levi associé (comme $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ est de caractéristique 0 cela équivaut à dire que l'adhérence de Zariski de son image est réductive [Ser05]),

(C3) pour tout I et $f \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G})$, on a

$$\nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i \in I}).$$

De plus σ est unique à conjugaison près par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$.

Démonstration. On renvoie à la preuve de la proposition 11.7 pour quelques détails supplémentaires. La preuve utilise uniquement la proposition 0.36. Soit ν un caractère de \mathcal{B} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $(\widehat{G})^n // \widehat{G}$ le quotient grossier de $(\widehat{G})^n$ par l'action de \widehat{G} par conjugaison diagonale, c'est-à-dire

$$h.(g_1, \dots, g_n) = (hg_1h^{-1}, \dots, hg_nh^{-1}).$$

Alors le morphisme

$$(\widehat{G})^n \rightarrow (\widehat{G})^{\{0, \dots, n\}}, (g_1, \dots, g_n) \mapsto (1, g_1, \dots, g_n)$$

induit un isomorphisme

$$\beta : (\widehat{G})^n // \widehat{G} \xrightarrow{\sim} \widehat{G} \backslash (\widehat{G})^{\{0, \dots, n\}} / \widehat{G},$$

d'où un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}((\widehat{G})^n // \widehat{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^{\{0, \dots, n\}} / \widehat{G}), \quad f \mapsto f \circ \beta^{-1}.$$

On introduit

$$\begin{aligned} \Theta_n^\nu : \mathcal{O}((\widehat{G})^n // \widehat{G}) &\rightarrow \mathcal{C}(\text{Gal}(\overline{F}/F)^n, E) \\ f &\mapsto [(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto \nu(S_{I, f \circ \beta^{-1}, (1, \gamma_1, \dots, \gamma_n)})]. \end{aligned}$$

La condition (C3) que doit vérifier σ se reformule de la façon suivante : pour tout n et pour tout $f \in \mathcal{O}((\widehat{G})^n // \widehat{G})$,

$$(0.52) \quad \Theta_n^\nu(f) = [(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto f((\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n)))].$$

On déduit immédiatement de la proposition 0.36 que la suite $(\Theta_n^\nu)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les propriétés suivantes:

- pour tout n , Θ_n^ν est un morphisme d'algèbres,
- la suite $(\Theta_n^\nu)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est fonctorielle par rapport à toutes les applications entre les ensembles $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que pour $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

arbitraire, $f \in \mathcal{O}((\widehat{G})^m // \widehat{G})$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^n$, on a

$$\Theta_n^\nu(f^\zeta)((\gamma_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}) = \Theta_m^\nu(f)((\gamma_{\zeta(i)})_{i \in \{1, \dots, m\}})$$

où $f^\zeta \in \mathcal{O}((\widehat{G})^n // \widehat{G})$ est définie par

$$f^\zeta((g_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}) = f((g_{\zeta(i)})_{i \in \{1, \dots, m\}}),$$

- pour $n \geq 1$, $f \in \mathcal{O}((\widehat{G})^n // \widehat{G})$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^{n+1}$ on a

$$\Theta_{n+1}^\nu(\widehat{f})(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) = \Theta_n^\nu(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n \gamma_{n+1})$$

où $\widehat{f} \in \mathcal{O}((\widehat{G})^{n+1} // \widehat{G})$ est définie par

$$\widehat{f}(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_1, \dots, g_n g_{n+1}).$$

Pour justifier la dernière propriété, on applique la propriété (iii) de la proposition 0.36 à

$$I = \{0, \dots, n\}, (\gamma_i)_{i \in I} = (1, \gamma_1, \dots, \gamma_n), (\gamma'_i)_{i \in I} = (1)_{i \in I}, (\gamma''_i)_{i \in I} = (1, \dots, 1, \gamma_{n+1})$$

et on utilise (ii) pour supprimer tous les 1 sauf le premier dans $(\gamma_i)_{i \in I} \times (\gamma'_i)_{i \in I} \times (\gamma''_i)_{i \in I}$.

On va montrer que ces propriétés de la suite $(\Theta_n^\nu)_{n \in \mathbb{N}^*}$ entraînent l'existence et l'unicité de σ vérifiant (C1), (C2) et (C3) (c'est-à-dire (0.52)).

Pour $G = GL_r$ le résultat est déjà connu: la suite $(\Theta_n^\nu)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est déterminée par $\Theta_1^\nu(\text{Tr})$ (qui doit être le caractère de σ) et $\Lambda^{r+1} \text{St} = 0$ implique la relation de pseudo-caractère d'où l'existence de σ par [Tay91]. On renvoie à la remarque 11.8 pour plus de détails.

En général on utilise des résultats de Richardson [Ric88]. On dit qu'un n -uplet $(g_1, \dots, g_n) \in \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})^n$ est semi-simple si tout parabolique le contenant possède un sous-groupe de Levi associé le contenant. Comme $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ est de caractéristique 0 cela équivaut à la condition que l'adhérence de Zariski $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ du sous-groupe $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ engendré par g_1, \dots, g_n est réductive [Ser05]. D'après le théorème 3.6 de [Ric88] la \widehat{G} -orbite (par conjugaison) de (g_1, \dots, g_n) est fermée dans $(\widehat{G})^n$ si et seulement si (g_1, \dots, g_n) est semi-simple. Donc les points sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ du quotient grossier

$(\widehat{G})^n // \widehat{G}$ (qui correspondent aux \widehat{G} -orbites fermées définies sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ dans $(\widehat{G})^n$) sont en bijection avec les classes de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ de n -uplets semi-simples $(g_1, \dots, g_n) \in \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})^n$.

Pour tout n -uplet $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^n$ on note $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ le point défini sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ du quotient grossier $(\widehat{G})^n // \widehat{G}$ associé au caractère

$$\mathcal{O}((\widehat{G})^n // \widehat{G}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}, f \mapsto \Theta_n^\nu(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

On note $\xi_n^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ la classe de conjugaison de n -uplets semi-simples correspondant à $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ par le résultat de [Ric88] rappelé ci-dessus.

La relation (0.52) équivaut à la condition que pour tout n et pour tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_n), (\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n)) \in (\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}))^n$ (qui n'est pas en général semi-simple) est au-dessus de $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Unicité de σ (à conjugaison près). On choisit n et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ tels que $\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n)$ engendrent un sous-groupe Zariski dense dans $\overline{\text{Im}(\sigma)}$. Comme σ est supposé semi-simple, $(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n))$ est semi-simple. On fixe (g_1, \dots, g_n) dans $\xi_n^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Donc $(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n))$ est conjugué à (g_1, \dots, g_n) et quitte à conjuguer σ on peut supposer qu'il lui est égal. Alors σ est déterminé de façon unique car pour tout $\gamma, \sigma(\gamma)$ appartient à l'adhérence de Zariski du sous-groupe engendré par (g_1, \dots, g_n) et $(g_1, \dots, g_n, \sigma(\gamma)) \in \xi_{n+1}^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$, donc la connaissance de $\xi_{n+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$ détermine uniquement $\sigma(\gamma)$.

Existence de σ . Pour tout n et tout $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^n$ on choisit $(g_1, \dots, g_n) \in \xi_n^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ (bien défini à conjugaison près). On choisit alors n et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^n$ tels que

- (H1) la dimension de $\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle}$ est la plus grande possible,
- (H2) le centralisateur $C(g_1, \dots, g_n)$ de $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ est le plus petit possible (dimension minimale puis nombre de composantes connexes minimal).

On fixe $(g_1, \dots, g_n) \in \xi_n^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ pour le reste de la démonstration et on construit une application

$$\sigma : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

en demandant que pour tout $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$, $\sigma(\gamma)$ est l'unique élément g de $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ tel que $(g_1, \dots, g_n, g) \in \xi_{n+1}^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$. L'existence et l'unicité de g sont justifiées de la façon suivante.

- **A) Existence de g :** pour $(h_1, \dots, h_n, h) \in \xi_{n+1}^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$, (h_1, \dots, h_n) est forcément semi-simple. En effet (h_1, \dots, h_n) est au-dessus de $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ et $(g_1, \dots, g_n) \in \xi_n^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ donc d'après le théorème 5.2 de [Ric88], $\overline{\langle h_1, \dots, h_n \rangle}$ admet un sous-groupe de Levi isomorphe à $\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle}$, or

$$\dim(\overline{\langle h_1, \dots, h_n \rangle}) \leq \dim(\overline{\langle h_1, \dots, h_n, h \rangle}) \leq \dim(\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle})$$

où la deuxième inégalité est assurée par (H1).

Donc quitte à conjuguer (h_1, \dots, h_n, h) on peut supposer que $(h_1, \dots, h_n) = (g_1, \dots, g_n)$ et on prend alors $g = h$.

- **B) Unicité de g :** on a $C(g_1, \dots, g_n, g) \subset C(g_1, \dots, g_n)$ et l'égalité a lieu par (H2), donc g commute avec $C(g_1, \dots, g_n)$ et comme il était bien déterminé modulo conjugaison par $C(g_1, \dots, g_n)$ il est unique.

Puis on montre que l'application σ que l'on vient de construire est un morphisme de groupes. En effet soient $\gamma, \gamma' \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$. Le même argument que dans A) ci-dessus montre qu'il existe g, g' tels que

$$(0.53) \quad (g_1, \dots, g_n, g, g') \in \xi_{n+2}^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma, \gamma').$$

Grâce aux propriétés vérifiées par la suite $(\Theta_n^\nu)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on voit que $\xi_{n+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma\gamma')$ est l'image de $\xi_{n+2}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma, \gamma')$ par le morphisme

$$(\widehat{G})^{n+2} // \widehat{G} \rightarrow (\widehat{G})^{n+1} // \widehat{G}, (h_1, \dots, h_n, h, h') \mapsto (h_1, \dots, h_n, hh').$$

On en déduit que (g_1, \dots, g_n, gg') est au-dessus de $\xi_{n+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma\gamma')$. De plus (g_1, \dots, g_n, gg') est semi-simple par le même argument que dans A), car

$$\dim(\overline{\langle g_1, \dots, g_n, gg' \rangle}) \leq \dim(\overline{\langle g_1, \dots, g_n, g, g' \rangle}) \leq \dim(\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle})$$

(où la dernière inégalité vient de (H1)). Donc (g_1, \dots, g_n, gg') appartient à $\xi_{n+1}^{\text{ss}}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma\gamma')$ et $gg' = \sigma(\gamma\gamma')$. Les mêmes arguments montrent que

$$(0.54) \quad g = \sigma(\gamma) \quad \text{et} \quad g' = \sigma(\gamma').$$

On a finalement montré que $\sigma(\gamma\gamma') = \sigma(\gamma)\sigma(\gamma')$.

Donc σ est un morphisme de groupes à valeurs dans $\widehat{G}(E')$ (où E' est une extension finie de E telle que g_1, \dots, g_n appartiennent à $\widehat{G}(E')$). L'argument pour montrer que σ est continu est le suivant. On sait que pour toute fonction f sur $(\widehat{G}_{E'})^{n+1} // \widehat{G}_{E'}$, l'application

$$\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow E', \quad \gamma \mapsto f(g_1, \dots, g_n, \sigma(\gamma)) = \Theta_{n+1}^\nu(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$$

est continue. Or le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((\widehat{G}_{E'})^{n+1} // \widehat{G}_{E'}) &\rightarrow \mathcal{O}(\widehat{G}_{E'} // C(g_1, \dots, g_n)) \\ f &\mapsto [g \mapsto f(g_1, \dots, g_n, g)] \end{aligned}$$

est surjectif (parce que (g_1, \dots, g_n) est semi-simple, donc son orbite par conjugaison est une sous-variété affine fermée de $(\widehat{G}_{E'})^n$, isomorphe à $\widehat{G}_{E'}/C(g_1, \dots, g_n)$). De plus, en notant $D(g_1, \dots, g_n)$ le centralisateur de $C(g_1, \dots, g_n)$ (qui contient l'image de σ), le morphisme de restriction

$$\mathcal{O}(\widehat{G}_{E'} // C(g_1, \dots, g_n)) = \mathcal{O}(\widehat{G}_{E'})^{C(g_1, \dots, g_n)} \rightarrow \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$$

est surjectif parce que la restriction $\mathcal{O}(\widehat{G}_{E'}) \rightarrow \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$ est évidemment surjective, qu'elle le reste lorsqu'on prend les invariants par le groupe réductif $C(g_1, \dots, g_n)$ (agissant par conjugaison), et que $C(g_1, \dots, g_n)$ agit trivialement sur $\mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$. Donc pour toute fonction $h \in \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$, l'application

$$\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow E', \quad \gamma \mapsto h(\sigma(\gamma))$$

est continue, et on a montré que σ est continu.

Il reste à montrer (0.52), c'est-à-dire que pour $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{O}((\widehat{G})^m // \widehat{G})$ et $(\delta_1, \dots, \delta_m) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^m$, on a

$$f(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_m)) = (\Theta_m^\nu(f))(\delta_1, \dots, \delta_m).$$

Par les mêmes arguments que pour (0.53) et (0.54) on montre que

$$(g_1, \dots, g_n, \sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_m)) \in \xi_{n+m}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m).$$

Donc $(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_m))$ est au-dessus de $\xi_m(\delta_1, \dots, \delta_m)$. □

Donc on a obtenu la décomposition (0.3). Ceci achève la démonstration du théorème 0.1, à condition d'admettre les deux résultats suivants, qui seront justifiés dans le prochain paragraphe:

- tout σ apparaissant dans la décomposition (0.3) est non ramifié en dehors de N ,
- la décomposition (0.3) est compatible avec l'isomorphisme de Satake en toutes les places de $X \setminus N$.

0.6. Compatibilité avec l'isomorphisme de Satake aux places non ramifiées. Le but de ce paragraphe est de montrer les deux résultats admis à la fin du paragraphe précédent.

Lemme 0.38. *Tout paramètre σ apparaissant dans (0.3) est non ramifié sur $X \setminus N$.*

Démonstration (Pour un énoncé plus fort et plus de détails on renvoie à la proposition 10.10). Soit v une place de $X \setminus N$. On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$, d'où une inclusion $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit $I_v = \text{Ker}(\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}})$ le groupe d'inertie en v . Alors pour I, W, x, ξ comme dans (0.42), l'image de la composée $H_{\{0\}, \mathbf{1}} \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} H_{\{0\}, W\xi_I} \xrightarrow{\chi_{\xi_I}^{-1}} H_{I, W}$ (qui est le début de (0.42)) est formée d'éléments invariants par $(I_v)^I$, car les opérateurs de création sont des morphismes de faisceaux sur $\Delta(X \setminus N)$ tout entier (et en particulier en $\Delta(v)$). Donc pour $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ et $(\delta_i)_{i \in I} \in (I_v)^I$ on a

$$(0.55) \quad S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i \delta_i)_{i \in I}}.$$

Grâce à la preuve de l'unicité de σ incluse dans la démonstration de la proposition 0.37, la relation (0.55) implique que pour tout σ correspondant à un caractère ν de \mathcal{B} , on a $I_v \subset \text{Ker } \sigma$ et donc σ est non ramifié en v . □

Le lemme suivant montre que les opérateurs de Hecke en les places non ramifiées sont des cas particuliers d'opérateurs d'excursion.

Soit v une place dans $X \setminus N$. On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. Comme précédemment $\mathbf{1} \xrightarrow{\delta_V} V \otimes V^*$ et $V \otimes V^* \xrightarrow{\text{ev}_V} \mathbf{1}$ sont les morphismes naturels.

Lemme 0.39. *Pour tout $d \in \mathbb{N}$ et tout $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$ tel que $\text{deg}(\gamma) = d$, $S_{\{1, 2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, \mathbf{1})}$ dépend seulement de d , et si $d = 1$ il est égal à $T(h_{V, v})$.*

Démonstration. On fixe un point géométrique \overline{v} au-dessus de v et une flèche de spécialisation $\text{sp}_v : \overline{\eta} \rightarrow \overline{v}$, associés au plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$ choisi ci-dessus. On

note encore \mathfrak{sp}_v la flèche de spécialisation $\Delta(\bar{\eta}) \rightarrow \Delta(\bar{v})$ égale à son image par Δ . Pour que le diagramme suivant tienne dans la page on pose $I = \{1, 2\}$ et $W = V \boxtimes V^*$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E) & & & & \\
 \downarrow \mathfrak{c}_{\delta_V}^\# |_{\bar{v}} & \searrow \mathfrak{c}_{\delta_V}^\# & & & \\
 \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{v})} \right)^{\text{Hf}} & \xrightarrow{\mathfrak{sp}_v^*} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hf}} & \equiv & H_{I,W} \\
 \downarrow F_{\{1\}}^{\text{deg}(v)d} & & & & \downarrow (\gamma, 1) \\
 \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{v})} \right)^{\text{Hf}} & \xrightarrow{\mathfrak{sp}_v^*} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hf}} & \equiv & H_{I,W} \\
 \downarrow \mathfrak{c}_{\text{ev}_V}^b |_{\bar{v}} & \swarrow \mathfrak{c}_{\text{ev}_V}^b & & & \\
 C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E) & & & &
 \end{array}$$

est commutatif (la commutativité du grand rectangle sera justifiée dans le lemme 10.4). Or $S_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, 1)}$ est égal par définition à la composée par le chemin le plus à droite. Donc il est égal à la composée donnée par la colonne de gauche. Par conséquent il dépend seulement de d . Lorsque $d = 1$ la composée donnée par la colonne de gauche est égale par définition à $S_{V,v}$, et donc à $T(h_{V,v})$ par la proposition 0.16. \square

Remarque 0.40. On n’a calculé la composée de la colonne de gauche que pour $d = 1$ mais pour d’autres valeurs de d elle n’apporte rien de nouveau car on pourrait montrer qu’elle est égale à une combinaison de $S_{W,v}$ avec W représentation irréductible de \widehat{G} .

La proposition suivante affirme la compatibilité de la décomposition (0.3) avec l’isomorphisme de Satake en les places de $X \setminus N$.

Proposition 0.41. *Soit σ apparaissant dans (0.3) et v une place de $X \setminus N$. Alors σ est non ramifié en v et pour toute représentation irréductible V de \widehat{G} , $T(h_{V,v})$ agit sur \mathfrak{H}_σ par multiplication par le scalaire $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$, où χ_V est le caractère de V et Frob_v est un relèvement arbitraire d’un élément de Frobenius en v .*

Démonstration. Le fait que σ est non ramifié en v a déjà été établi dans le lemme 0.38. On reprend les notations du lemme 0.39. Comme $(\text{ev}_V, (\sigma(\gamma), 1) \cdot \delta_V) = \chi_V(\sigma(\gamma))$ ce lemme implique que pour tout $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ avec $\text{deg}(\gamma) = 1$, et toute représentation irréductible V de \widehat{G} , \mathfrak{H}_σ est inclus dans l’espace propre généralisé (ou espace caractéristique) de $T(h_{V,v})$ pour la valeur propre $\chi_V(\sigma(\gamma))$. Or on sait que les opérateurs de Hecke aux places non ramifiées sont diagonalisables (car ce sont des opérateurs normaux sur l’espace hermitien des formes automorphes cuspidales à coefficients dans \mathbb{C}). Donc $T(h_{V,v})$ agit sur \mathfrak{H}_σ par homothétie de rapport $\chi_V(\sigma(\gamma))$. \square

Cela termine la preuve du théorème 0.1.

0.7. Remarques supplémentaires. La décomposition (0.3) est certainement plus fine en général que celle obtenue par diagonalisation des opérateurs de Hecke en les places non ramifiées. Même en prenant en compte les classes d'isomorphisme de représentations de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ on ne récupère pas en général la décomposition (0.3), et bien que les formules de multiplicités d'Arthur fassent intervenir une somme sur les paramètres d'Arthur, une telle décomposition canonique semble inconnue en général dans le cas des corps de nombres. En effet d'après des exemples de [Bla94, Lap99], pour certains groupes G (y compris déployés), la même représentation de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ peut apparaître dans des espaces \mathfrak{H}_σ différents, à cause du phénomène suivant. Il y a des exemples de groupes finis Γ et de morphismes $\tau, \tau' : \Gamma \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tels que τ et τ' ne soient pas conjugués mais que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\tau(\gamma)$ et $\tau'(\gamma)$ soient conjugués. On s'attend alors à ce qu'il existe un morphisme surjectif $\rho : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \Gamma$ partout non ramifié et une représentation (H_π, π) de $G(\mathbb{A})$ tels que $(H_\pi)^{K_N}$ apparaisse à la fois dans $\mathfrak{H}_{\tau \circ \rho}$ et $\mathfrak{H}_{\tau' \circ \rho}$. Jusqu'à présent le seul moyen systématique de distinguer ces copies de π était le programme de Langlands géométrique (c'est d'ailleurs ce qui explique que notre approche permette aussi de le faire, grâce au lien avec le programme de Langlands géométrique qui est expliqué dans la section 15).

Les exemples de Blasius et Lapid sont pour $G = SL_r$, $r \geq 3$ (en fait dans ce cas on peut retrouver *a posteriori* la décomposition (0.3) à l'aide du plongement $SL_r \hookrightarrow GL_r$, cf. la remarque 12.13). On renvoie à [Lar94, Lar96] pour une liste de groupes \widehat{G} pour lesquels existent des exemples Γ, τ, τ' comme ci-dessus (et pour certains de ces groupes, par exemple E_8 , nous ne savons pas comment retrouver la décomposition (0.3) autrement que par le programme de Langlands géométrique ou par les méthodes du présent article, qui ne marchent que sur les corps de fonctions). Plus récemment S. Wang [Wan07, Wan12, Wan15] a donné des exemples de (Γ, τ, τ') comme ci-dessus, mais avec Γ semi-simple connexe.

0.8. Lien avec les travaux antérieurs. Le lien avec le programme de Langlands géométrique est extrêmement étroit, et fait l'objet de la section 15.

Au contraire, les méthodes utilisées dans ce travail sont complètement différentes de celles fondées sur la formule des traces qui ont été développées notamment par Drinfeld [Dri80, Dri87a, Dri88, Dri87b], Laumon, Rapoport et Stuhler [LRS93], Laumon [Lau96, Lau97a, Lau97b], Laurent Lafforgue [Laf97, Laf98, Laf02a, Laf02b], Ngô Bao Châu [NBC99, NBC06a], Eike Lau [Lau04, Lau07], Ngô Dac Tuan [NDT07, NDT09, NDT11], Ngô Bao Châu et Ngô Dac Tuan [NN08], Kazhdan et Varshavsky [KV13, Var09] et Badulescu et Roche [BR17].

Cependant l'action sur la cohomologie des groupes de permutations des pattes des chtoucas apparaît déjà dans les travaux de Ngô Bao Châu, Ngô Dac Tuan et Eike Lau que nous venons de citer. Ces actions des groupes de permutations jouent par ailleurs un rôle essentiel dans le programme de Langlands géométrique, et notamment dans la preuve par Gaitsgory de la conjecture d'annulation [Gai04]. D'autre part la coalescence des pattes apparaît dans la thèse de Eike Lau [Lau04] et elle est aussi utilisée dans le preprint [BV06] de Braverman et Varshavsky (afin de montrer la non nullité de certains des morphismes (15.1)). Les sections 2 et 4 du présent article contiennent des rappels de l'article [Var04] de Varshavsky, dont les résultats généraux sur la structure locale et les propriétés des champs de G -chtoucas

sont fondamentaux, et aussi du preprint très éclairant [BV06] de Braverman et Varshavsky. Dans le cadre du lien entre cet article et le programme de Langlands géométrique on mentionnera dans la section 15 l'analogie entre les résultats de cet article et le corollaire 4.5.5 de [Gai15].

0.9. Considérations historiques. L'idée de caractériser les classes de conjugaison de représentations de groupes de monodromie par un nombre fini d'invariants numériques apparaît déjà dans les travaux de Poincaré. Dans [Poi84] il considère une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{P}^1 - \{x_0, \dots, x_n\}$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et dont l'espace des solutions est localement de dimension r . Poincaré caractérise les classes de conjugaison par $GL_r(\mathbb{C})$ des représentations de monodromie par les polynômes caractéristiques d'un nombre fini d'éléments de $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_0, \dots, x_n\})$. Il note que les polynômes caractéristiques des éléments de $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_0, \dots, x_n\})$ qui sont conjugués à un petit cercle autour d'un des x_i se calculent de façon locale (un peu comme pour les Frob_v dans notre problème) alors que les autres invariants sont globaux. Comme $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_0, \dots, x_n\})$ est un groupe libre à n générateurs, les invariants numériques considérés par Poincaré sont associés à des fonctions dans $\mathcal{O}((GL_r)^n // GL_r)$. C'est Hilbert qui a montré dans [Hil93] que de telles algèbres sont de type fini.

0.10. Plan de l'article. La première partie est consacrée à l'étude des champs de chtoucas, de leur cohomologie et des morphismes de création et d'annihilation. La section 1 rappelle l'équivalence de Satake géométrique. Les sections 2 à 4 rappellent la définition et les propriétés élémentaires des champs classifiant les G -chtoucas. En particulier les sections 2 et 4 reprennent presque mot à mot des parties de l'article [Var04] de Varshavsky. La section 5 contient la construction des morphismes de création et d'annihilation. La section 6 est consacrée à la preuve de la proposition 0.16. Dans la section 7 on montre les relations d'Eichler-Shimura.

La deuxième partie fait intervenir les actions des groupes de Galois. Dans la section 8 on utilise les relations d'Eichler-Shimura pour munir $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\overline{\eta}^f}\right)^{\text{Hf}}$ d'une action de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$. Dans la section 9 on construit les morphismes d'excursion et on étudie leurs propriétés. On en déduit dans la section 11 la décomposition (0.3). Pour ne pas mélanger les difficultés, on a rédigé les sections 1 à 11 en supposant G déployé. La section 12 apporte les modifications nécessaires pour traiter le cas des groupes non nécessairement déployés. La section 13 montre que la décomposition (0.3) existe aussi à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$. Enfin la section 14 indique les modifications nécessaires pour traiter le cas des groupes métaplectiques, la section 15 explique le lien avec le programme de Langlands géométrique et la section 16 concerne le cas de GL_r .

0.11. Notations et conventions. Les notations et conventions suivantes concernent surtout les sections 1 à 11. Elles reprennent celles de [Var04].

1) Soit G un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini \mathbb{F}_q (les notations pour les groupes non nécessairement déployés seront introduites seulement à la section 12). On note G^{der} le groupe dérivé de G , G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{der} , $G^{\text{ab}} := G/G^{\text{der}}$ l'abélianisé de G , et G^{ad} le groupe adjoint de G . Soit $B \supset T \supset Z$ un sous-groupe de Borel, un tore maximal et le centre de G , respectivement. On note $B^{\text{sc}} \supset T^{\text{sc}} \supset Z^{\text{sc}}$ les sous-groupes correspondants de

G^{sc} , et de même pour G^{der} et G^{ad} . On note $X^*(T)$, $X_*(T)$ les groupes des poids et copoids de G , et $X_+^*(T)$, $X_+^-(T)$ les sous-ensembles de poids et copoids dominants. Les poids (resp. copoids) de G sont munis de l'ordre (standard) suivant : $\lambda_1 \leq \lambda_2$ si et seulement si la différence $\lambda_1 - \lambda_2$ est une combinaison à coefficients rationnels positifs de racines (resp. coracines) simples de G . On adopte des notations semblables pour G^{sc} , G^{der} et G^{ad} . On note ρ la demi-somme des coracines positives de G . On note \widehat{G} le groupe dual de Langlands de G , considéré comme un groupe réductif connexe déployé défini sur \mathbb{Q}_ℓ (et même sur \mathbb{Z}_ℓ dans la section 13). Pour toute extension E de \mathbb{Q}_ℓ on note \widehat{G}_E le groupe algébrique défini sur E et $\widehat{G}(E)$ les points à valeurs dans E . Les représentations irréductibles de \widehat{G} sont en bijection avec $X_+^*(T)$.

2) Pour tout poids dominant λ de G on note V_λ le module de Weyl de G de plus haut poids λ .

3) Pour tout schéma fini N sur \mathbb{F}_q , on note $\mathcal{O}_N := \mathbb{F}_q[N]$. On note G_N la restriction à la Weil de G de N à \mathbb{F}_q (c'est un schéma en groupes lisse de dimension $\deg(N)$ sur \mathbb{F}_q).

4) Soit X une courbe projective lisse géométriquement irréductible sur \mathbb{F}_q . On note F le corps des fonctions rationnelles sur X . Pour tout point fermé v de X , on note \mathcal{O}_v l'anneau complété du faisceau structurel en v , F_v son corps des fractions et $k(v)$ son corps résiduel, de sorte que $v = \text{Spec}(k(v))$ est un sous-schéma de X . On note $\mathbb{A} = \prod' F_v$ l'anneau des adèles. On note $\eta = \text{Spec}(F)$ le point générique de X . Pour tout ensemble fini I on note F^I le corps des fonctions de X^I et $\eta^I = \text{Spec}(F^I)$ le point générique.

5) Pour tout S -point x d'un schéma X , on note $\Gamma_x \subset X \times S$ le graphe de x .

6) Sauf mention explicite du contraire, E désignera une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ contenant une racine carrée de q , et \mathcal{O}_E son anneau d'entiers.

7) Pour tout champ \mathcal{Y} sur un corps fini \mathbb{F}_q , on définit le faisceau d'intersection $\text{IC}_{\mathcal{Y}}^E$ comme le prolongement intermédiaire du E -faisceau pervers constant sur un sous-champ ouvert \mathcal{Y}^0 de \mathcal{Y} tel que le champ réduit correspondant $(\mathcal{Y}^0)_{\text{red}}$ soit lisse. Ce faisceau d'intersection $\text{IC}_{\mathcal{Y}}^E$ est normalisé pour être pur de poids 0. Cependant on se trouvera souvent dans une situation où $\text{IC}_{\mathcal{Y}}^E$ est universellement localement acyclique relativement à un morphisme de \mathcal{Y} vers une base lisse (qui sera typiquement $(X \setminus N)^I$), et où on normalisera le degré et le poids de $\text{IC}_{\mathcal{Y}}^E$ relativement à ce morphisme.

8) Pour tout champ \mathcal{Y} sur \mathbb{F}_q , on note $\text{Frob}_{\mathcal{Y}/\mathbb{F}_q} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ le morphisme de Frobenius absolu sur \mathbb{F}_q . On notera souvent $\text{Frob}_{\mathcal{Y}}$ ou simplement Frob au lieu de $\text{Frob}_{\mathcal{Y}/\mathbb{F}_q}$.

9) Pour tout champ S sur \mathbb{F}_q et pour tout faisceau cohérent ou pour tout G -torseur \mathcal{F} sur $X \times S$, on écrira ${}^\tau \mathcal{F}$ au lieu de $(\text{Id}_X \times \text{Frob}_S)^*(\mathcal{F})$. On adopte une notation semblable pour les morphismes.

10) On adopte les conventions du chapitre 1.1 de [Del80] concernant les A -faisceaux constructibles, pour $A = \mathcal{O}_E, E$ ou $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Tous les A -faisceaux considérés dans cet article seront constructibles. On ne considérera jamais les limites inductives autrement que comme des systèmes inductifs abstraits, sauf pour leurs fibres : si $\varinjlim \mathcal{F}_\mu$ est un système inductif de A -faisceaux constructibles sur une variété Y et \bar{x} est un point géométrique de Y au-dessus d'un point x , $\varinjlim \mathcal{F}_\mu|_{\bar{x}}$ sera considéré comme un A -module, muni d'une action de $\pi_1(x, \bar{x})$.

11) Si k est un corps, \bar{k} désignera une clôture algébrique de k .

1. CHAMPS DE HECKE, GRASSMANNIENNE AFFINE DE BEILINSON-DRINFELD, ET ÉQUIVALENCE DE SATAKE GÉOMÉTRIQUE

Cette section constitue un rappel de l'équivalence de Satake géométrique, due à Lusztig, Drinfeld, Ginzburg, et Mirkovic–Vilonen [Lus83, Gin95, BD99, MV07]. On renvoie à [MV07, BD99, Gai07, Gai01, Var04, BV06] pour plus de détails.

Soit G un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini \mathbb{F}_q . Soit X une courbe lisse projective et géométriquement irréductible sur \mathbb{F}_q .

Soit Bun_G le champ lisse sur \mathbb{F}_q classifiant les G -torseurs sur X , c'est-à-dire que $\text{Bun}_G(S) = \{G\text{-torseur sur } X \times S, \text{localement trivial pour la topologie étale}\}$.

D'après le théorème 2 de [DS95] tout G -torseur sur $X \times S$ devient localement trivial pour la topologie de Zariski de $X \times S$ après un changement de base étale convenable sur S . Cependant nous n'aurons pas besoin de ce résultat.

Si N est un sous-schéma fini de X on note $\text{Bun}_{G,N}$ le champ classifiant les G -torseurs sur X avec structure de niveau N , c'est-à-dire que

$$(1.1) \quad \text{Bun}_{G,N}(S) = \{\mathcal{G} \in \text{Bun}_G(S), \psi : \mathcal{G}|_{N \times S} \xrightarrow{\sim} G|_{N \times S}\}.$$

Plus généralement on utilisera une version en famille de $\text{Bun}_{G,N}$ quand N se déplace sur la courbe. Pour tout schéma T sur \mathbb{F}_q et tout sous-schéma fermé $Q \subset X \times T$ qui est fini sur T et localement défini par une équation (c'est-à-dire que Q est un diviseur de Cartier relatif effectif), on note $\text{Bun}_{G,Q}$ le champ lisse sur T tel que pour tout schéma S sur T ,

$$(1.2) \quad \text{Bun}_{G,Q}(S) = \{\mathcal{G} \in \text{Bun}_G(S), \psi : \mathcal{G}|_{Q \times (X \times T)(X \times S)} \xrightarrow{\sim} G|_{Q \times (X \times T)(X \times S)}\}.$$

On note G_Q le schéma en groupes lisse sur T défini comme la restriction à la Weil de G de Q à T . Il est de dimension relative $\text{deg}(Q) \dim G$ sur T , où $\text{deg}(Q)$ est le degré de Q (qui est une fonction localement constante sur T). On remarque que $\text{Bun}_{G,Q}$ est un G_Q -torseur sur $\text{Bun}_G \times T$.

Les composantes irréductibles de Bun_G ne sont pas de type fini mais Bun_G est une réunion d'ouverts $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$, définis par troncature par le polygone de Harder-Narasimhan de \mathcal{G} , et dont les composantes irréductibles sont de type fini. Plus précisément, pour tout $\mu \in X_*(T^{\text{ad}})$, on pose

$$(1.3) \quad \text{Bun}_G^{\leq \mu}(S) = \{\mathcal{G} \in \text{Bun}_G(S) \mid \text{pour tout point géométrique } s \in S, \text{ toute } B\text{-structure } \mathcal{B} \text{ sur } \mathcal{G}_s \text{ et tout } \lambda \in X_+^*(T^{\text{ad}}), \text{deg } \mathcal{B}_\lambda \leq \langle \mu, \lambda \rangle\},$$

où \mathcal{B}_λ est le fibré en droites correspondant. Il s'agit donc d'une troncature de Harder-Narasimhan pour le G^{ad} -torseur déduit de \mathcal{G} . D'après le lemme A.3 de [Var04], $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$ est ouvert dans Bun_G et ses composantes irréductibles (ou connexes) sont de type fini. Cela nous suffit mais nous mentionnons qu'une étude fine de la stratification de Harder-Narasimhan-Shatz est réalisée dans [Sch15]. Dans la section 12 consacrée aux groupes non nécessairement déployés on définira des troncatures à l'aide d'un plongement de G^{ad} dans SL_r et on pourrait évidemment faire la même chose ici, ce qui aurait l'avantage de n'utiliser les troncatures de Harder-Narasimhan que pour GL_r .

Pour tout sous-schéma fini N de X , on note $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$ l'image inverse de $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$ dans $\text{Bun}_{G,N}$. On omettra souvent la lettre G dans toutes ces notations.

Remarque 1.1 ([BD99] et lemme 2.2 de [Var04]). L'ensemble $\pi_0(\text{Bun}_G)$ des composantes connexes de Bun_G est canoniquement isomorphe à $\pi_1(G) := X_*(T)/X_*(T^{\text{sc}})$ (le quotient du réseau des copoids par le réseau des coracines) qui est lui-même canoniquement isomorphe au groupe des caractères de $Z_{\widehat{G}}$, le centre du groupe dual de Langlands. On note $[\omega] \in \pi_1(G)$ la classe de $\omega \in X_*(T)$.

La définition suivante généralise légèrement la définition 2.4 de [Var04] (voir aussi la remarque 2.7 c) de [Var04]).

Définition 1.2. a) Soit I un ensemble fini, $k \in \mathbb{N}$ et I_1, \dots, I_k des parties de I telles que $\{I_1, \dots, I_k\}$ forme une partition de I . Soit N un sous-schéma fini de X . On note $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ le champ tel que pour tout schéma S sur \mathbb{F}_q , $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$ classifie les données consistant en

- i) des points $x_i \in (X \setminus N)(S)$ pour $i \in I$,
- ii) $(\mathcal{G}_0, \psi_0), \dots, (\mathcal{G}_k, \psi_k) \in \text{Bun}_{G,N}(S)$,
- iii) pour $j \in \{1, \dots, k\}$, un isomorphisme

$$\phi_j : \mathcal{G}_{j-1}|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})},$$

préservant les structures de niveau, c'est-à-dire que $\psi_j \circ \phi_j|_{N \times S} = \psi_{j-1}$.

On omet N de la notation lorsque $N = \emptyset$.

b) Pour tout I -uplet $\underline{\omega} = (\omega_i)_{i \in I}$ de copoids dominants de G , on note $\text{Hecke}_{N,I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ le sous-champ fermé de $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ défini par la condition que, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, la "position relative" de \mathcal{G}_{j-1} (ou plutôt $\phi_j(\mathcal{G}_{j-1})$) par rapport à \mathcal{G}_j en les points x_i (pour $i \in I_j$) est bornée par ω_i dans le sens faible suivant:

- iii) $_{\underline{\omega}}$ $\phi_j((\mathcal{G}_{j-1})_{V_\lambda}) \subset (\mathcal{G}_j)_{V_\lambda} (\sum_{i \in I_j} \langle \lambda, \omega_i \rangle \Gamma_{x_i})$ pour tout poids dominant λ de G .

Remarque 1.3. D'après le lemme 3.1 de [Var04], $\text{Hecke}_{N,I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est un champ algébrique, localement de type fini sur \mathbb{F}_q . On va bientôt introduire un sous-champ fermé $\text{Hecke}_{N,I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \subset \text{Hecke}_{N,I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$, qui est celui que l'on utilisera. Lorsque G^{der} est simplement connexe il est égal au sous-champ réduit, en général il serait égal au sous-champ réduit du sous-champ fermé de $\text{Hecke}_{N,I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ donné par une condition analogue à la condition iii) $'_{\underline{\omega}}$ de la définition 2.4 de [Var04] pourvu que l'on remplace, pour tout point géométrique s de S la condition sur la composante connexe de Bun_G par une condition sur la composante connexe de la grassmannienne affine en tout point de l'ensemble $\{x_i(s)\}$. La condition iii) $'_{\underline{\omega}}$ de la définition 2.4 de [Var04] (qui figurait aussi dans les versions 1 à 3 de cet article sur arXiv) ne donnait donc sans doute pas la bonne définition de $\text{Hecke}_{N,I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (même à réduction près) pour G^{der} non simplement connexe.

Dans la suite le point de $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$ fourni par les données i), ii), iii) ci-dessus sera noté sous la forme plus concise

$$(1.4) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\mathcal{G}_k, \psi_k)).$$

Remarque 1.4. Le champ $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ dépend de l'ordre des parties I_1, \dots, I_k , c'est pourquoi nous écrivons (I_1, \dots, I_k) et non $\{I_1, \dots, I_k\}$. Pour simplifier nous appellerons (I_1, \dots, I_k) une partition de I . On remarque que si certaines parties I_j sont vides, on peut les supprimer.

Soit $k' \in \{1, \dots, k\}$ et $(I'_1, \dots, I'_{k'})$ une partition de I obtenue à partir de (I_1, \dots, I_k) en réunissant certaines parties dont les indices sont adjacents. Plus précisément on choisit des entiers $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_{k'} = k$ et on pose $I'_{j'} = \bigcup_{j_{j'-1} < j \leq j_{j'}} I_j$.

On considère alors le morphisme d'oubli

$$(1.5) \quad \pi_{(I'_1, \dots, I'_{k'})}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Hecke}_{N,I}^{(I'_1, \dots, I'_{k'})}$$

qui envoie (1.4) sur

$$((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}'_0, \psi'_0) \xrightarrow{\phi'_1} (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) \xrightarrow{\phi'_2} \dots \xrightarrow{\phi'_{k'}} (\mathcal{G}'_{k'}, \psi'_{k'}))$$

avec $(\mathcal{G}'_{j'}, \psi'_{j'}) = (\mathcal{G}_{j_j}, \psi_{j_j})$ et $\phi'_{j'} = \phi_{j_j} \circ \dots \circ \phi_{j_{j'-1}+1}$. Autrement dit on oublie certaines étapes intermédiaires entre (\mathcal{G}_0, ψ_0) et (\mathcal{G}_k, ψ_k) .

Un cas particulier intéressant est le suivant:

$$\pi_{(I)}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Hecke}_{N,I}^{(I)}$$

envoie (1.4) sur

$$((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_k \circ \dots \circ \phi_1} (\mathcal{G}_k, \psi_k)).$$

Notation 1.5. On note p_0 le morphisme $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Bun}_{G,N}$ qui envoie (1.4) sur (\mathcal{G}_0, ψ_0) . On note $\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ l'image inverse de $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$ par p_0 .

La raison pour laquelle on utilise dans cet article les troncatures par les polygones de Harder-Narasimhan de \mathcal{G}_0 est qu'elles sont préservées par les morphismes d'oubli $\pi_{(I'_1, \dots, I'_{k'})}^{(I_1, \dots, I_k)}$.

Voici la définition de la *grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld* (sur X^I).

Définition 1.6. On note $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ (*resp.* $\text{Gr}_{I, \lesssim \omega}^{(I_1, \dots, I_k)}$) l'ind-schéma (*resp.* le schéma) classifiant les mêmes données que $\text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ (*resp.* $\text{Hecke}_{I, \lesssim \omega}^{(I_1, \dots, I_k)}$), plus une trivialisaton de \mathcal{G}_k .

Quand I est un singleton, $\text{Gr}_I^{(I)}$ sera aussi noté Gr . Sa fibre Gr_x en un point géométrique x de X est la grassmannienne affine habituelle, c'est-à-dire le quotient fpqc $G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$ où \mathcal{O}_x désigne la complétion en x de l'anneau local des fonctions sur X , et F_x est son corps des fractions.

Notation 1.7. Soit S un schéma et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de S -points de X . On note $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ le voisinage formel de $\bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$ dans $X \times S$. Un G -torseur \mathcal{G} sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$ est la même chose qu'une limite projective de G -torseurs sur $\Gamma_{\sum n x_i}$ pour n tendant vers l'infini.

Soit J une partie de I et \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux G -torseurs sur $\Gamma_{\sum \infty x_i}$. Sans chercher à donner un sens au voisinage épointé $\Gamma_{\sum \infty x_i} \setminus (\bigcup_{i \in J} \Gamma_{x_i})$, on définit un isomorphisme

$$(1.6) \quad \phi : \mathcal{G}|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \setminus (\bigcup_{i \in J} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'|_{\Gamma_{\sum \infty x_i} \setminus (\bigcup_{i \in J} \Gamma_{x_i})}$$

comme la donnée pour toute représentation de dimension finie V de G d'un morphisme

$$V_{\mathcal{G}} \rightarrow V_{\mathcal{G}'}(N \sum_{i \in J} x_i)$$

où l'ordre N du pôle dépend de V , de telle sorte que ces morphismes soient fonctoriels en V et compatibles au produit tensoriel et au dual. Cette notation (1.6) est utilisée aussi par exemple dans [Gai01] et dans le paragraphe 2.4 de [Gai07].

Construction 1.8. Soit S un schéma et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de S -points de X . Alors un point de $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$ au-dessus $(x_i)_{i \in I}$ équivaut à la donnée

- de G -torseurs $\mathcal{G}_0, \dots, \mathcal{G}_k$ sur $\Gamma_{\Sigma \infty x_i}$,
- d'isomorphismes $\phi_j : \mathcal{G}_{j-1}|_{\Gamma_{\Sigma \infty x_i} \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j|_{\Gamma_{\Sigma \infty x_i} \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})}$,
- d'une trivialisaton $\theta : \mathcal{G}_k \xrightarrow{\sim} G$ sur $\Gamma_{\Sigma \infty x_i}$.

En effet pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, on étend \mathcal{G}_j en un G -torseur sur $X \times S$ en le recollant sur $\Gamma_{\Sigma \infty x_i} \setminus \cup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$ avec le G -torseur trivial sur $(X \times S) \setminus \cup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$, grâce à $\theta \circ \phi_k \circ \dots \circ \phi_{j+1}$. Ce recollement est justifié par la remarque 2.3.7 et le théorème 2.12.1 de [BD99] qui généralise le lemme de descente de Beauville-Laszlo [BL95]. Bien que ce théorème concerne les modules cohérents, on peut l'appliquer ici car un G -torseur est aussi un foncteur tensoriel de la catégorie des représentations de dimension finie de G vers la catégorie des fibrés vectoriels (voir la preuve du théorème 2.3.4 de [BD99]). Quand nous ferons référence à cette construction, nous dirons qu'un tel S -point de $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ est associé à

$$(1.7) \quad ((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{G}_{k-1} \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \xrightarrow{\theta} G|_{\Gamma_{\Sigma \infty x_i}}).$$

La grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld a été introduite dans [BD99] et joue un rôle fondamental dans l'équivalence de Satake géométrique [MV07] (voir aussi [Gai07]). La fibre de $\text{Gr}_I^{(I)}$ en un point géométrique $(x_i)_{i \in I} \in X^I$ est le produit de la grassmannienne affine habituelle en les points de l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$. Le cas particulier où $\#I = 2$ est étudié en détail pour le produit de fusion dans [MV07]. Plus généralement, la grassmannienne affine possède la propriété de factorisation suivante.

Remarque 1.9. Soit $\zeta : I \rightarrow J$ une application surjective et (I_1, \dots, I_k) une partition de I . Soit U_ζ l'ouvert de X^I formé des $(x_i)_{i \in I}$ tels que $x_i \neq x_j$ si $\zeta(i) \neq \zeta(j)$. Alors $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\prod_{j \in J} \text{Gr}_{\zeta^{-1}(\{j\})}^{(I_1 \cap \zeta^{-1}(\{j\}), \dots, I_k \cap \zeta^{-1}(\{j\}))}$ sont canoniquement isomorphes au-dessus de U_ζ .

Pour tout $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ on note $\Gamma_{\Sigma n_i x_i}$ le sous-schéma fermé de $X \times X^I$ dont l'idéal est engendré, localement pour la topologie de Zariski, par $\prod_{i \in I} t_i^{n_i}$, où t_i est une équation du graphe Γ_{x_i} . On note $G_{\Sigma n_i x_i}$ le schéma en groupes lisse sur X^I égal à la restriction à la Weil de G du sous-schéma fermé $\Gamma_{\Sigma_{i \in I} n_i x_i} \subset X \times X^I$ à X^I . C'est évidemment un quotient de $G_{\Sigma \infty x_i}$ (défini comme la restriction à la Weil de G de $\Gamma_{\Sigma \infty x_i}$ à X^I).

On a une action évidente de $G_{\Sigma \infty x_i}$ sur $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ par changement de trivialisaton de \mathcal{G}_k . Autrement dit, pour tout schéma S et toute section γ de G sur $\Gamma_{\Sigma \infty x_i}$, l'action de γ envoie (1.7) sur

$$((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \xrightarrow{L_\gamma \circ \theta} G|_{\Gamma_{\Sigma \infty x_i}})$$

(où L_γ est l'automorphisme du G -torseur trivial donné par la multiplication à gauche par γ).

Proposition 1.10. *Si les entiers n_i sont assez grands en fonction des copoids ω_i , cette action de $G_{\Sigma \infty x_i}$ sur $\text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ se factorise à travers le quotient $G_{\Sigma n_i x_i}$. \square*

Remarque 1.11. Par conséquent, si les entiers n_i sont comme dans la proposition précédente, pour tout schéma S , à la donnée de

- a) S -points $(x_i)_{i \in I}$,
- b) $\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k$, où les \mathcal{G}_i sont des G -torseurs sur $\Gamma_{\Sigma \infty x_i}$ et les ϕ_i satisfont la condition iii) $_{\underline{\omega}}$ de la définition 1.2,
- c) une trivialisaton de $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\Sigma n_i x_i}}$,

on associe un S -point de $\text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (par la construction 1.8, après avoir étendu de manière arbitraire la trivialisaton de \mathcal{G}_k de $\Gamma_{\Sigma n_i x_i}$ à $\Gamma_{\Sigma \infty x_i}$). Par conséquent, aux données de a) et b) on associe un S -point de $\text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}/G_{\Sigma n_i x_i}$, sur lequel le $G_{\Sigma n_i x_i}$ -torseur tautologique est $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\Sigma n_i x_i}}$. Dans la suite ce S -point sera souvent noté

$$(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k) \in \text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}/G_{\Sigma n_i x_i}.$$

On va définir maintenant le sous-schéma fermé $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \subset \text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$. On commence par rappeler que si I est un singleton, $\text{Gr}_I^{(I)}$ est un schéma sur X dont la fibre en un point géométrique x de X est la grassmannienne affine habituelle Gr_x , c'est-à-dire le quotient fpqc $G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$. Il est bien connu que les $G(\mathcal{O}_x)$ -orbites dans Gr_x sont des sous-schémas localement fermés indexés par les copoids dominants ω de G . Plus précisément on note $\text{Gr}_{x, \omega}^0$ la $G(\mathcal{O}_x)$ -orbite de t^ω où t est une uniformisante de \mathcal{O}_x . On note $\text{Gr}_{x, \omega}$ son adhérence de Zariski, qui est la réunion des orbites $\text{Gr}_{x, \lambda}^0$ telles que λ soit un poids de la représentation irréductible de \widehat{G} de plus haut poids ω .

Habituellement $\text{Gr}_{x, \omega}$ est noté $\overline{\text{Gr}}_{x, \omega}$ et $\text{Gr}_{x, \lambda}^0$ est noté $\text{Gr}_{x, \lambda}$. Les notations utilisées ici sont mieux adaptées pour nous (car nous utilisons presque exclusivement les adhérences) et elles sont compatibles avec [Var04].

Définition 1.12. Quand I est un singleton on note $\text{Gr}_{I, \omega}^{(I)}$ le sous-schéma fermé réduit de $\text{Gr}_I^{(I)}$ dont la fibre en un point $x \in X$ est $\text{Gr}_{x, \omega}$. En général soit $U \subset X^I$ le complémentaire de toutes les diagonales, c'est-à-dire $U = \{(x_i)_{i \in I}, \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$. On a un isomorphisme

$$\theta : \text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}|_U \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} \text{Gr}_{\{i\}, \lesssim \omega_i}^{\{\{i\}\}}|_U$$

grâce à la remarque 1.9. On définit alors $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme le sous-schéma fermé réduit de $\text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ égal à l'adhérence de Zariski de $\theta^{-1}\left(\prod_{i \in I} \text{Gr}_{\{i\}, \omega_i}^{\{\{i\}\}}|_U\right)$.

Il est bien connu qu'il existe un isomorphisme

$$(1.8) \quad \beta_{I, \infty}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \xrightarrow{\sim} \left(\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} \text{Bun}_{G, \Sigma \infty x_i} \right) / G_{\Sigma \infty x_i}$$

où $G_{\Sigma \infty x_i}$ agit diagonalement. En fait on utilisera plutôt l'isomorphisme (1.9) ci-dessous où les modifications sont bornées et $G_{\Sigma \infty x_i}$ est remplacé par $G_{\Sigma n_i x_i}$. L'avantage est que l'on reste dans le cadre des champs d'Artin et surtout que

l'isomorphisme (1.9) va permettre dans le lemme 1.14 de construire un morphisme lisse, qui serait de dimension infinie si on avait utilisé $G_{\sum \infty x_i}$.

Soit $\underline{n} = (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ comme dans la proposition 1.10. On a alors un isomorphisme

$$(1.9) \quad \beta_{I, \lesssim \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Hecke}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \xrightarrow{\sim} \left(\text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \right) / G_{\sum n_i x_i}$$

(où $G_{\sum n_i x_i}$ agit diagonalement). Il est défini de la manière suivante. D'abord le $G_{\sum n_i x_i}$ -torseur \mathcal{A} sur $\text{Hecke}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ associé à ce morphisme est $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}}$, pour

$$\left((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \right) \in \text{Hecke}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}(S).$$

Autrement dit l'espace total de \mathcal{A} est constitué par les trivialisations κ de $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}}$.

Ensuite le morphisme $\mathcal{A} \rightarrow \text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i}$ envoie

$$\left(\left((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \right), \kappa : \mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}} \xrightarrow{\sim} G|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}} \right)$$

sur le produit

- du point de $\text{Gr}_{I, \lesssim \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ associé par la remarque 1.11 à

$$\left((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \right) \text{ et } \kappa,$$

- de (\mathcal{G}_k, κ) dans $\text{Bun}_{G, \sum n_i x_i}$.

Définition 1.13. On définit $\text{Hecke}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme l'image inverse de

$$\left(\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \right) / G_{\sum n_i x_i}$$

par l'isomorphisme $\beta_{I, \lesssim \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$.

Par définition on a donc un isomorphisme

$$(1.10) \quad \beta_{I, \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Hecke}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \xrightarrow{\sim} \left(\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \right) / G_{\sum n_i x_i}$$

(où $G_{\sum n_i x_i}$ agit diagonalement). L'isomorphisme inverse de $\beta_{I, \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ envoie

$$(y, (\mathcal{G}, \kappa)) \in \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \text{ sur } \left((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \right)$$

où $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}$ et $(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k)$ est la modification de \mathcal{G} associée au point $y \in \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ grâce à la structure de niveau κ . On vérifie que ce morphisme se factorise par le quotient par l'action diagonale de $G_{\sum n_i x_i}$.

Comme $\text{Bun}_{G, \sum n_i x_i}$ est lisse sur X^I , cela entraîne immédiatement le lemme suivant.

Lemme 1.14. Soit $\underline{n} = (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ comme dans la proposition précédente. Alors le morphisme

$$(1.11) \quad \delta_{(I), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Hecke}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$$

égal à la première composante de $\beta_{I, \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est lisse. □

Le lemme suivant apparaît dans [MV07] et résulte aussi des lemmes 3.1 et A.12 de [Var04].

Lemme 1.15. *Le morphisme $\pi_{(I_1, \dots, I_k)}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I'_1, \dots, I'_k)}$ est projectif, surjectif et petit.* □

On a un morphisme évident

$$(1.12) \quad \kappa_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Gr}_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \right)$$

qui envoie

$$\left((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \xrightarrow{\theta} G \Big|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}} \right)$$

sur le produit des points $(\mathcal{G}_{j-1} \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{G}_j) \in \text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}$ (avec les notations de la construction 1.8 et de la remarque 1.11, c'est-à-dire que le $G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}$ -torseur tautologique est $\mathcal{G}_j \Big|_{\Gamma_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}}$). Si les entiers m_i sont assez grands en fonction des n_i et des ω_i , il se factorise à travers un morphisme

$$(1.13) \quad \tilde{\kappa}_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Gr}_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} m_i x_i} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \right).$$

Lemme 1.16. *Les morphismes $\kappa_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\tilde{\kappa}_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sont lisses.*

Démonstration. Il suffit de prouver la lissité de $\kappa_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)}$. On la démontre par récurrence sur k : κ se factorise à travers le morphisme évident

$$\text{Gr}_{I, (\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \prod_{j=1}^{k-1} \left(\text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \right) \times \text{Gr}_{I_k, (\omega_i)_{i \in I_k}}^{(I_k)}$$

qui est essentiellement une version tordue en famille, paramétrée par $\text{Gr}_{I_k, (\omega_i)_{i \in I_k}}^{(I_k)}$, de morphismes similaires à $\kappa_{I \setminus I_k, (\omega_i)_{i \in I \setminus I_k}}^{(I_1, \dots, I_{k-1})}$. □

Nous rappelons maintenant l'équivalence de Satake géométrique. Les notations suivantes sont commodes. Si W est une représentation E -linéaire de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ on la décompose en somme d'irréductibles:

$$(1.14) \quad W = \bigoplus_{\underline{\omega} \in (X_*^+(T))^I} \left(\bigotimes_{i \in I} V_{\omega_i} \right) \otimes_E \mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$$

où les $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ sont des E -espaces vectoriels de dimension finie, et sont presque tous nuls. On définit alors $\text{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme la réunion de tous les sous-schémas $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \subset \text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ pour $\underline{\omega} = (\omega_i)_{i \in I}$ tel que $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ est non nul.

Pour tout point géométrique $x \in \widehat{X}$, l'équivalence de Satake géométrique de Lusztig, Drinfeld, Ginzburg, et Mirkovic–Vilonen [Lus83, Gin95, BD99, MV07] est une équivalence de la catégorie des représentations de dimension finie de \widehat{G} vers la catégorie des faisceaux pervers $G(\mathcal{O}_x)$ -équivariants sur la grassmannienne affine $\text{Gr}_x = G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$. De plus cette équivalence est un foncteur tensoriel, lorsque le but est muni du produit de convolution, ou de fusion (avec la modification de la contrainte de commutativité qui sera rappelée dans la remarque 1.19).

D’après [MV07, BD99, Gai07, Gai01, Var04] nous avons le théorème suivant, où nous nous limitons à ce qui est nécessaire pour notre article: un foncteur de la catégorie de représentations de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des faisceaux pervers $G_{\sum \infty x_i}$ -équivariants sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$, vérifiant certaines propriétés. Dans [Gai07] Gaitsgory énonce un résultat plus fort, qui décrit cette dernière catégorie uniquement à l’aide de \widehat{G} . Dans le théorème suivant comme dans le reste de l’article nous dirons “à décalage près” au lieu de “à décalage et torsion à la Tate près”. On va énoncer le théorème suivant avec des coefficients dans E ou \mathcal{O}_E mais le cas de \mathcal{O}_E ne servira que dans la section 13 et peut donc être sauté en première lecture.

Théorème 1.17 (Un sens de l’équivalence de Satake géométrique, [MV07, BD99, Gai07]). *Soit \mathcal{A} égal à E ou \mathcal{O}_E . On a un foncteur canonique*

$$W \mapsto \mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

de la catégorie des représentations \mathcal{A} -linéaires de type fini de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des \mathcal{A} -faisceaux pervers $G_{\sum \infty x_i}$ -équivariants sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$.

De plus si $\mathcal{A} = E$, $\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est supporté par $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (défini juste après (1.14)) et on peut donc le considérer comme un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$ (où les entiers n_i sont assez grands et le décalage est déterminé par la condition que l’image inverse sur $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est perverse relativement à X^I). Cela reste vrai si $\mathcal{A} = \mathcal{O}_E$, avec $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ un sous-schéma fermé de type fini assez grand de $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$, dépendant de W d’une façon qui ne sera pas précisée ici.

Les $\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sont universellement localement acycliques par rapport au morphisme vers X^I . De plus ils vérifient les propriétés suivantes:

- a) Lorsque $\mathcal{A} = E$ et que $W = \boxtimes_{i \in I} V_{\omega_i}$ est irréductible, le faisceau pervers (à décalage près) $\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\mathrm{Gr}_{I, \omega}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}$ est le faisceau d’intersection de $\mathrm{Gr}_{I, \omega}^{(I_1, \dots, I_k)}$, avec la normalisation perverse relative à X^I et la structure $G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}$ -équivariante naturelle.
- b) On a un isomorphisme canonique

$$\left(\pi_{(I'_1, \dots, I'_k)} \right)_! \left(\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)} \right) \simeq \mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I'_1, \dots, I'_k)}.$$

- c) Si $W = \boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} W_j$ où W_j est une représentation de $(\widehat{G})^{I_j}$ sur un \mathcal{A} -module libre de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)} \simeq \left(\tilde{\kappa}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)} \right)^* \left(\boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} \mathcal{S}_{I_j, W_j, \mathcal{A}}^{(I_j)} \right)$$

où on applique la contrainte de commutativité modifiée de [MV07] qui sera rappelée dans la remarque 1.19 ci-dessous.

- d) Soient I, J des ensembles finis et $\zeta : I \rightarrow J$ une application. On note

$$\Delta_\zeta : X^J \rightarrow X^I, \quad (x_j)_{j \in J} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i \in I}$$

le morphisme diagonal associé à ζ . Soit W une représentation \mathcal{A} -linéaire de type fini de \widehat{G}^I . On note W^ζ la représentation de \widehat{G}^J qui est la composée

de la représentation W avec le morphisme diagonal

$$\widehat{G}^J \rightarrow \widehat{G}^I, \quad (g_j)_{j \in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i \in I}.$$

Soit (J_1, \dots, J_k) une partition de J . On en déduit une partition (I_1, \dots, I_k) de I en posant $I_j = \zeta^{-1}(J_j)$ pour tout j . On a alors un isomorphisme canonique

$$(1.15) \quad \Delta_{\zeta}^* \left(\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)} \right) \simeq \mathcal{S}_{J, W_{\zeta}, \mathcal{A}}^{(J_1, \dots, J_k)}$$

où Δ_{ζ} désigne (le quotient par $G_{\sum n_i x_i}$ de) l'inclusion

$$\mathrm{Gr}_J^{(J_1, \dots, J_k)} = \mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{X^I} X^J \hookrightarrow \mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}.$$

De plus (1.15) est fonctoriel en W et compatible avec la composition pour ζ .

Remarque 1.18. Le cas intéressant dans la condition d) est celui où ζ est surjective. Il exprime la compatibilité avec le produit de fusion dans la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld, c'est-à-dire le fait que l'équivalence de Satake géométrique est un foncteur tensoriel. Les propriétés a) et b) auraient pu être énoncées avec des partitions plus générales, mais au prix de notations beaucoup plus lourdes.

Remarque 1.19. La contrainte de commutativité est définie par la convention *modifiée*, introduite dans la discussion qui précède la proposition 6.3 de [MV07]. C'est seulement avec cette convention modifiée que la catégorie tensorielle des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$ -équivariants sur la grassmannienne affine (munie du produit de fusion) est équivalente à la catégorie tensorielle des représentations de type fini de \widehat{G} , et c'est elle qui intervient dans l'énoncé de la correspondance de Langlands géométrique. Pour plus de détails, voir [MV07] et [BD99]. Voici un bref rappel. Il se trouve que

- pour toute composante connexe de la grassmannienne affine, les strates sont toutes de dimension paire ou toutes de dimension impaire (on parle alors de composante paire ou impaire),
- d'après le lemme 3.9 de [MV07], si un faisceau $\mathcal{S}_{I_j, W_j, \mathcal{A}}^{(I_j)}$ est supporté sur une composante paire (*resp.* impaire), sa cohomologie totale est concentrée en degrés cohomologiques pairs (*resp.* impairs).

La contrainte de commutativité modifiée consiste à ajouter aux signes habituels donnés par les règles de Koszul un signe moins lorsque l'on permute deux faisceaux $\mathcal{S}_{I_j, W_j, \mathcal{A}}^{(I_j)}$ et $\mathcal{S}_{I_{j'}, W_{j'}, \mathcal{A}}^{(I_{j'})}$ supportés sur deux composantes connexes impaires de la grassmannienne affine. Autrement dit c'est la contrainte de commutativité naturelle que l'on aurait si on normalisait les faisceaux $\mathcal{S}_{I_j, W_j, \mathcal{A}}^{(I_j)}$ pour que leur cohomologie totale soit en degré pair. Le foncteur fibre donné par la cohomologie totale, de la catégorie des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$ -équivariants sur la grassmannienne affine, munie du produit de fusion (avec cette contrainte de commutativité modifiée) vers la catégorie des \mathcal{A} -modules de type fini est donc tensoriel, d'où une équivalence avec la catégorie tensorielle $\mathrm{Rep}(\widehat{G})$ des représentations de \widehat{G} sur des \mathcal{A} -modules de type fini (où \widehat{G} est défini comme le groupe d'automorphismes du foncteur fibre).

Démonstration. Le théorème résulte essentiellement du théorème 2.6 de [Gai07] (qui montre un résultat beaucoup plus fort). L'argument que nous allons donner est inspiré de la preuve du théorème 2.6 de [Gai07] (donnée dans l'appendice B de [Gai07]). Plus précisément notre argument est identique à celui de [Gai07] quand I est un singleton, et plus simple en général (ce qui est normal puisque nous montrons un résultat plus faible). Mirkovic et Vilonen [MV07] associent à toute représentation \mathcal{A} -linéaire de type fini W de \widehat{G} un faisceau pervers $G_{\infty x}$ -équivariant sur $\mathrm{Gr}_{\{0\}}^{\{0\}}$. On en déduit par convolution ou fusion, pour toute famille $(W_i)_{i \in I}$ de représentations \mathcal{A} -linéaires de type fini de \widehat{G} un \mathcal{A} -faisceau pervers $G_{\sum \infty x_i}$ -équivariant $\mathcal{S}_{I, \boxtimes W_i, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ et de plus ces faisceaux vérifient les propriétés a), b), c), d) dans le cas particulier des représentations W de $(\widehat{G})^I$ de la forme $\boxtimes_{i \in I} W_i$. Soit \mathcal{R} l'algèbre des fonctions régulières sur \widehat{G} (à coefficients dans \mathcal{A}), considérée comme ind-objet de $\mathrm{Rep}(\widehat{G})$ par l'action de \widehat{G} sur lui-même par multiplication à gauche (on notera qu'on peut, si on veut, écrire \mathcal{R} comme une limite inductive de représentations de \widehat{G} sur des \mathcal{A} -modules libres de type fini). Alors $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{R}$ est l'algèbre des fonctions régulières sur \widehat{G}^I , considérée comme ind-objet de $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$ par l'action de \widehat{G}^I sur lui-même par multiplication à gauche. On définit alors

$$\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)} = \left(\mathcal{S}_{I, \boxtimes_{i \in I} \mathcal{R}, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)} \otimes W \right)^{\widehat{G}^I}.$$

Dans la formule précédente l'action de \widehat{G}^I sur $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{R}$ par multiplication à droite munit $\mathcal{S}_{I, \boxtimes_{i \in I} \mathcal{R}, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ d'une action de \widehat{G}^I , et on prend les invariants par l'action diagonale de \widehat{G}^I sur $\mathcal{S}_{I, \boxtimes_{i \in I} \mathcal{R}, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)} \otimes W$. Les propriétés a), b), c), d) se déduisent aisément de cette formule. Pour d) on utilise le fait que pour toute application $I \rightarrow J$, $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{R}$ considéré comme ind-objet de $\mathrm{Rep}(\widehat{G}^I)$ (par l'action de \widehat{G}^I sur lui-même par multiplication à gauche) est égale à l'induite de $\boxtimes_{i \in J} \mathcal{R}$ par le morphisme $\widehat{G}^J \rightarrow \widehat{G}^I$ (si $I \rightarrow J$ n'est pas surjective, ce morphisme n'est pas injectif et pour induire on commence par prendre les invariants par son noyau). De plus cette égalité est compatible avec les actions à droite de \widehat{G}^J et \widehat{G}^I . \square

Remarque 1.20. Dans le théorème précédent $Z_{\sum_{i \in I} \infty x_i} \subset G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ agit trivialement sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ et donc sur tous les faisceaux $\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (en effet il suffit de le démontrer pour I singleton et alors cela résulte de [MV07], parce que les projectifs $P_Z(\nu, \mathcal{A})$ permettent de reconstruire toute la catégorie des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$ -équivariants sur la grassmannienne affine et que $Z(\mathcal{O})$ agit trivialement sur eux d'après la formule (9.9) de [MV07]). On note $G^{\mathrm{ad}} = G/Z$. On peut donc considérer $\mathcal{S}_{I, W, \mathcal{A}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme un faisceau pervers (à un décalage près) $G_{\sum \infty x_i}^{\mathrm{ad}}$ -équivariant sur $\mathrm{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ ou si on préfère comme un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\mathrm{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\mathrm{ad}}$ (avec les entiers n_i assez grands).

Pour toute place $v \in |X|$ et pour toute représentation irréductible V de \widehat{G} , on note $h_{V, v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v), \mathcal{O}_E)$ la fonction sphérique associée à V (ou si on préfère au caractère χ_V) par l'isomorphisme de Satake classique. La compatibilité entre l'isomorphisme de Satake classique et l'équivalence de Satake géométrique s'exprime par le fait que, en notant ω le plus haut poids de V et ρ

la demi-somme des coracines positives de \widehat{G} , $(-1)^{\langle 2\rho, \omega \rangle} h_{V,v}$ est égale à la trace de $\text{Frob}_{\text{Gr}_v/k(v)}$ sur le faisceau pervers $\mathcal{S}_{\{0\},V,E}^{\{0\}}|_{\text{Gr}_v}$ (qui est le faisceau d'intersection de la strate fermée $\text{Gr}_{v,\omega}$, où ω est le plus haut poids de V). Les fonctions $h_{V,v}$ forment une base de $C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v), \mathcal{O}_E)$ sur \mathcal{O}_E (cela est même vrai sur $\mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}]$, cf. la proposition 3.6 de [Gro98]).

Remarque 1.21. Le signe $(-1)^{\langle 2\rho, \omega \rangle}$ dans la définition de $h_{V,v}$ ci-dessus est justifié par le fait que la strate $\text{Gr}_{v,\omega}$ est de dimension $\langle 2\rho, \omega \rangle$. Autrement dit $h_{V,v}$ serait la trace de $\text{Frob}_{\text{Gr}_v/k(v)}$ sur $\mathcal{S}_{\{0\},V,E}^{\{0\}}|_{\text{Gr}_v}$ si on l'avait normalisé pour que sa cohomologie totale soit supportée en degrés cohomologiques pairs (mais sans changer la torsion à la Tate). Ce choix est cohérent avec le fait que la contrainte de commutativité modifiée de [MV07] est celle que l'on obtiendrait naturellement avec de telles normalisations, ainsi qu'on l'a rappelé dans la remarque 1.19. La cohérence de ce choix est la raison pour laquelle il n'y aura pas de signe dans l'égalité de la proposition 6.2.

2. CHAMPS DE G -CHTOUCAS

Cette section est entièrement extraite de [Var04], à l'exception des propositions 2.8 et 2.9. On garde les notations de la section précédente.

Voici la définition des champs classifiants de G -chtoucas.

Définition 2.1. Soit I un ensemble fini, $k \in \mathbb{N}$ et (I_1, \dots, I_k) une partition de I . Soit N un sous-schéma fini de X . On note

$$\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \text{ (resp. } \text{Cht}_{N,I,\omega}^{(I_1, \dots, I_k)}, \text{Cht}_{N,I,\omega}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})$$

l'ind-champ (resp. le champ) sur $(X \setminus N)^I$ qui classifie les mêmes données i)–iii) (de la définition 1.2) que

$$\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \text{ (resp. } \text{Hecke}_{N,I,\omega}^{(I_1, \dots, I_k)}, \text{Hecke}_{N,I,\omega}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})$$

plus un isomorphisme $\sigma : {}^\tau \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k$, préservant les structures de niveau, c'est-à-dire vérifiant $\psi_k \circ \sigma|_{N \times S} = {}^\tau \psi_0$. On note

$$(2.1) \quad \gamma_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

le morphisme tautologique qui consiste à oublier σ .

Autrement dit $\text{Cht}_{N,I,\omega}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est le produit fibré sur $\text{Bun}_{G,N} \times \text{Bun}_{G,N}$ de la correspondance de Hecke $\text{Hecke}_{N,I,\omega}^{(I_1, \dots, I_k)}$ avec le graphe du morphisme de Frobenius de $\text{Bun}_{G,N}$.

Pour récapituler, $\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est tel que pour tout schéma S sur \mathbb{F}_q , $\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$ classifie la donnée de

$$(2.2) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} ({}^\tau \mathcal{G}_0, {}^\tau \psi_0))$$

tels que

- i) $x_i \in (X \setminus N)(S)$ pour $i \in I$,
- ii) $(\mathcal{G}_0, \psi_0), \dots, (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \in \text{Bun}_{G,N}(S)$,

iii) en notant $(\mathcal{G}_k, \psi_k) = (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)$, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\phi_j : \mathcal{G}_{j-1} \Big|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_j \Big|_{(X \times S) \setminus (\cup_{i \in I_j} \Gamma_{x_i})}$$

est un isomorphisme tel que $\psi_j \circ \phi_j \Big|_{N \times S} = \psi_{j-1}$.

De plus $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est le fermé de $\text{Cht}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ défini par la condition que

$$((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\mathcal{G}_k, \psi_k))$$

appartient à $\text{Hecke}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$. Enfin $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ est l'ouvert de $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ défini par la condition $\mathcal{G}_0 \in \text{Bun}_{\widehat{G}}^{\leq \mu}$.

Remarque 2.2. a) L'ind-champ $\text{Cht}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est muni d'une action naturelle du groupe $G(\mathcal{O}_N)$, qui fait agir $g \in G(\mathcal{O}_N)$ en remplaçant ψ_j par $g \circ \psi_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$. Cette action préserve $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$.

b) Lorsque $G = GL_r$, $I = \{1, 2\}$, $\omega_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et $\omega_2 = (0, \dots, 0, -1)$, les champs $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$, *resp.* $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{\{\{2\}, \{1\}\}}$ sont les champs de chtoucas à gauche, *resp.* à droite introduits par Drinfeld [Dri87a]. Les troncatures ne sont pas les mêmes que dans [Laf02a] mais les systèmes inductifs sont comparables. Dans ce cas x_1 et x_2 sont appelés le zéro et le pôle du chtouca.

Notation 2.3. En général les x_i seront appelés les pattes du chtouca. On notera

$$\mathfrak{p}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow (X \setminus N)^I$$

le morphisme correspondant (appelé morphisme caractéristique par certains auteurs). On notera encore $\mathfrak{p}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sa restriction à $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et on notera $\mathfrak{p}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ sa restriction à l'ouvert $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$.

Définition 2.4. Un I -uplet $\underline{\omega} = (\omega_i)_{i \in I} \in X_*(T)^I$ sera dit *admissible* si $[\sum_{i \in I} \omega_i] = 0$ dans $\pi_1(G)$.

Remarque 2.5. Les I -uplets de copoids dominants de G sont en bijection canonique avec les I -uplets de poids dominants de \widehat{G} , et donc avec les I -uplets de représentations irréductibles de \widehat{G} . Par cette bijection, les I -uplets admissibles correspondent aux I -uplets de représentations irréductibles de \widehat{G} tels que $Z_{\widehat{G}}$ agisse trivialement sur leur produit tensoriel.

La proposition suivante, qui généralise les propositions 2.3 et 3.2 de [Dri87a], est contenue dans la proposition 2.16 de [Var04].

Proposition 2.6 (Variante de la proposition 2.16 de [Var04]). a) $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est un champ de Deligne-Mumford sur $(X \setminus N)^I$, et il est localement de type fini. De plus les composantes connexes de $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ sont des quotients de schémas quasi-projectifs sur $(X \setminus N)^I$ par des groupes finis (si N est non vide, sinon on doit se restreindre à U^I avec $U \subsetneq X$ arbitraire), et sont des schémas quasi-projectifs dès que $\dim(\mathcal{O}_N)$ est assez grand en fonction de μ et $\underline{\omega}$.

b) $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (*resp.* $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$) est un revêtement fini étale et galoisien de $\text{Cht}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{(X \setminus N)^I}$ (*resp.* $\text{Cht}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} \Big|_{(X \setminus N)^I}$) de groupe de Galois $G(\mathcal{O}_N)$.

c) Si J est une partie de I telle que $\omega_i = 0$ pour $i \in I \setminus J$, alors en notant $J_i = I_i \cap J$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$, le champ $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est canoniquement isomorphe au produit $(X \setminus N)^{I \setminus J} \times \text{Cht}_{N,J,(\omega_j)_{j \in J}}^{(J_1, \dots, J_k)}$.

d) Si $\omega_i = 0$ pour tout $i \in I$, alors $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est canoniquement isomorphe au produit de $(X \setminus N)^I$ avec le champ discret $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$.

e) $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est non vide si et seulement si $\underline{\omega}$ est admissible.

Démonstration. Tout est dans la proposition 2.16 de [Var04], à part c) qui est évident. Grâce à c), il suffit de montrer d) dans le cas particulier où $I = \emptyset$, où il se réduit à l'affirmation que $\text{Cht}_{N,\emptyset,0}^{(\emptyset)}$ est canoniquement isomorphe au champ discret $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$. □

Construction 2.7. Comme dans (1.5), soit $(I'_1, \dots, I'_{k'})$ une partition de I obtenue à partir de la partition (I_1, \dots, I_k) en réunissant des parties dont les indices sont adjacents, c'est-à-dire que l'on choisit des entiers $0 = j_0 < j_1 < \dots < j_{k'} = k$ et que l'on pose $I'_{j'} = \bigcup_{j_{j'-1} < j \leq j_{j'}} I_j$. La même construction que dans (1.5) fournit un morphisme d'oubli

$$\pi_{(I'_1, \dots, I'_{k'})}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I'_1, \dots, I'_{k'})}$$

qui conserve les $(x_i)_{i \in I}$, les $(\mathcal{G}_{j_{j'}}, \psi_{j_{j'}})$ pour $j' \in \{0, \dots, k'\}$, les composées des morphismes ϕ_j qui les relient, et $\sigma : \tau \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k$.

Soit $\underline{n} = (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ comme dans la proposition 1.10. On pose

$$(2.3) \quad \epsilon_{(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} = \delta_{(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} \circ \gamma_{(I)}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$$

(où l'on rappelle que $\delta_{(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\gamma_{(I)}^{(I_1, \dots, I_k)}$ ont été définis dans (1.11) et (2.1)).

Autrement dit $\epsilon_{(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ associe à un chtouca

$$((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{G}_{k-1} \xrightarrow{\phi_k} \tau \mathcal{G}_0)$$

le $G_{\sum n_i x_i}$ -torseur égal à la restriction de $\mathcal{G}_k = \tau \mathcal{G}_0$ à $\Gamma_{\sum n_i x_i}$ et le point de $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}} \times_{G_{\sum n_i x_i}} \text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ qui est déterminé par $(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k)$, grâce à la construction 1.8, à la proposition 1.10 et à la remarque 1.11.

Proposition 2.8. *Le morphisme*

$$\epsilon_{(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$$

est lisse de dimension $\dim G_{\sum n_i x_i} = (\sum n_i) \dim G$.

Démonstration. Comme l'énoncé est local pour la topologie lisse sur le but, il suffit de montrer, pour tout schéma S sur X^I et tout point z de $\text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$, la lissité sur S de

$$(2.4) \quad \text{Cht}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{\text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}} S.$$

Où ce champ est l'égalisateur

- du morphisme d'oubli

$$b_1 : \text{Bun}_{G,\sum n_i x_i} \times_{X^I} S \rightarrow \text{Bun}_G \times S$$

qui est lisse de dimension $\dim G_{\sum n_i x_i}$,

- et du morphisme

$$b_2 : (\text{Frob}_{\text{Bun}_G} \times \text{Id}_S) \circ (a_z, \text{Id}_S) : \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \times_{X^I} S \rightarrow \text{Bun}_G \times S,$$

où a_z est la “modification par z ”, c’est-à-dire que

$$a_z = p_0 \circ (\beta_{I, \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)})^{-1}(z, \bullet) : \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \times_{X^I} S \rightarrow \text{Bun}_G$$

(où l’on rappelle que p_0 et $\beta_{I, \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ ont été définis dans la notation 1.5 et dans (1.10)), ou en d’autres termes, en notant

$$z = ((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{G}_{k-1} \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k \xrightarrow{\theta} G|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}),$$

pour tout S -schéma S' et $(\mathcal{F}, \psi) \in \text{Bun}_{G, \sum n_i x_i}(S')$, si $\tilde{\psi}$ est une trivialisat-ion de $\mathcal{F}|_{\Gamma_{\sum \infty x_i}}$ qui raffine ψ , on étend les \mathcal{G}_i (ou plutôt leurs images inverses par $S' \rightarrow S$) en des G -torseurs $\check{\mathcal{G}}_i$ sur $X \times S'$ en recollant \mathcal{G}_k avec \mathcal{F} à l’aide de $\tilde{\psi}^{-1} \circ \theta$ et alors $a_z(\mathcal{F}, \psi)$ est égal à $\check{\mathcal{G}}_0$.

Donc (2.4) est l’égalisateur de morphismes b_1 et b_2 de $\text{Bun}_{G, \sum n_i x_i} \times_{X^I} S$ vers $\text{Bun}_G \times S$, et

- ces deux champs sont lisses au-dessus de S ,
- b_1 et b_2 commutent avec la projection vers S ,
- b_1 est lisse et b_2 a une dérivée nulle dans les fibres au-dessus de S (parce que $\text{Frob}_{\text{Bun}_G}$ a une dérivée nulle).

On en déduit que cet égalisateur est lisse sur S . □

Plus tard on aura besoin d’une variante de la proposition précédente, où l’on casse $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$ en morceaux.

On note

$$\gamma_{(I_1, \dots, I_k)}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \prod_{j=1}^k \text{Hecke}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$$

le morphisme qui envoie un chtouca

$$((x_i)_{i \in I}, \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} \mathcal{G}_{k-1} \xrightarrow{\phi_k} \tau \mathcal{G}_0)$$

sur la famille

$$\left((x_i)_{i \in I_j}, \mathcal{G}_{j-1} \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{G}_j \right)_{j \in \{1, \dots, k\}}$$

en notant $\mathcal{G}_k = \tau \mathcal{G}_0$.

Par composition avec le produit des morphismes

$$\delta_{(I_j), (\omega_i)_{i \in I_j}, (n_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} : \text{Hecke}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} \rightarrow \text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}$$

on obtient

$$(2.5) \quad \epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \right).$$

La proposition 2.8 admet alors la variante suivante.

Proposition 2.9. *Le morphisme $\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est lisse.*

Démonstration. On a établi dans le lemme 1.16 la lissité du morphisme

$$\tilde{\kappa}_{I,(\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} : \mathrm{Gr}_{I,(\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} m_i x_i} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\mathrm{Gr}_{I_j,(\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \right)$$

qui était défini lorsque les entiers m_i étaient assez grands.

Comme $\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)} = \tilde{\kappa}_{I,(\omega_i)_{i \in I}}^{(I_1, \dots, I_k)} \circ \epsilon_{(I), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$, et comme $\epsilon_{(I), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est lisse par la proposition 2.8, le morphisme $\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est lisse. \square

Remarque 2.10. Les morphismes $\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ des propositions 2.8 et 2.9 sont des cas particuliers d'un morphisme plus général, qui ne sera jamais utilisé. Soit (I_1, \dots, I_k) une partition de I et pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ soit $m_j \in \mathbb{N}^*$ et $(J_{j,1}, \dots, J_{j,m_j})$ une partition de I_j . On note $(J_{j,l})_{j,l}$ la partition de I égale à $(J_{1,1}, \dots, J_{1,m_1}, J_{2,1}, \dots, J_{2,m_2}, \dots, J_{k,1}, \dots, J_{k,m_k})$. Lorsque les entiers n_i sont assez grands on a un morphisme naturel

$$\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(J_{j,l})_{j,l}} : \mathrm{Cht}_{I, \underline{\omega}}^{(J_{j,l})_{j,l}} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\mathrm{Gr}_{I_j,(\omega_i)_{i \in I_j}}^{(J_{j,1}, \dots, J_{j,m_j})} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \right)$$

et il est lisse.

Les propositions précédentes généralisent la preuve donnée par Drinfeld de la lissité du champ des chtoucas dans le cas b) de la remarque 2.2. Par ailleurs elles impliquent que localement pour la topologie lisse, les champs de G -chtoucas sont isomorphes à des strates fermées des grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld (ou à des produits de telles strates fermées).

La proposition suivante montre que cela est vrai localement pour la topologie étale et en fournit une preuve constructive. C'est une variante du théorème 2.20 de [Var04]. La preuve que nous allons donner est proche de la preuve figurant dans le paragraphe 4 de [Var04], mais elle n'utilise pas le théorème de Drinfeld-Simpson (le théorème 2 de [DS95], mentionné au début de la section précédente). La proposition suivante peut être sautée par le lecteur car elle ne sera pas utilisée mais elle est intéressante par elle-même.

Proposition 2.11 (Variante du théorème 2.20 de [Var04]). *Localement pour la topologie étale, $\mathrm{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est isomorphe à $\prod_{j=1}^k \mathrm{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$, de façon compatible avec le morphisme $\epsilon_{(I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ de (2.5).*

Plus précisément, on suppose que les entiers $(n_i)_{i \in I}$ sont assez grands. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, soit

$$(2.6) \quad \alpha_j \times (x_i)_{i \in I_j} : U_j \rightarrow \mathrm{Bun}_{G, N} \times (X \setminus N)^{I_j}$$

un morphisme étale tel que, si \mathcal{G} désigne le G -torseur universel sur $X \times \mathrm{Bun}_{G, N}$, on a une trivialisaton

$$\theta_j : (\mathrm{Id}_X \times \alpha_j)^*(\mathcal{G})|_{\Gamma_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}} \xrightarrow{\sim} G|_{\Gamma_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}}$$

sur le sous-schéma fermé $\Gamma_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i} \subset X \times U_j$.

Soit

$$\mathcal{U} = \mathrm{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \times \prod_{j=1}^k \left(\mathrm{Bun}_{G, N} \times (X \setminus N)^{I_j} \right) \prod_{j=1}^k U_j$$

obtenu par image inverse du produit des morphismes étales (2.6) par le morphisme

$$\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\text{Bun}_{G,N} \times (X \setminus N)^{I_j} \right)$$

qui envoie

(2.7)

$$((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\mathcal{G}_k, \psi_k) \simeq (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0))$$

sur la famille

$$(2.8) \quad \left((\mathcal{G}_j, \psi_j), (x_i)_{i \in I_j} \right)_{j \in \{1, \dots, k\}}.$$

Evidemment la première projection $\mathcal{U} \rightarrow \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)}$ est étale. Soit

$$\beta = \prod_{j=1}^k \beta_j : \mathcal{U} \rightarrow \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$$

le morphisme tel que pour tout j et pour tout point u dans \mathcal{U} (d'images (2.7) dans $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)}$ et $(u_j)_{j \in \{1, \dots, k\}}$ dans $\prod_{j=1}^k U_j$), $\beta_j(u)$ est le point de $\text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$ associé à $(\mathcal{G}_{j-1} \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{G}_j)$ et à la trivialisaton θ_j (au point $u_j \in U_j$) grâce à la remarque 1.11. Alors β est étale.

Remarque 2.12. Ce théorème admet la généralisation suivante. Soit $(J_{j,l})_{j,l}$ comme dans la remarque 2.10. Alors, localement pour la topologie étale, $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(J_{j,l})_{j,l}}$ est isomorphe à $\prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(J_{j,l})_{j,l}}$, de façon compatible avec le morphisme $\epsilon_{(I_1,\dots,I_k),\underline{\omega},\underline{n}}$ de cette remarque.

Démonstration (Variante du paragraphe 4 de [Var04]). On fixe μ et on va démontrer la proposition pour l'ouvert $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k), \leq \mu}$. Pour tout niveau $N' \supset N$, $\text{Cht}_{N',I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k), \leq \mu}$ est un revêtement étale galoisien de $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k), \leq \mu} |_{(X \setminus N')^I}$. Il suffit donc de montrer l'énoncé pour N assez grand. On suppose N assez grand pour que $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu + \kappa}$ soit un schéma, où κ est tel que pour tout point

$$(2.9) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\mathcal{G}_k, \psi_k))$$

dans $\text{Hecke}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k), \leq \mu}$ tous les G -torseurs \mathcal{G}_j appartiennent à $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu + \kappa}$. La raison pour laquelle on augmente ainsi le niveau est que le lemme 2.13 ci-dessous est énoncé avec des schémas.

Soit

$$\mathcal{W} = \text{Hecke}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k), \leq \mu} \times_{\prod_{j=1}^k \left(\text{Bun}_{G,N} \times (X \setminus N)^{I_j} \right)} \prod_{j=1}^k U_j$$

obtenu par image inverse du produit des morphismes étales (2.6) par le morphisme

$$\text{Hecke}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k), \leq \mu} \rightarrow \prod_{j=1}^k \left(\text{Bun}_{G,N} \times (X \setminus N)^{I_j} \right)$$

qui envoie (2.9) sur la famille (2.8). Evidemment la première projection $\mathcal{W} \rightarrow \text{Hecke}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}$ est étale. Soit

$$\beta = \prod_{j=1}^k \beta_j : \mathcal{W} \rightarrow \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j,(\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$$

tel que pour tout j et pour tout point w dans \mathcal{W} (d'images (2.9) dans $\text{Hecke}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}$ et $(w_j)_{j \in \{1,\dots,k\}}$ dans $\prod_{j=1}^k U_j$), $\beta_j(w)$ soit le point de $\text{Gr}_{I_j,(\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$ associé à $(\mathcal{G}_{j-1} \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{G}_j)$ et à la trivialisations θ_j (au point $w_j \in U_j$). On note

$$p_0, p_k : \text{Hecke}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} \rightarrow \text{Bun}_{G,N}^{\leq\mu+\kappa}$$

le morphisme qui envoie w comme ci-dessus vers (\mathcal{G}_0, ψ_0) , resp. (\mathcal{G}_k, ψ_k) . Grâce à l'isomorphisme (1.10) on montre (par récurrence sur k) que

$$(p_k, \beta) : \mathcal{W} \rightarrow \text{Bun}_{G,N}^{\leq\mu+\kappa} \times \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j,(\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}$$

est étale. On a

$$\mathcal{U} = \{w \in \mathcal{W}, p_k(w) = \text{Frob}_{\text{Bun}_{G,N}^{\leq\mu+\kappa}}(p_0(w))\}.$$

On applique le lemme suivant à

$$W = \mathcal{W}, Z = \text{Bun}_{G,N}^{\leq\mu+\kappa}, T = \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j,(\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)}, h = (p_k, \beta) \text{ et } f = p_0.$$

Cela termine la preuve de la proposition en montrant que β est étale. □

Lemme 2.13 (Petite généralisation du lemme 4.3 de [Var04]). *Soient W, Z, T des schémas de type fini sur \mathbb{F}_q . Soit $h = (h_1, h_2) : W \rightarrow Z \times T$ un morphisme étale et $f : W \rightarrow Z$ un morphisme arbitraire. On pose*

$$\mathcal{U} = \{w \in W, h_1(w) = \text{Frob}_Z(f(w))\}.$$

On suppose que Z est lisse sur \mathbb{F}_q . Alors $h_2 : \mathcal{U} \rightarrow T$ est étale.

Démonstration (D'après la preuve du lemme 4.3 de [Var04]). Comme l'énoncé est local pour la topologie de Zariski de \mathcal{U} et donc pour celle de Z , on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $\phi : Z \rightarrow \mathbb{A}^m$. Comme \mathcal{U} est ouvert et fermé dans

$$\mathcal{U}' = \{w \in W, \phi \circ h_1(w) = \text{Frob}_{\mathbb{A}^m}(\phi \circ f(w))\},$$

quitte à remplacer Z, h_1, f par $\mathbb{A}^m, \phi \circ h_1, \phi \circ f$, on est ramené au cas où $Z = \mathbb{A}^m$.

Quitte à remplacer T et W par des ouverts de Zariski, on suppose que T est affine et que W est un ouvert de $\text{Spec}(\mathcal{O}(T)[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]/(k_1, \dots, k_n))$ sur lequel $\det(\frac{\partial k_i}{\partial y_j})$ est inversible, et que le morphisme étale $h : W \rightarrow Z \times T$ est donné par le morphisme évident

$$\mathcal{O}(T)[x_1, \dots, x_m] \rightarrow \mathcal{O}(T)[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]/(k_1, \dots, k_n).$$

On a noté $\mathcal{O}(T)$ l'anneau des fonctions régulières sur T , de sorte que $Z \times T = \text{Spec}(\mathcal{O}(T)[x_1, \dots, x_m])$. Alors $\mathcal{U} \subset W$ est défini par les équations g_1, \dots, g_m , où $g_i = x_i - f_i^q$ et les fonctions f_i sur W sont telles que $f = (f_1, \dots, f_m)$ de W dans $Z = \mathbb{A}^m$. Par conséquent \mathcal{U} est un ouvert de $\text{Spec}(\mathcal{O}(T)[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]/(k_1, \dots, k_n, g_1, \dots, g_m))$ sur lequel la matrice

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial k_i}{\partial y_j}\right) & \left(\frac{\partial g_k}{\partial y_j}\right) \\ \left(\frac{\partial k_i}{\partial x_l}\right) & \left(\frac{\partial g_k}{\partial x_l}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial k_i}{\partial y_j}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial k_i}{\partial x_l}\right) & \text{Id}_m \end{pmatrix}$$

est invertible, et $h_2 : \mathcal{U} \rightarrow T$ est étale. □

On a une action évidente de $Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$ sur $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$. En fait $Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$ s'envoie naturellement dans $\text{Bun}_{Z, N}(\mathbb{F}_q)$ et $\text{Bun}_{Z, N}(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ par torsion d'un G -torseur par un Z -torseur. Ces actions préservent les ouverts $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ (car la troncature de Harder-Narasimhan se fait sur le G^{ad} -torseur associé à \mathcal{G}_0) et elles commutent aux morphismes de Frobenius partiels.

Dans toute la suite on fixe un réseau Ξ dans $Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$. Les quotients $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi$ sont des champs de Deligne-Mumford de type fini.

Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ contenant une racine carrée de q .

Définition 2.14. On note $\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ le faisceau d'intersection de $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi$ normalisé relativement à $(X \setminus N)^I$, et à coefficients dans E .

Dans les deux corollaires suivants nous allons donner des définitions équivalentes de $\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$, qui sont mieux adaptées pour étudier la coalescence des pattes et l'action des morphismes de Frobenius partiels.

Par l'équivalence de Satake géométrique [MV07, Gai07], que nous avons rappelée dans le théorème 1.17, nous possédons le E -faisceau pervers (à un décalage près) $\mathcal{S}_{I, \boxtimes_{i \in I} V_{\omega_i}}^{(I_1, \dots, I_k), E}$ sur $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}$ dont l'image inverse à $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est le faisceau d'intersection (avec la normalisation perverse relative à X^I). D'après la remarque 1.20, $\mathcal{S}_{I, \boxtimes_{i \in I} V_{\omega_i}}^{(I_1, \dots, I_k), E}$ est en fait un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}^{\text{ad}}$, de façon canonique. Ci-dessous on considère donc $\mathcal{S}_{I, \boxtimes_{i \in I} V_{\omega_i}}^{(I_1, \dots, I_k), E}$ comme un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}^{\text{ad}}$.

Le morphisme $\epsilon_{N, (I), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ de la proposition 2.8 ne se factorise pas par le quotient par Ξ (comme me l'a fait remarquer un rapporteur anonyme), mais c'est le cas de sa composée avec le morphisme d'oubli $\text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i} \rightarrow \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$. En effet l'action de Ξ consiste à tordre par des Z -torseurs, et $G^{\text{ad}} = G/Z$.

Autrement dit on possède un morphisme

$$(2.10) \quad \epsilon_{(I), \underline{\omega}, \underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k), \Xi} : \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi \rightarrow \text{Gr}_{I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}.$$

En le composant avec le morphisme étale d'oubli du niveau

$$\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / \Xi \rightarrow \text{Cht}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / \Xi$$

on obtient donc

$$\epsilon_{N,(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1,\dots,I_k),\Xi} : \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / \Xi \rightarrow \text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$$

qui est lisse de dimension $\dim G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}} = (\sum n_i) \dim G^{\text{ad}}$.

Corollaire 2.15 (Variante du corollaire 2.21 c) de [Var04]). *On a un isomorphisme canonique*

$$(2.11) \quad \lambda_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k)} : \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} \simeq (\epsilon_{N,(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1,\dots,I_k),\Xi})^* \left(\mathcal{S}_{I,\boxtimes_{i \in I} V_{\omega_i}}^{(I_1,\dots,I_k)}, E \right).$$

□

On utilisera aussi la variante suivante (qui résulte de la proposition 2.9, ou du corollaire 2.15 et de c) du théorème 1.17, et où $\epsilon_{N,(I_1,\dots,I_k),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1,\dots,I_k),\Xi}$ est défini de manière analogue à $\epsilon_{N,(I),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1,\dots,I_k),\Xi}$ ci-dessus).

Corollaire 2.16. *On a un isomorphisme canonique*

$$(2.12) \quad \lambda_{N,(I_1,\dots,I_k)}^{(I_1,\dots,I_k)} : \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} \simeq (\epsilon_{N,(I_1,\dots,I_k),\underline{\omega},\underline{n}}^{(I_1,\dots,I_k),\Xi})^* \left(\boxtimes_{j \in \{1,\dots,k\}} \mathcal{S}_{I_j,\boxtimes_{i \in I_j} V_{\omega_i}}^{(I_j)} \right).$$

□

Remarque 2.17. Les deux corollaires précédents sont des cas particuliers de l'énoncé suivant, qui ne sera jamais utilisé. Soit $(J_{j,l})_{j,l}$ comme dans la remarque 2.10. On a alors un isomorphisme canonique

$$(2.13) \quad \lambda_{N,(I_1,\dots,I_k)}^{(J_{j,l})_{j,l}} : \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(J_{j,l})_{j,l}} \simeq (\epsilon_{N,(I_1,\dots,I_k),\underline{\omega},\underline{n}}^{(J_{j,l})_{j,l},\Xi})^* \left(\boxtimes_{j \in \{1,\dots,k\}} \mathcal{S}_{I_j,\boxtimes_{i \in I_j} V_{\omega_i}}^{(J_{j,l})_{j,l}} \right).$$

Corollaire 2.18 (Variante du corollaire 2.21 de [Var04]). *Dans les notations de la construction 2.7, le morphisme d'oubli*

$$\pi_{(I'_1,\dots,I'_{k'})}^{(I_1,\dots,I_k)} : \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / \Xi \rightarrow \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I'_1,\dots,I'_{k'})} / \Xi$$

est projectif, surjectif et petit. Par conséquent

$$R(\pi_{(I'_1,\dots,I'_{k'})}^{(I_1,\dots,I_k)})_! (\mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)}) = \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I'_1,\dots,I'_{k'})}.$$

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.8 car

$$\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} = \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I'_1,\dots,I'_{k'})} \times_{\text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I'_1,\dots,I'_{k'})} / G_{\sum n_i x_i}} \text{Gr}_{I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$$

et la même propriété est connue pour les strates fermées des grassmanniennes affines (voir [MV07]). □

Remarque 2.19 (Variante du corollaire 2.21 de [Var04]). L'ouvert $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^0$ de $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I)}$ formé des

$$((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0), (\mathcal{G}_1, \psi_1), \phi_1, \sigma)$$

tels que les x_i soient deux à deux disjoints et la position relative de \mathcal{G}_0 par rapport à $\mathcal{G}_1 \simeq \tau \mathcal{G}_0$ en x_i soit exactement ω_i , est lisse et dense dans $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I)}$. Il est non

vide si et seulement si $\underline{\omega}$ est admissible. De plus pour toute partition (I_1, \dots, I_k) le morphisme d'oubli

$$\pi_{(I)}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I)}$$

est un isomorphisme au-dessus de cet ouvert, et l'image inverse de cet ouvert est dense dans $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$. On a les mêmes résultats après quotient par Ξ .

Construction 2.20: Correspondances de Hecke. On rappelle que $K_N = \text{Ker}(G(\mathbb{O}) \rightarrow G(\mathcal{O}_N))$ est le sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$ associé à N et on note $K_{N,v}$ sa composante en la place v , de sorte que $K_N = \prod_v K_{N,v}$. On a $K_{N,v} = G(\mathcal{O}_v)$ pour tout $v \in |X| \setminus |N|$. Soit $\mathfrak{T} \subset |X|$ un ensemble fini de places et $g = (g_v)_{v \in |X|} \in G(\mathbb{A})$ tel que $g_v \in K_{N,v}$ pour tout $v \notin \mathfrak{T}$. Alors g induit une correspondance représentable finie étale $\Gamma_N(g)$ entre l'ouvert

$$\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{(X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I} := (\mathfrak{p}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)})^{-1}((X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I) \cap \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

et lui-même. Cette correspondance dépend seulement de la double classe $K_N g K_N$ et si N' est un niveau tel que $K_{N'} \subset K_N \cap g K_N g^{-1} \cap g^{-1} K_N g$ et $|N'| = |N| \cup \mathfrak{T}$, elle est donnée par le diagramme

(2.14)

$$\begin{array}{ccc} \text{Cht}_{N', I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / ((K_N \cap g K_N g^{-1}) / K_{N'}) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cht}_{N', I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / ((K_N \cap g^{-1} K_N g) / K_{N'}) \\ \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_2 \\ \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{(X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I} & & \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{(X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I} \end{array}$$

où la flèche du haut est l'action à droite de g , qui envoie la structure de niveau ψ sur $g^{-1} \circ \psi$.

De plus il existe κ (dépendant de g) tel que, pour tout μ , la correspondance $\Gamma_N(g)$ et sa transposée envoient $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} \Big|_{(X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I}$ dans $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu + \kappa} \Big|_{(X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I}$.

Dans le cas particulier où $|N| \cap \mathfrak{T} = \emptyset$, la correspondance $\Gamma_N(g)$ admet une description plus simple. En effet $K_N g K_N$ est déterminé par la donnée d'une famille $(\lambda_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ de copoids dominants de G . Alors $\Gamma_N(g)$ est le champ dont les S -points classifient la donnée de $(x_i)_{i \in I} : S \rightarrow (X \setminus (|N| \cup \mathfrak{T}))^I$ et d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathcal{G}'_0, \psi'_0) & \xrightarrow{\phi'_1} & (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) & \xrightarrow{\phi'_2} & \dots & \xrightarrow{\phi'_{k-1}} & (\mathcal{G}'_{k-1}, \psi'_{k-1}) & \xrightarrow{\phi'_k} & (\tau \mathcal{G}'_0, \tau \psi'_0) \\ \uparrow \kappa_0 & & \uparrow \kappa_1 & & & & \uparrow \kappa_{k-1} & & \uparrow \tau \kappa_0 \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\phi_1} & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\phi_2} & \dots & \xrightarrow{\phi_{k-1}} & (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) & \xrightarrow{\phi_k} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \end{array}$$

tel que la ligne inférieure

(2.15) $((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0))$

et la ligne supérieure

$$(2.16) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}'_0, \psi'_0) \xrightarrow{\phi'_1} (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) \xrightarrow{\phi'_2} \dots \xrightarrow{\phi'_{k-1}} (\mathcal{G}'_{k-1}, \psi'_{k-1}) \xrightarrow{\phi'_k} (\tau \mathcal{G}'_0, \tau \psi'_0))$$

appartiennent à $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}(S)$ et que

- $\kappa_0 : \mathcal{G}_0|_{(X \setminus \mathfrak{T}) \times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'_0|_{(X \setminus \mathfrak{T}) \times S}$ soit un isomorphisme entre ψ_0 et ψ'_0 ,
- en tout point $\mathfrak{t} \in \mathfrak{T}$, la position relative de \mathcal{G}_0 par rapport à \mathcal{G}'_0 soit *égale* au copoids dominant $\lambda_{\mathfrak{t}}$, plus précisément en tout point géométrique s de S , les restrictions de $(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_k \cdots \phi_1} \tau \mathcal{G}_0)$ et $(\mathcal{G}'_0 \xrightarrow{\phi'_k \cdots \phi'_1} \tau \mathcal{G}'_0)$ au voisinage formel de \mathfrak{t} dans X peuvent être trivialisées de façon unique modulo l'action de $G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})$ et alors $\kappa_0 : \mathcal{G}_0|_{(X \setminus \mathfrak{t}) \times s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'_0|_{(X \setminus \mathfrak{t}) \times s}$ définit un élément de $G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}}) \backslash G(F_{\mathfrak{t}}) / G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})$ qui corresponde à $\lambda_{\mathfrak{t}}$ (c'est-à-dire que si on trivialise $(\mathcal{G}_0, \phi_k \cdots \phi_1)$ au voisinage formel de t la restriction de $(\mathcal{G}'_0, \phi'_k \cdots \phi'_1)$ à ce voisinage formel détermine un point de $G(F_{\mathfrak{t}}) / G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})$ appartenant à la $G(\mathcal{O}_{\mathfrak{t}})$ -orbite de $\lambda_{\mathfrak{t}}$).

De plus pr_1 et pr_2 sont données par (2.15) et (2.16).

3. MORPHISMES DE FROBENIUS PARTIELS

Les morphismes de Frobenius partiels ont été introduits par Drinfeld [Dri80, Dri87a]. La généralisation à notre situation est évidente.

Le morphisme de Frobenius partiel

$$\text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} : \text{Cht}_{N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Cht}_{N, I}^{(I_2, \dots, I_k, I_1)},$$

est défini par

$$\begin{aligned} \text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} & \left((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \right) \\ & = \left((x'_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} (\mathcal{G}_2, \psi_2) \xrightarrow{\phi_3} \dots \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \xrightarrow{\tau \phi_1} (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1) \right). \end{aligned}$$

Il est au-dessus du morphisme $\text{Frob}_{I_1} : (X \setminus N)^I \rightarrow (X \setminus N)^I$ qui envoie $(x_i)_{i \in I}$ vers $(x'_i)_{i \in I}$ avec

$$(3.1) \quad x'_i = \text{Frob}(x_i) \text{ si } i \in I_1 \text{ et } x'_i = x_i \text{ sinon.}$$

Lemme 3.1. *Les morphismes de Frobenius partiels ne préservent pas les troncutures, mais agissent sur les systèmes inductifs. Plus précisément on a*

$$(3.2) \quad \left(\text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} \right)^{-1} \left(\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu} \right) \subset \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu + \sum_{i \in I_1} \omega_i}$$

et

$$(3.3) \quad \text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} \left(\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} \right) \subset \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu - w_0(\sum_{i \in I_1} \omega_i)}$$

où w_0 est l'élément le plus long dans le groupe de Weyl. □

Remarque 3.2. La composée

$$(3.4) \quad \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} \xrightarrow{\text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}} \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1)} \xrightarrow{\text{Fr}_{I_2, N, I}^{(I_2, \dots, I_1)}} \dots \xrightarrow{\text{Fr}_{I_k, N, I}^{(I_k, \dots, I_{k-1})}} \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

est le morphisme de Frobenius (total) de $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur \mathbb{F}_q .

Proposition 3.3. *On a un isomorphisme canonique*

$$F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} : (F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)})^* \left(\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_2, \dots, I_k, I_1)} \right) \simeq \mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

Par convention on *incorpore* dans l’isomorphisme $F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ le scalaire $q^{-d/2}$, où d est la dimension de la strate $\text{Gr}_{I_1, \omega_1}^{(I_1)}$ (cela se comprend bien par la proposition 3.4 ci-dessous qui pourrait être considérée comme une définition alternative de $F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$). Pour les signes on applique la contrainte de commutativité modifiée de [MV07], rappelée dans la remarque 1.19.

Démonstration. La remarque 3.2 implique que les morphismes de Frobenius partiels sont des homéomorphismes locaux complètement radiciels, et on rappelle que $\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est (à un décalage près) le faisceau d’intersection de $\text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)}$, et il en va de même pour (I_2, \dots, I_k, I_1) . \square

Dans le corollaire 2.16 nous avons construit un isomorphisme entre $\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et l’image inverse d’un produit extérieur de faisceaux de Mirkovic-Vilonen sur $\text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}^{\text{ad}}$. Comme ces images inverses se comportent plus canoniquement par rapport à la coalescence des pattes (grâce au produit de fusion de [MV07]), il est nécessaire de comprendre $F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ en ces termes (car cela permettra de montrer la compatibilité entre les morphismes de Frobenius partiels et les isomorphismes de coalescence des pattes). Dans la proposition suivante nous l’exprimerons à l’aide du morphisme de Frobenius de $\text{Gr}_{I_1, (\omega_i)_{i \in I_1}}^{(I_1)} / G_{\sum_{i \in I_1} n_i x_i}^{\text{ad}}$, que nous noterons simplement Frob_1 , et de l’isomorphisme canonique

$$(3.5) \quad F_1 : \text{Frob}_1^* (\mathcal{S}_{I_1, \boxtimes_{i \in I_1} V_{\omega_i}, E}^{(I_1)}) \simeq \mathcal{S}_{I_1, \boxtimes_{i \in I_1} V_{\omega_i}, E}^{(I_1)}$$

où $\mathcal{S}_{I_1, \boxtimes_{i \in I_1} V_{\omega_i}, E}^{(I_1)}$ est le faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Gr}_{I_1, (\omega_i)_{i \in I_1}}^{(I_1)} / G_{\sum_{i \in I_1} n_i x_i}^{\text{ad}}$ dont l’image inverse à $\text{Gr}_{I_1, (\omega_i)_{i \in I_1}}^{(I_1)}$ est le faisceau d’intersection.

Proposition 3.4. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi & \xrightarrow{\text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}} & \text{Cht}_{N, I, \underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_1)} / \Xi \\ \downarrow \epsilon_{N, (I_1, \dots, I_k), \underline{\omega}, \Xi}^{(I_1, \dots, I_k)} & & \downarrow \epsilon_{N, (I_2, \dots, I_1), \underline{\omega}, \Xi}^{(I_2, \dots, I_1)} \\ \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i}^{\text{ad}} & \xrightarrow{\text{Frob}_1 \times \text{Id}} & \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j, (\omega_i)_{i \in I_j}}^{(I_j)} / G_{\sum_{i \in I_j} n_i x_i'}^{\text{ad}} \end{array}$$

est commutatif et rend compatibles les isomorphismes de comparaison entre $\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$, $\mathcal{F}_{N, I, \underline{\omega}, \Xi, E}^{(I_2, \dots, I_k, I_1)}$ et les faisceaux de Mirkovic-Vilonen $\boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} \mathcal{S}_{I_j, \boxtimes_{i \in I_j} V_{\omega_i}, E}^{(I_j)}$, donnés par

- $F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (défini dans la proposition 3.3),
- $F_1 \times \text{Id}$ (défini dans (3.5)),
- et les isomorphismes $\lambda_{N, (I_1, \dots, I_k)}^{(I_1, \dots, I_k)}$, $\lambda_{N, (I_2, \dots, I_1)}^{(I_2, \dots, I_1)}$ (définis dans le corollaire 2.16).

Démonstration. Il suffit de montrer la compatibilité sur un ouvert dense. Or sur le lieu de lissité les faisceaux d'intersection sont triviaux à un décalage et une torsion à la Tate près, et les isomorphismes de comparaison sont l'identité. Le scalaire $q^{-d/2}$ évoqué après l'énoncé de la proposition 3.3 apparaît dans F_1 . Dans la ligne du bas du diagramme ci-dessus on ne change pas l'ordre des pattes, donc il ne se pose pas de question de signes. Mais si on changeait l'ordre des pattes on appliquerait la contrainte de commutativité modifiée, comme on l'a dit après l'énoncé de la proposition 3.3. \square

Remarque 3.5. Le diagramme de la proposition 3.4 est cartésien à des homéomorphismes locaux totalement radiciels près (qui sont localement le produit d'un isomorphisme avec le morphisme de Frobenius de $G^{\text{ad}}_{\sum_{i \in I_1} n_i x_i}$).

4. FAISCEAUX DE COHOMOLOGIE ET COALESCENCE DES PATTES

Cette section ne contient rien de neuf et à part la construction de l'action des morphismes de Frobenius partiels il est entièrement extrait de [Var04] et [BV06].

4.1. Rappels sur les correspondances cohomologiques. A la suite de [SGA5, Var07, BV06] on appelle correspondance de X_1 vers X_2 un morphisme $a = (a_1, a_2) : A \rightarrow X_1 \times X_2$ de champs algébriques localement de type fini sur \mathbb{F}_q tel que a_2 soit représentable et de type fini. Alors, pour $\mathcal{F}_1 \in D_c^b(X_1, E)$ et $\mathcal{F}_2 \in D_c^b(X_2, E)$, un morphisme

$$u : a_{2,!}(a_1^*(\mathcal{F}_1)) \rightarrow \mathcal{F}_2, \text{ ou, de façon équivalente } u : a_1^*(\mathcal{F}_1) \rightarrow a_2^!(\mathcal{F}_2)$$

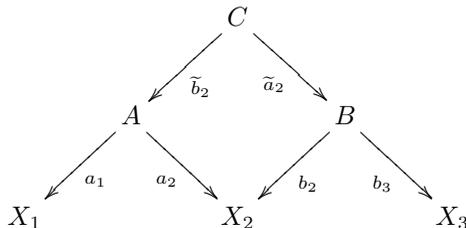
est appelé une correspondance cohomologique de \mathcal{F}_1 vers \mathcal{F}_2 (ou de (X_1, \mathcal{F}_1) vers (X_2, \mathcal{F}_2)) supportée par A .

Si a_1 est propre elle induit un morphisme sur les cohomologies à support compact. En effet soit Y un champ et $p_i : X_i \rightarrow Y$ (pour $i = 1, 2$) des morphismes tels que $p_1 \circ a_1 = p_2 \circ a_2$. On va supposer que X_1, X_2 et Y sont des champs de Deligne-Mumford parce que ce sera le cas lorsqu'on l'appliquera et que cela permet de rester dans la catégorie dérivée bornée. Alors la correspondance cohomologique u induit un morphisme $H(u) : p_{1,!}(\mathcal{F}_1) \rightarrow p_{2,!}(\mathcal{F}_2)$ dans $D_c^b(Y, E)$ donné par

$$\begin{aligned} p_{1,!}(\mathcal{F}_1) &\xrightarrow{\text{adj}} p_{1,!}a_{1,*}a_1^*(\mathcal{F}_1) = p_{1,!}a_{1,!}a_1^*(\mathcal{F}_1) \\ &\xrightarrow{u} p_{1,!}a_{1,!}a_2^!(\mathcal{F}_2) = p_{2,!}a_{2,!}a_2^!(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\text{adj}} p_{2,!}(\mathcal{F}_2) \end{aligned}$$

où on a utilisé, dans la deuxième étape, l'hypothèse que a_1 est propre.

Si $b = (b_1, b_2) : B \rightarrow X_2 \times X_3$ est une autre correspondance, $\mathcal{F}_3 \in D_c^b(X_3, E)$ et $v : b_{2,!}(b_1^*(\mathcal{F}_2)) \rightarrow \mathcal{F}_3$ est une correspondance cohomologique de \mathcal{F}_2 vers \mathcal{F}_3 supportée par B , la composée de v et u est obtenue de la façon suivante. On pose $C = A \times_{X_2} B$. On a un diagramme commutatif



où le carré est cartésien. D'où une correspondance $c = (a_1\tilde{b}_2, b_3\tilde{a}_2) : C \rightarrow X_1 \times X_3$. On définit la correspondance cohomologique $v \circ u$ de \mathcal{F}_1 vers \mathcal{F}_3 supportée par C comme la composée

$$(b_3\tilde{a}_2)!(a_1\tilde{b}_2)^*(\mathcal{F}_1) = b_{3,!}\tilde{a}_{2,!}\tilde{b}_2^*a_1^*(\mathcal{F}_1) \simeq b_{3,!}b_2^*a_{2,!}a_1^*(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{u} b_{3,!}b_2^*(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{v} \mathcal{F}_3,$$

où l'isomorphisme vient du changement de base propre $\tilde{a}_{2,!}\tilde{b}_2^* \simeq b_2^*a_{2,!}$.

Si a_1 et b_2 sont propres et $p_i : X_i \rightarrow Y$ (pour $i = 1, 2, 3$) sont des morphismes tels que $p_1 \circ a_1 = p_2 \circ a_2 = p_3 \circ a_3$ (et X_1, X_2, X_3 et Y sont des champs de Deligne-Mumford) on a $H(v \circ u) = H(v) \circ H(u) : p_{1,!}(\mathcal{F}_1) \rightarrow p_{3,!}(\mathcal{F}_3)$.

4.2. Définition des faisceaux de cohomologie.

Définition 4.1. Comme $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} / \Xi$ est un champ de Deligne-Mumford de type fini, d'après [LMB00, LO08a, LO08b] on peut définir

$$(4.1) \quad \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq\mu,E} = R(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu})_!(\mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} |_{\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} / \Xi}) \in D_c^b((X \setminus N)^I, E)$$

où l'on rappelle que $\mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ est le faisceau d'intersection de $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k)} / \Xi$ avec le degré et le poids normalisés relativement à $(X \setminus N)^I$. Comme la notation $\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq\mu,E}$ l'indique, le membre de droite de (4.1) ne dépend pas du choix de la partition (I_1, \dots, I_k) , en vertu du corollaire 2.18. Bien sûr $\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq\mu,E}$ dépend de Ξ mais on omet Ξ de la notation pour raccourcir un peu.

Soit $i \in \mathbb{Z}$. La cohomologie de degré i (pour la t -structure ordinaire)

$$(4.2) \quad \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{i,\leq\mu,E} = H^i(\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq\mu,E}) = R^i(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu})_!(\mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} |_{\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} / \Xi})$$

est un E -faisceau constructible sur $(X \setminus N)^I$. On a préféré commencer par cette définition qui est sans doute naturelle pour le lecteur familier des variétés de Shimura, mais on insiste sur le fait que la bonne définition, équivalente à celle ci-dessus mais fonctorielle en W représentation de $(\hat{G})^I$, sera donnée dans (4.9) de la définition 4.7.

Remarque 4.2. Lorsque I est vide et $\underline{\omega}$ est donc nul, $\mathcal{H}_{N,\emptyset,0}^{\leq\mu,E}$ est le faisceau constant sur $\text{Spec } \mathbb{F}_q$ supporté en degré 0 et égal à $C_c(\text{Bun}_{\hat{G},N}^{\leq\mu}(\mathbb{F}_q) / \Xi, E)$.

Remarque 4.3. Pour tout niveau $N' \supset N$ de degré assez grand en fonction de μ , le morphisme

$$\text{Cht}_{N',I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} / \Xi \xrightarrow{\mathfrak{p}_{N',I}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu}} (X \setminus N')^I$$

est représentable quasi-projectif de type fini, et $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} / \Xi |_{(X \setminus N')^I}$ est le quotient de $\text{Cht}_{N',I,\underline{\omega}}^{(I_1,\dots,I_k),\leq\mu} / \Xi$ par le groupe fini $\text{Ker}(G(\mathcal{O}_{N'}) \rightarrow G(\mathcal{O}_N))$. Par conséquent on pourrait définir les faisceaux $\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{i,\leq\mu,E}$ en employant seulement la cohomologie étale des schémas (puis en prenant les coinvariants par le groupe fini susmentionné).

4.3. Action des morphismes de Frobenius partiels. Le lemme 3.1 et la proposition 3.3 fournissent, pour toute partie J de I le morphisme suivant dans $D_c^b((X \setminus N)^I, E)$:

$$(4.3) \quad F_J : \text{Frob}_J^*(\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq\mu,E}) \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq\mu+\sum_{i \in J} \omega_i, E},$$

où $\text{Frob}_J : (X \setminus N)^I \rightarrow (X \setminus N)^I$ a été défini dans (3.1). Pour toute partition (I_1, \dots, I_k) telle que $I_1 = J$, ce morphisme est associé à la correspondance cohomologique de $(\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu} / \Xi, \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_2, \dots, I_k, I_1)})$ vers $(\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu'} / \Xi, \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)})$ donnée par

- le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu} / \Xi & \xleftarrow{a_1} & a_1^{-1}(\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu} / \Xi) & \hookrightarrow & \text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu'} / \Xi \\
 \mathfrak{p}_{N,I}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu} \downarrow & & \mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} \downarrow & & \mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu'} \downarrow \\
 (X \setminus N)^I & \xleftarrow{\text{Frob}_J} & (X \setminus N)^I & \xrightarrow{\text{Id}} & (X \setminus N)^I
 \end{array}$$

où $a_1 = \text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$, $\mu' = \mu + \sum_{i \in I_1} \omega_i$ et l'inclusion ouverte vient de (3.2),

- le morphisme $F_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)} : a_1^*(\mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_2, \dots, I_k, I_1)}) \rightarrow \mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (défini dans la proposition 3.3).

On peut remarquer qu'ici, bien que le carré de gauche ne soit pas cartésien, on est essentiellement dans une situation de changement de base propre car $a_1 = \text{Fr}_{I_1, N, I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et Frob_J sont des homéomorphismes locaux totalement radiciels, et donc le morphisme de $a_1^{-1}(\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_2, \dots, I_k, I_1), \leq \mu} / \Xi)$ dans le produit fibré associé au carré de gauche est un homéomorphisme local totalement radiciel : c'est pourquoi nous avons dit dans l'introduction que F_J était obtenu par changement de base propre. Grâce au corollaire 2.18 le morphisme F_J ne dépend pas du choix de la partition (I_1, \dots, I_k) de I telle que $I_1 = J$. Pour toute partie J de I ,

$$F_J \text{Frob}_J^*(F_{I \setminus J}) : \text{Frob}^* \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu, E} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu + \sum_{i \in I} \omega_i, E},$$

est la composée de l'action naturelle du morphisme de Frobenius (total) et d'une augmentation de la troncature.

4.4. Action des algèbres de Hecke. Soit $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$ et \mathfrak{T} un ensemble fini de places de X contenant $|N|$ et tel que

$$(4.4) \quad f = \bigotimes_{v \notin \mathfrak{T}} \mathbf{1}_{G(\mathcal{O}_v)} \otimes f'.$$

Alors la construction 2 fournit, pour κ assez grand en fonction de f , un morphisme

$$T(f) \in \text{Hom}_{D_c^b((X \setminus \mathfrak{T})^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus \mathfrak{T})^I}, \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu + \kappa, E} \Big|_{(X \setminus \mathfrak{T})^I} \right)$$

tel que si f est la fonction caractéristique de $K_N g K_N$ (multipliée par la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ telle que K_N ait pour volume 1), $T(f)$ est l'action de la correspondance finie $\Gamma_N(g)$, c'est-à-dire $\text{pr}_{1,!} g^* \text{pr}_2^*$ dans les notations du diagramme (2.14). Ces actions sont compatibles avec la composition: si $f_1, f_2 \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$ satisfont la condition (4.4) avec \mathfrak{T}_1 et \mathfrak{T}_2 , alors pour κ assez grand en fonction de f_1 et f_2 , on a

$$(4.5) \quad T(f_1 f_2) = T(f_1) T(f_2)$$

dans

$$\text{Hom}_{D_c^b((X \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2))^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2))^I}, \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu + \kappa, E} \Big|_{(X \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2))^I} \right).$$

On peut définir aussi les morphismes $T(f)$ à l'aide de correspondances cohomologiques (finies) et déduire (4.5) des règles de composition des correspondances. On note que ces correspondances cohomologiques sont définies sur \mathcal{O}_E si f l'est.

Par ailleurs l'action des algèbres de Hecke commute avec l'action des morphismes de Frobenius partiels.

Dans le corollaire 6.5 on verra que ces morphismes $T(f)$ peuvent être étendus à $(X \setminus N)^I$.

4.5. Définition fonctorielle en W . Soit W une représentation E -linéaire de dimension finie de $(\widehat{G})^I$. Le corollaire 2.15 et l'équivalence de Satake géométrique vont fournir une définition fonctorielle en W de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}$ comme la cohomologie d'un certain faisceau pervers (à décalage près). Soit (I_1, \dots, I_k) une partition de I .

Notation 4.4. En tant que représentation de $(\widehat{G})^I$, W admet une unique décomposition de la forme

$$(4.6) \quad W = \bigoplus_{\underline{\omega} \in (X^+(T))^I} \left(\bigotimes_{i \in I} V_{\omega_i} \right) \otimes_E \mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$$

où les $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ sont des E -espaces vectoriels de dimension finie, presque tous nuls. On note $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ la réunion des $\text{Cht}_{N,I,\underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ pour $\underline{\omega}$ tel que $\mathfrak{W}_{\underline{\omega}}$ est non nul. On rappelle que dans la section 1 on a défini de la même façon $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$ (où les entiers n_i sont assez grands en fonction de W).

Par l'équivalence de Satake géométrique (sous la forme où on l'a rappelée dans le théorème 1.17, voir [MV07, BD99, Gai07] pour plus de détails) on a le faisceau pervers (à un décalage près) $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}$ (on rappelle qu'il est normalisé de telle sorte que son image inverse sur $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ soit perverse relativement à X^I). D'après la remarque 1.20, $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est en fait un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}^{\text{ad}}$.

On rappelle, d'après la proposition 2.8 et la notation qui précède le corollaire 2.15, que

$$\epsilon_{N,(I),W,\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k), \Xi} : \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi \rightarrow \text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$$

est le morphisme lisse qui à un chtouca (2.2) associe

$$(4.7) \quad (\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k) \in \text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$$

(avec les notations de la remarque 1.11, en particulier le $G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$ -torseur tau-tologique sur le point (4.7) est déduit du $G_{\sum n_i x_i}$ -torseur $\mathcal{G}_k|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}}$).

Définition 4.5. On définit $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme le faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi$ égal à

$$(4.8) \quad \mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)} = (\epsilon_{N,(I),W,\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k), \Xi})^* (\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}).$$

Remarque 4.6. Ceci généralise la définition 2.14: lorsque $W = \boxtimes_i V_{\omega_i}$ est irréductible, $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est égal à $\mathcal{F}_{N,I,\underline{\omega},\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$, grâce au corollaire 2.15. Cela est vrai canoniquement (et non pas au produit tensoriel près par une droite vectorielle) si on définit V_{ω_i} comme la cohomologie totale du faisceau d'intersection de la strate

fermée associée à ω_i dans la grassmannienne affine (car le foncteur fibre donnant l'équivalence de Satake géométrique est la cohomologie totale, comme on l'a rappelé dans le théorème 1.17).

La définition suivante de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}$ est fonctorielle en W et de plus elle permettra de construire l'isomorphisme de coalescence de la proposition 4.12 d'une façon canonique.

Définition 4.7. On pose

$$(4.9) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} = R(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})_! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi} \right).$$

Remarque 4.8. En utilisant la décomposition (4.6) avec la définition canonique des V_{ω_i} expliquée dans la remarque 4.6, on peut réécrire la définition précédente sous la forme

$$(4.10) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} = \bigoplus_{\underline{\omega} \in (X_*^+(T))^I} \mathcal{H}_{N,I,\underline{\omega}}^{\leq \mu, E} \otimes_E \mathfrak{W}_{\underline{\omega}}.$$

Cette formule permet de voir la fonctorialité en W , mais elle est beaucoup moins commode que (4.9), notamment pour étudier la coalescence.

Notation 4.9. D'après la définition précédente, $W \mapsto \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}$ est un foncteur E -linéaire. Si $u : W_1 \rightarrow W_2$ est un morphisme de représentations de $(\widehat{G})^I$ on note

$$\mathcal{H}(u) \in \text{Hom}_{D_c^b((X \setminus N)^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W_1}^{\leq \mu, E}, \mathcal{H}_{N,I,W_2}^{\leq \mu, E} \right)$$

le morphisme associé à u .

Une autre définition équivalente de $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est donnée par la proposition suivante. Elle permettra de réexprimer la proposition 3.4 (qui explicite les actions des morphismes de Frobenius partiels) de façon fonctorielle en W .

Proposition 4.10. Soit $W = \boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} W_j$ où W_j est une représentation de $(\widehat{G})^{I_j}$. On a alors un isomorphisme canonique

$$(4.11) \quad \mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)} = \left(\epsilon_{N, (I_1, \dots, I_k), W, \underline{\omega}}^{(I_1, \dots, I_k), \Xi} \right)^* \left(\boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} \mathcal{S}_{I_j, W_j, E}^{(I_j)} \right).$$

Cet isomorphisme est compatible avec l'action du morphisme de Frobenius partiel associé à I_1 .

Démonstration. Cela résulte du lemme 1.16, du corollaire 2.16 et de la proposition 3.4. □

Remarque 4.11. La définition 4.5 et la proposition 4.10 admettent la généralisation suivante, qui ne sera jamais utilisée. Soit $(J_{j,l})_{j,l}$ comme dans la remarque 2.10. On a alors un isomorphisme canonique

$$\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(J_{j,l})_{j,l}} = \left(\epsilon_{N, (I_1, \dots, I_k), W, \underline{\omega}}^{(J_{j,l})_{j,l}, \Xi} \right)^* \left(\boxtimes_{j \in \{1, \dots, k\}} \mathcal{S}_{I_j, W_j, E}^{(J_{j,1}, \dots, J_{j,m_j})} \right).$$

La proposition suivante jouera un rôle fondamental pour étudier la coalescence.

Proposition 4.12 (Remarque 2.3.2 de [BV06]). Soit I, J des ensembles finis et $\zeta : I \rightarrow J$ une application. On note

$$\Delta_\zeta : X^J \rightarrow X^I, (x_j)_{j \in J} \mapsto (x_{\zeta(i)})_{i \in I}$$

le morphisme diagonal associé à ζ . Soit W une représentation E -linéaire de dimension finie de \widehat{G}^I . On note W^ζ la représentation de \widehat{G}^J qui est la composée de la représentation W avec le morphisme diagonal

$$\widehat{G}^J \rightarrow \widehat{G}^I, (g_j)_{j \in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i \in I}.$$

Alors l'isomorphisme canonique rappelé dans d) du théorème 1.17 fournit un isomorphisme canonique

$$(4.12) \quad \chi_\zeta : \Delta_\zeta^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{N,J,W^\zeta}^{\leq \mu, E} \quad \text{dans } D_c^b((X \setminus N)^J, E)$$

que nous appellerons isomorphisme de coalescence. Il est fonctoriel en W et compatible avec la composition de ζ .

Remarque 4.13. Cet énoncé est vrai sans décalage cohomologique ni torsion à la Tate parce que les faisceaux d'intersection sur les champs de chtoucas (ou sur les grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld) ont été normalisés relativement aux puissances de X . Bien sûr on utilise la contrainte de commutativité *modifiée* de [MV07] (un exemple simple pour comprendre ce qui se passe est le cas particulier où $I = J$ et ζ est une permutation de I , de sorte que $\Delta_\zeta : X^I \rightarrow X^I$ est le changement de l'ordre des pattes).

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat quand ζ est injective ou surjective. Si ζ est injective, cela résulte de la propriété c) de la proposition 2.6. On suppose maintenant que ζ est surjective. Soit (J_1, \dots, J_k) une partition de J . On considère la partition (I_1, \dots, I_k) de I donnée par $I_j = \zeta^{-1}(J_j)$. On a un isomorphisme

$$\kappa : \text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{(X \setminus N)^I} (X \setminus N)^J \xrightarrow{\sim} \text{Cht}_{N,J}^{(J_1, \dots, J_k)}$$

défini tautologiquement par

$$\begin{aligned} \kappa & \left(((x_{\zeta(i)})_{i \in I}), (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \right), (x_j)_{j \in J} \\ & = ((x_j)_{j \in J}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)). \end{aligned}$$

On note

$$\text{pr}_1 : \text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \times_{(X \setminus N)^I} (X \setminus N)^J \rightarrow \text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

la première projection. Grâce à la définition 4.5 et à la propriété d) du théorème 1.17, on obtient un isomorphisme $\text{pr}_1^*(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}) \simeq \kappa^*(\mathcal{F}_{N,J,W^\zeta,\Xi,E}^{(J_1, \dots, J_k)})$. Ces morphismes passent au quotient par Ξ . Grâce à la définition 4.7 le théorème de changement de base propre fournit alors l'isomorphisme (4.12). \square

Proposition 4.14. *Les actions des morphismes de Frobenius partiels et des opérateurs de Hecke sont compatibles avec les morphismes $\mathcal{H}(u)$ de la notation 4.9 et avec les isomorphismes de coalescence de la proposition précédente.*

La compatibilité entre les morphismes de Frobenius partiels et l'isomorphisme de coalescence (4.12) signifie que pour tout $j \in J$, $\Delta_\zeta^*(F_{\zeta^{-1}(\{j\})})$ et $F_{\{j\}}$ se correspondent par l'isomorphisme χ_ζ de (4.12).

Démonstration. Pour les opérateurs de Hecke cela est facile et pour les morphismes de Frobenius partiels cela résulte de la proposition 3.4 réexprimée de façon fonctorielle en W grâce à la proposition 4.10. \square

5. MORPHISMES DE CRÉATION ET D'ANNIHILATION

Dans cette section on va utiliser les isomorphismes de coalescence pour définir des morphismes de création et d'annihilation. Ils joueront un rôle essentiel dans la définition des opérateurs d'excursion.

Soit I et J des ensembles finis. Dans la suite des réunions comme $I \cup J$ et $I \cup \{0\}$ désigneront *toujours* des réunions disjointes. On introduit les applications évidentes

$$(5.1) \quad \zeta_J : J \rightarrow \{0\}, \quad \zeta_J^I = (\text{Id}_I, \zeta_J) : I \cup J \rightarrow I \cup \{0\} \quad \text{et} \quad \zeta_\emptyset^I = (\text{Id}_I, \zeta_\emptyset) : I \rightarrow I \cup \{0\}.$$

Soit W et U des représentations E -linéaires de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ et $(\widehat{G})^J$ respectivement. On rappelle que U^{ζ_J} désigne la représentation de \widehat{G} obtenue en restreignant U à la diagonale. Soit $x : \mathbf{1} \rightarrow U^{\zeta_J}$ et $\xi : U^{\zeta_J} \rightarrow \mathbf{1}$ des morphismes de représentations de \widehat{G} . En d'autres termes on se donne $x \in U$ et $\xi \in U^*$ invariants par l'action diagonale de \widehat{G} .

Alors $W \boxtimes U$ est une représentation de $(\widehat{G})^{I \cup J}$, et $W \boxtimes U^{\zeta_J}$ et $W \boxtimes \mathbf{1}$ sont des représentations de $(\widehat{G})^{I \cup \{0\}}$, reliées entre elles par les morphismes $\text{Id}_W \boxtimes x$ et $\text{Id}_W \boxtimes \xi$.

On note $\Delta : X \rightarrow X^J$ le morphisme diagonal.

On rappelle que les isomorphismes de coalescence

$$\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{X \setminus N} \xrightarrow{\chi_{\zeta_\emptyset^I}} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes \mathbf{1}}^{\leq \mu, E}$$

et

$$\mathcal{H}_{N, I \cup J, W \boxtimes U}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \xrightarrow{\chi_{\zeta_J^I}} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{\leq \mu, E}$$

ont été construits dans la proposition 4.12.

Voici maintenant la définition des morphismes de création et d'annihilation. Ce sont des morphismes dans la catégorie $D_c^b((X \setminus N)^I \times (X \setminus N), E)$ mais on gardera la même notation pour les actions induites sur les faisceaux de cohomologie comme $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ (au demeurant, seules ces actions induites serviront dans la démonstration du théorème principal).

Définition 5.1. Le morphisme de création \mathcal{C}_x^\sharp est défini comme la composée

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \xrightarrow{\chi_{\zeta_\emptyset^I}} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes \mathbf{1}}^{\leq \mu, E} \\ & \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes x)} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{\leq \mu, E} \xrightarrow{\chi_{\zeta_J^I}^{-1}} \mathcal{H}_{N, I \cup J, W \boxtimes U}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)}. \end{aligned}$$

Définition 5.2. Le morphisme d'annihilation \mathcal{C}_ξ^b est défini comme la composée

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N, I \cup J, W \boxtimes U}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \xrightarrow{\chi_{\zeta_J^I}} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{\leq \mu, E} \\ & \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes \xi)} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes \mathbf{1}}^{\leq \mu, E} \xrightarrow{\chi_{\zeta_\emptyset^I}^{-1}} \mathcal{H}_{N, I, W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)}. \end{aligned}$$

Il résulte de la proposition 4.14 que les morphismes de création et d'annihilation commutent avec l'action des opérateurs de Hecke et qu'ils sont compatibles avec l'action des morphismes de Frobenius partiels au sens suivant:

- si K est une partie de I , ils commutent avec F_K ,
- ils entrelacent F_J et l'action naturelle du morphisme de Frobenius partiel sur $E_{X \setminus N}$ (qui correspond par $\chi_{\zeta_0^I}$ à l'action de $F_{\{0\}}$ sur $\mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes \mathbf{1}}^{\leq \mu, E}$).

Le lemme suivant est facile. Il dit que

- les morphismes de création et d'annihilation commutent entre eux quand ils concernent des sous-ensembles disjoints de pattes,
- la composée de deux morphismes de création associés à deux sous-ensembles disjoints de pattes placées au même point de $X \setminus N$ est le morphisme de création associé à leur réunion,
- il en va de même pour les morphismes d'annihilation.

Lemme 5.3. *Soit I, J_1, J_2 des ensembles finis et W, U_1, U_2 des représentations de $(\widehat{G})^I, (\widehat{G})^{J_1}$ et $(\widehat{G})^{J_2}$. Pour $i = 1, 2$ on se donne des morphismes $x_i : \mathbf{1} \rightarrow U_i^{\zeta_i}$ et $\xi_i : U_i^{\zeta_i} \rightarrow \mathbf{1}$ de représentations de \widehat{G} . Alors*

a) *les composées*

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N, I \cup J_1, W \boxtimes U_1}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \xrightarrow{\mathfrak{e}_{\xi_1}^b} \mathcal{H}_{N, I, W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)^2} \\ & \xrightarrow{\mathfrak{e}_{x_2}^\#} \mathcal{H}_{N, I \cup J_2, W \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N, I \cup J_1, W \boxtimes U_1}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \xrightarrow{\mathfrak{e}_{x_2}^\#} \\ & \mathcal{H}_{N, I \cup J_1 \cup J_2, W \boxtimes U_1 \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)^2} \xrightarrow{\mathfrak{e}_{\xi_1}^b} \\ & \mathcal{H}_{N, I \cup J_2, W \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \end{aligned}$$

sont égales (dans ces formules les deux copies de $X \setminus N$ ne sont pas bien distinguées mais la règle est simplement que la création par x_2 agit sur l'une et l'annihilation par ξ_1 agit sur l'autre),

b) *la composée*

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N, I, W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)^2} \xrightarrow{\mathfrak{e}_{x_1}^\#} \mathcal{H}_{N, I \cup J_1, W \boxtimes U_1}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \\ & \xrightarrow{\mathfrak{e}_{x_2}^\#} \mathcal{H}_{N, I \cup J_1 \cup J_2, W \boxtimes U_1 \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)^2} \end{aligned}$$

est égale à la composée

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{N, I, W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)^2} \xrightarrow{\mathfrak{e}_{x_2}^\#} \mathcal{H}_{N, I \cup J_2, W \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \\ & \xrightarrow{\mathfrak{e}_{x_1}^\#} \mathcal{H}_{N, I \cup J_1 \cup J_2, W \boxtimes U_1 \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)^2} \end{aligned}$$

obtenue en changeant l'ordre des deux morphismes, et la restriction de ces deux composées à $(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)$ est égale à $\mathfrak{e}_{x_1 \boxtimes x_2}^\#$,

c) de même, la composée

$$\mathcal{H}_{N, I \cup J_1 \cup J_2, W \boxtimes U_1 \boxtimes U_2}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)^2} \xrightarrow{\mathcal{C}_{\xi_2}^b} \\ \mathcal{H}_{N, I \cup J_1, W \boxtimes U_1}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \xrightarrow{\mathcal{C}_{\xi_1}^b} \mathcal{H}_{N, I, W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)^2}$$

est égale à la composée obtenue en changeant l'ordre des deux morphismes, et la restriction de ces deux composées à $(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)$ est égale à $\mathcal{C}_{\xi_1 \boxtimes \xi_2}^b$, \square

Remarque 5.4. Soit θ une involution de Chevalley de \widehat{G} , telle que $\theta(t) = t^{-1}$ pour $t \in \widehat{T}$. Le théorème 1.17 (qui rappelle l'équivalence de Satake géométrique [MV07, BD99, Gai07]) associe à toute représentation de dimension finie W de $(\widehat{G})^I$ un faisceau pervers $G_{\sum n_i x_i}$ -équivariant $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\text{Gr}_{I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ (avec la normalisation perverse relative à X^I). On normalise la dualité de Verdier relativement à X^I . Alors on a un isomorphisme canonique $\mathbb{D}(\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}) \simeq \mathcal{S}_{I, W^{*, \theta}, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$, fonctoriel en W , où $W^{*, \theta}$ désigne la représentation contragrédiente de $(\widehat{G})^I$, composée avec $\theta^I : (\widehat{G})^I \rightarrow (\widehat{G})^I$. Par conséquent on a

$$\text{Cht}_{N, I, W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} = \text{Cht}_{N, I, W^{*, \theta}}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}(\mathcal{F}_{N, I, W, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}) \simeq \mathcal{F}_{N, I, W^{*, \theta}, \Xi, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

où le dernier isomorphisme est canonique, fonctoriel en W et compatible avec la coalescence des pattes. On en déduit un morphisme de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$,

$$(5.2) \quad \mathfrak{B}_{N, I, W}^{\Xi, E} : \mathcal{H}_{N, I, W^{*, \theta}}^{0, \leq \mu, E} \otimes \mathcal{H}_{N, I, W}^{0, \leq \mu, E} \rightarrow E_{(X \setminus N)^I}.$$

Les morphismes de création et d'annihilation sont transposés l'un de l'autre par rapport à (5.2). Plus précisément, si J est un autre ensemble fini, U une représentation de dimension finie de $(\widehat{G})^J$ et $x \in U^{\zeta_J}$ alors pour toutes sections locales h et h' de

$$\mathcal{H}_{N, I, W}^{0, \leq \mu, E} \boxtimes E_{(X \setminus N)} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{N, I \cup J, W^{*, \theta} \boxtimes U^{*, \theta}}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)}$$

sur $(X \setminus N)^I \times (X \setminus N)$, on a

$$(5.3) \quad \left(\mathfrak{B}_{N, I \cup J, W \boxtimes U}^{\Xi, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(X \setminus N)} \right) \left(h' \otimes \mathcal{C}_x^\sharp(h) \right) = \mathfrak{B}_{N, I, W}^{\Xi, E} \left(\mathcal{C}_x^b(h') \otimes h \right)$$

où, dans le membre de droite, x est considéré comme une forme linéaire sur $U^{*, \theta}$ (invariante sous l'action diagonale de \widehat{G}).

6. MORPHISMES DE FROBENIUS PARTIELS, COALESCENCE DES PATTES ET OPÉRATEURS DE HECKE

Cette section est consacrée à la démonstration de la proposition 6.2, qui affirme que les opérateurs de Hecke en les places v de $X \setminus N$, qui sont des morphismes dans $D_c^b((X \setminus (N \cup v))^I, E)$, sont les restrictions de morphismes $S_{V, v}$ dans $D_c^b((X \setminus N)^I, E)$, que nous allons définir comme la composée

- d'un morphisme de création,
- de l'action d'un morphisme de Frobenius partiel,
- d'un morphisme d'annihilation.

La proposition 6.2 servira dans le lemme 10.2 pour montrer que les opérateurs de Hecke en les places non ramifiées sont des cas particuliers d'opérateurs d'excursion (ce qui justifiera que la décomposition (0.3) est compatible avec l'isomorphisme de Satake en les places non ramifiées). Elle jouera aussi un rôle technique mais crucial dans la section 8, grâce aux relations d'Eichler-Shimura qui en seront déduites dans la prochaine section.

6.1. Énoncé des résultats. Soit I un ensemble fini et W une représentation de dimension finie de $(\widehat{G})^I$. Soit V une représentation de dimension finie de \widehat{G} . On considère $W \boxtimes V \boxtimes V^*$ comme une représentation de $(\widehat{G})^{I \cup \{1,2\}}$.

Soit v une place de $X \setminus N$. On considère $v = \text{Spec}(k(v))$ comme un sous-schéma de X et on note E_v le faisceau constant sur v . Soit V une représentation irréductible de \widehat{G} . La fonction $h_{V,v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v), \mathcal{O}_E)$ désigne la fonction sphérique associée à V par l'isomorphisme de Satake, comme à la fin de la première section.

On note $\Delta : X \rightarrow X \times X$ le morphisme diagonal. On remarque que le point fermé $\Delta(v)$ de $X \times X$ est préservé par $\text{Frob}_X^{\text{deg}(v)} \times \text{Id}$.

On a des morphismes naturels de \widehat{G} -représentations

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\delta_V} V \otimes V^* \quad \text{et} \quad V \otimes V^* \xrightarrow{\text{ev}_V} \mathbf{1}.$$

Remarque 6.1. Les notations δ_V et ev_V , qui ont déjà été employées dans l'introduction, viennent de [Del90], à ceci près que nous nous autorisons à modifier arbitrairement l'ordre de V et V^* . Nous renvoyons à la remarque 1.19 pour la contrainte de commutativité *modifiée* en vigueur pour les faisceaux $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et donc $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$.

On a une équivalence de catégories

$$(6.1) \quad D_c^b((X \setminus N)^I \times v, E)^{F_v} \simeq D_c^b((X \setminus N)^I, E)$$

où la catégorie de gauche est formée des objets \mathcal{F} munis d'un isomorphisme $\theta : (\text{Id}_{(X \setminus N)^I} \times \text{Frob}_v)^*(\mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}$ dont l'itérée $\text{deg}(v)$ fois est l'identité. L'équivalence (6.1) est une descente relativement à l'action de $\mathbb{Z} / \text{deg}(v)\mathbb{Z}$ (donc elle est tautologique si $\text{deg}(v) = 1$). Plus précisément elle associe (de la droite vers la gauche) à un faisceau sur $(X \setminus N)^I$ son image inverse par la première projection $p_1 : (X \setminus N)^I \times v \rightarrow (X \setminus N)^I$ et comme $p_1 \circ (\text{Id}_{(X \setminus N)^I} \times \text{Frob}_v) = p_1$ cette image inverse est munie d'une donnée de descente et appartient donc à $D_c^b((X \setminus N)^I \times v, E)^{F_v}$. Inversement, si $(\mathcal{F}, \theta) \in D_c^b((X \setminus N)^I \times v, E)^{F_v}$, son image dans $D_c^b((X \setminus N)^I, E)$ est $(p_{1,*}(\mathcal{F}))^{F_v}$ (c'est-à-dire que l'on prend les invariants par l'action de $\mathbb{Z} / \text{deg}(v)\mathbb{Z}$ sur $p_{1,*}(\mathcal{F})$ donnée par θ).

Pour κ assez grand (en fonction de $\text{deg}(v), V$), on définit $S_{V,v}$ comme la composée

$$(6.2) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} \boxtimes E_v$$

$$(6.3) \quad \xrightarrow{e_{\delta_V}^\# \big|_{(X \setminus N)^I \times v}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\leq \mu, E} \big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)}$$

$$(6.4) \quad \xrightarrow{(F_{\{1\}})^{\text{deg}(v)} \big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\leq \mu + \kappa, E} \big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)}$$

$$(6.5) \quad \xrightarrow{e_{\text{ev}_V} \big|_{(X \setminus N)^I \times v}} \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} \boxtimes E_v.$$

Le morphisme $S_{V,v}$ commute avec l'action naturelle du morphisme de Frobenius partiel sur E_v dans (6.2) et (6.5) parce que

- les morphismes de création et d'annihilation entrelacent cette action avec l'action de $F_{\{1,2\}}$ sur (6.3) et (6.4),
- $F_{\{1\}}$, et donc $F_{\{1\}}^{\deg(v)}$, commutent avec $F_{\{1,2\}}$.

Grâce à l'équivalence (6.1), $S_{V,v}$ se descend en un morphisme

$$S_{V,v} : \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E}$$

dans $D_c^b((X \setminus N)^I, E)$.

A l'aide de la proposition 4.14 et du lemme 5.3 on montre facilement que si V et V' sont des représentations de \widehat{G} et v et v' sont des places de $X \setminus N$, $S_{V,v}$ et $S_{V',v'}$ commutent et que si $v = v'$ leur composée est égale à $S_{V \otimes V', v}$.

Proposition 6.2. *Pour κ assez grand (en fonction de $\deg(v), V$), on a égalité dans*

$$\text{Hom}_{D_c^b((X \setminus (N \cup v))^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I}, \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I} \right)$$

entre $T(h_{V,v})$ et la restriction de $S_{V,v}$ de $(X \setminus N)^I$ à $(X \setminus (N \cup v))^I$.

La proposition signifie que le morphisme $S_{V,v}$ défini ci-dessus prolonge à $(X \setminus N)^I$ l'opérateur de Hecke $T(h_{V,v})$ qui était défini seulement sur $(X \setminus (N \cup v))^I$ par la construction du paragraphe 4.4.

Remarque 6.3. La preuve du résultat principal de cet article utilisera seulement l'égalité entre les morphismes induits de faisceaux sur $(X \setminus (N \cup v))^I$ de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I}$ vers $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu + \kappa, E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I}$.

La preuve de la proposition 6.2 lorsque V est minuscule et $\deg(v) = 1$ a été esquissée dans l'introduction. La preuve du cas général sera donnée dans les paragraphes suivants.

Remarque 6.4. Pour les variétés de Shimura sur les corps de nombres une extension de $T(h_{V,v})$ en v a été définie dans de nombreux cas, de façon modulaire, par adhérence de Zariski, ou à l'aide de cycles proches (voir [Del71, FC90, GT05]).

Sans aucun effort supplémentaire on peut étendre *tous* les opérateurs de Hecke en des morphismes dans $D_c^b((X \setminus N)^I, E)$.

Corollaire 6.5. *Pour toute fonction $f \in C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, E)$ le morphisme $T(f)$ défini dans le paragraphe 4.4 s'étend naturellement, pour κ assez grand en fonction de f , en un morphisme*

$$T(f) \in \text{Hom}_{D_c^b((X \setminus N)^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}, \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} \right)$$

dans $D_c^b((X \setminus N)^I, E)$ de sorte que

- $f \mapsto T(f)$ est E -linéaire,
- pour tout $v \in |X| \setminus N$, on a $T(h_{V,v}) = S_{V,v}$,
- ces extensions sont compatibles avec la composition: pour tout $f_1, f_2 \in C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, E)$ et κ assez grand en fonction de f_1 et f_2 , on a

$$T(f_1 f_2) = T(f_1) T(f_2) \text{ dans } \text{Hom}_{D_c^b((X \setminus N)^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}, \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} \right).$$

De plus ces extensions commutent avec l'action des morphismes de Frobenius partiels, et avec les morphismes de création et d'annihilation.

Démonstration. Comme $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$ est le produit tensoriel restreint des $C_c(K_{N,v} \backslash G(F_v)/K_{N,v}, E)$, il suffit, pour toute place $v \in |X|$ et pour tout $f \in C_c(K_{N,v} \backslash G(F_v)/K_{N,v}, E)$, d'étendre

$$T(f) \in \text{Hom}_{D_c^b((X \setminus (N \cup v))^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I}, \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} \Big|_{(X \setminus (N \cup v))^I} \right)$$

à $\text{Hom}_{D_c^b((X \setminus N)^I, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E}, \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} \right)$. Il n'y a rien à faire si $v \in N$. Si $v \notin N$ les fonctions $h_{V,v}$ forment une base de $C_c(K_{N,v} \backslash G(F_v)/K_{N,v}, E)$ et on pose $T(h_{V,v}) = S_{V,v}$. Il reste à montrer qu'étant donné $v_1, v_2 \in |X|$ et $f_i \in C_c(K_{N,v_i} \backslash G(F_{v_i})/K_{N,v_i}, E)$ pour $i = 1, 2$, les opérateurs $T(f_1)$ et $T(f_2)$ définis ainsi commutent si $v_1 \neq v_2$ et que leur produit est $T(f_1 f_2)$ si $v_1 = v_2$. Si v_1 et v_2 appartiennent à $|N|$ il n'y a rien de plus que les propriétés habituelles des opérateurs de Hecke. Si l'un appartient à $|N|$ et l'autre à $|X \setminus N|$, on le sait déjà car les morphismes $S_{V,v}$ commutent aux morphismes $T(f)$ construits dans le paragraphe 4.4. Si v_1 et v_2 appartiennent à $|X \setminus N|$ on l'a déjà vu juste avant la proposition 6.2. \square

6.2. La formule des traces de Grothendieck-Lefschetz par les correspondances cohomologiques. Ce paragraphe rappelle des résultats de [Var07, BV06].

Soit Y un schéma de type fini sur un corps fini k et $\text{Frob}_{Y/k}$ le morphisme de Frobenius k -linéaire (plus tard nous appliquerons ceci avec $k = k(v)$). Soit $\mathcal{F} \in D_c^b(Y, E)$. On a un isomorphisme canonique $F_{\mathcal{F}} : \text{Frob}_{Y/k}^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$. On note $E_{\text{Spec } k}$ le faisceau constant sur $\text{Spec } k$. On note $\Delta : Y \rightarrow Y \times Y$ le morphisme diagonal et $\pi : Y \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme évident. On note $K_Y = \pi^!(E_{\text{Spec } k})$ le faisceau dualisant de Y et $\mathbb{D}\mathcal{F} = \text{RHom}(\mathcal{F}, K_Y) \in D_c^b(Y, E)$ le dual de Verdier de \mathcal{F} . On va étudier la composée des trois correspondances cohomologiques suivantes.

- On note $\mathcal{C}_{\sharp}^{\Delta}$ la correspondance cohomologique de $(\text{Spec } k, E_{\text{Spec } k})$ vers $(Y \times Y, \mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F})$ supportée par la correspondance diagonale

$$\text{Spec } k \xleftarrow{\pi} Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y$$

et donnée par le morphisme tautologique

$$\alpha_{\sharp} : \pi^*(E_{\text{Spec } k}) = E_Y \rightarrow \text{RHom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \Delta^!(\mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F}).$$

- On note $\mathcal{C}_{\text{Id} \times \text{Frob}}$ la correspondance cohomologique de $(Y \times Y, \mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F})$ vers lui-même supportée par la correspondance “image inverse”

$$Y \times Y \xleftarrow{\text{Id}_Y \times \text{Frob}_Y} Y \times Y \xrightarrow{\text{Id}_Y \times \text{Id}_Y} Y \times Y$$

et donnée par le morphisme

$$\text{Id}_{\mathbb{D}\mathcal{F}} \boxtimes F_{\mathcal{F}} : \mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \text{Frob}_Y^*(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F}.$$

- On note $\mathcal{C}_{\natural}^{\Delta}$ la correspondance cohomologique de $(Y \times Y, \mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F})$ vers $(\text{Spec } k, E_{\text{Spec } k})$ supportée par la correspondance diagonale

$$Y \times Y \xleftarrow{\Delta} Y \xrightarrow{\pi} \text{Spec } k$$

et donnée par le morphisme tautologique

$$\Delta^*(\mathbb{D}\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{F}) = \mathbb{D}\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \rightarrow K_Y = \pi^!(E_{\text{Spec } k}).$$

Sur l'ensemble $Y(k)$ on possède la fonction f associé à \mathcal{F} par le dictionnaire "faisceaux-fonctions", c'est-à-dire que pour $y \in Y(k)$,

$$f(y) = \text{Tr}(\text{Frob}_y, \mathcal{F}_y) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}_y, H^i(\mathcal{F})_y).$$

Dans la proposition suivante on considère $Y(k)$ comme un schéma discret (égal à une réunion finie de copies de $\text{Spec } k$ indexée par l'ensemble $Y(k)$). On note $p : Y(k) \rightarrow \text{Spec } k$ le morphisme évident.

On définit \mathcal{C}_f comme la correspondance cohomologique supportée sur

$$\text{Spec } k \xleftarrow{p} Y(k) \xrightarrow{p} \text{Spec } k$$

et donnée par le morphisme

$$p^*(E_{\text{Spec } k}) = E_{Y(k)} \rightarrow E_{Y(k)} = p^*(E_{\text{Spec } k})$$

de multiplication par f .

La proposition suivante est l'énoncé local sous-jacent à la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, tel qu'il est formulé dans [BV06] et [Var07].

Proposition 6.6 (Claim 1.5.5 de [BV06], voir aussi [Var07] 1.2.2, 1.5.7, 2.1.3, 2.2.4). *La composée $\mathcal{C}_b^\Delta \circ \mathcal{C}_{\text{Id} \times \text{Frob}} \circ \mathcal{C}_\sharp^\Delta$ est égale à la correspondance cohomologique \mathcal{C}_f de $(\text{Spec } k, E_{\text{Spec } k})$ vers lui-même.*

6.3. Reformulation de la proposition 6.2. Pour raccourcir les formules on pose

$$\tilde{X} = X \setminus (N \cup v)$$

dans le reste de cette section (un autre avantage de cette notation est qu'ici il est clair que v est considéré comme un sous-schéma de X alors que plus tard la lettre v désignera souvent un morphisme $S \rightarrow v \rightarrow X$, dont le graphe est strictement inclus dans $v \times S \subset X \times S$ si $\text{deg}(v) > 1$).

On peut supposer que V et W sont irréductibles. Il suffit de démontrer le lemme suivant.

Lemme 6.7. *La restriction de $S_{V,v}$ (définie comme la composée (6.2)-(6.5)) à $\tilde{X}^I \times v$ est égale à $T(h_{V,v}) \boxtimes \text{Id}_{E_v}$ dans*

$$\text{Hom}_{D_c^b(\tilde{X}^I \times v, E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} |_{\tilde{X}^I} \boxtimes E_v, \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu + \kappa, E} |_{\tilde{X}^I} \boxtimes E_v \right).$$

On introduit quatre correspondances cohomologiques:

- a) $\mathcal{C}_{h_{V,v}}$ qui réalise l'opérateur de Hecke $T(h_{V,v})$,
- b) \mathcal{C}_b qui réalise la restriction à $\tilde{X}^I \times v$ du morphisme d'annihilation (6.4)→(6.5),
- c) \mathcal{C}_F qui réalise la restriction à $\tilde{X}^I \times v$ de l'action du morphisme de Frobenius partiel (6.3)→(6.4),
- d) \mathcal{C}_\sharp qui réalise la restriction à $\tilde{X}^I \times v$ du morphisme de création (6.2)→(6.3).

Le lemme 6.7 sera impliqué par le lemme 6.11, qui affirme que la correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_\sharp$ (qui réalise donc la restriction de $S_{V,v}$ à $\tilde{X}^I \times v$) est égale au produit de $\mathcal{C}_{h_{V,v}}$ avec la correspondance cohomologique identité de (v, E_v) vers

lui-même. L'énoncé sans quotienter par Ξ implique l'énoncé en quotientant par Ξ , donc on montrera le premier. Pour cette raison, dans la suite de la démonstration on quotientera par des restrictions à la Weil de G et non de G^{ad} .

Remarque 6.8. Dans l'esquisse de preuve donnée dans l'introduction (lorsque V est minuscule et $\deg(v) = 1$), \mathcal{C}_v était supportée par \mathcal{Y}_1 et $\mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ par \mathcal{Y}_2 (et on pouvait calculer la composée sur des ouverts lisses où ces correspondances cohomologiques étaient déterminées par leurs supports).

a) *Construction de $\mathcal{C}_{h_{V,v}}$ (réalisant l'opérateur de Hecke $T(h_{V,v})$).* On pose

$$(6.6) \quad \mathcal{Z}^{(I)} = \text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}|_{\check{X}^I}$$

et on notera $\Gamma^{(I)}$ la correspondance de Hecke de $\mathcal{Z}^{(I)}$ vers lui-même. Le rapport avec la construction 2 est que $\Gamma^{(I)}$ est la réunion des $\Gamma_N(g)$ pour g parcourant $G(\mathcal{O}_v)\backslash\text{Orb}_V$ où $\text{Orb}_V \subset G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ désigne la réunion finie des $G(\mathcal{O}_v)$ -orbites associées aux copoids dominants de G qui sont des poids de V . Alors les S -points du champ $\Gamma^{(I)}$ classifient les données de $(x_i)_{i \in I} : S \rightarrow \check{X}^I$ et d'un diagramme

$$(6.7) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G}', \psi') & \xrightarrow{\phi'} & (\tau\mathcal{G}', \tau\psi') \\ \uparrow \kappa & & \uparrow \tau\kappa \\ (\mathcal{G}, \psi) & \xrightarrow{\phi} & (\tau\mathcal{G}, \tau\psi) \end{array}$$

tel que

- les lignes inférieures et supérieures appartiennent à $\mathcal{Z}^{(I)}$,
- au-dessus de tout point géométrique s de S , les restrictions de $(\mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \tau\mathcal{G})$ et $(\mathcal{G}' \xrightarrow{\phi'} \tau\mathcal{G}')$ au voisinage fomal de v dans X peuvent être trivialisées de façon unique modulo l'action de $G(\mathcal{O}_v)$ et alors $\kappa : \mathcal{G}|_{(X \setminus v) \times s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'|_{(X \setminus v) \times s}$ définit un élément de $G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ qui appartient à $G(\mathcal{O}_v)\backslash\text{Orb}_V$.

Les projections $\text{pr}_1, \text{resp. } \text{pr}_2 : \Gamma^{(I)} \rightarrow \mathcal{Z}^{(I)}$ sont les morphismes étales qui associent au diagramme (6.7) sa ligne inférieure, *resp.* supérieure.

Pour toute fonction $f \in C_c(G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$ à support inclus dans $G(\mathcal{O}_v)\backslash\text{Orb}_V$, et en particulier pour $f = h_{V,v}$, l'opérateur de Hecke $T(f)$ est réalisé par la correspondance cohomologique \mathcal{C}_f supportée par $\mathcal{Z}^{(I)} \xleftarrow{\text{pr}_2} \Gamma^{(I)} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{Z}^{(I)}$ et donnée par la multiplication par f . Plus précisément on note $\mathcal{F}^{(I)}$ la restriction de $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I)}$ à l'ouvert $\mathcal{Z}^{(I)} \subset \text{Cht}_{N,I,W}^{(I)}$. A un décalage près c'est le faisceau d'intersection de $\mathcal{Z}^{(I)}$ et on a un isomorphisme canonique $\text{pr}_1^*(\mathcal{F}^{(I)}) \simeq \text{pr}_2^*(\mathcal{F}^{(I)})$ (que l'on comprend mieux en disant que les deux membres sont images inverses de $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}$). Alors \mathcal{C}_f est la correspondance cohomologique de $(\mathcal{Z}^{(I)}, \mathcal{F}^{(I)})$ vers lui-même définie comme le morphisme de multiplication par f de $\text{pr}_1^*(\mathcal{F}^{(I)})$ vers $\text{pr}_2^*(\mathcal{F}^{(I)}) = \text{pr}_1^*(\mathcal{F}^{(I)})$.

b) *Construction de \mathcal{C}_v (réalisant la restriction à $\check{X}^I \times v$ du morphisme d'annihilation (6.4) \rightarrow (6.5)).* On pose

$$\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} = \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}|_{\check{X}^I \times \Delta(v)}$$

C'est un champ sur $\tilde{X}^I \times v$ dont les points consistent en la donnée de $(x_i)_{i \in I}$ et d'un diagramme

$$(6.8) \quad \begin{array}{ccc} & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \\ \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \end{array}$$

où ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 sont respectivement les modifications associées à la patte 1, la patte 2 et aux pattes indexées par I .

On note $\mathcal{Y}_b \xrightarrow{i_b} \mathcal{Z}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}$ le sous-champ fermé défini par la condition que dans le diagramme (6.8), $\phi_2 \phi_1 : \mathcal{G}_0|_{(X-v) \times S} \rightarrow \mathcal{G}_2|_{(X-v) \times S}$ s'étend en un isomorphisme sur $X \times S$. On a un morphisme

$$p_b : \mathcal{Y}_b \rightarrow \mathcal{Z}^{(I)} \times v$$

dont la première composante envoie

$$(6.9) \quad \begin{array}{ccc} & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \\ \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\sim} (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \end{array}$$

sur la ligne inférieure, c'est-à-dire

$$(6.10) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_3(\phi_2 \phi_1)} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)).$$

On pose

$$\mathcal{F}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}} = \mathcal{F}_{N, I \cup \{1, 2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*, \exists, E}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}|_{\mathcal{Z}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}}.$$

A un décalage près, $\mathcal{F}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}$ est le faisceau d'intersection de $\mathcal{Z}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}$.

On définit maintenant une correspondance cohomologique

$$\mathcal{C}_b \text{ de } (\mathcal{Z}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}, \mathcal{F}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}}) \text{ vers } (\mathcal{Z}^{(I)} \times v, \mathcal{F}^{(I)} \boxtimes E_v)$$

supportée par la correspondance

$$\mathcal{Z}^{\{\{1\}, \{2\}, I\}} \xleftarrow{i_b} \mathcal{Y}_b \xrightarrow{p_b} \mathcal{Z}^{(I)} \times v,$$

et qui réalisera la restriction à $\tilde{X}^I \times v$ du morphisme d'annihilation (6.4) \rightarrow (6.5).

On note $\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ le schéma sur v égal à la fibre de $\text{Gr}_{\{1, 2\}, V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ sur $\Delta(v)$ et on définit de la même façon $\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1, 2\}\}}$. On rappelle que les points de $\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ consistent en des diagrammes $(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\theta} G|_{\Gamma_{\infty v}})$ de G -torseurs sur le disque formel $\Gamma_{\infty v}$ en v . Dans le théorème 1.17 nous avons introduit le faisceau pervers (à un décalage près) $\mathcal{S}_{\{1, 2\}, V \boxtimes V^*, E}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ sur $\text{Gr}_{\{1, 2\}, V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$. Sa restriction à la fibre $\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ en $\Delta(v)$ n'est autre que $IC_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}}$ et nous préférons utiliser cette dernière notation car elle est plus simple. On note $\mathfrak{Y}_b \xrightarrow{i_b} \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}$ le sous-schéma

fermé défini par la condition que $\phi_2\phi_1$ est un isomorphisme. On a un carré cartésien

$$(6.11) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}} & \xleftarrow{i_b} & \mathfrak{Y}_b \\ \downarrow \pi_{\{1,2\}^{\{\{1\},\{2\}\}}} & & \downarrow p_b \\ \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1,2\}\}} & \xleftarrow{\nu_b} & v \end{array}$$

où $\pi_{\{1,2\}^{\{\{1\},\{2\}\}}}$ est le morphisme d'oubli et ν_b est l'inclusion du point en l'origine. Par le produit de fusion $\nu_{b,*}(E_v) = \nu_{b,!}(E_v)$ est un facteur direct de $(\pi_{\{1,2\}^{\{\{1\},\{2\}\}}})!(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}})$. En effet, par le b) du théorème 1.17, cette dernière expression est la restriction du faisceau pervers (à un décalage près) $\mathcal{S}_{\{1,2\},V\boxtimes V^*,E}^{\{\{1,2\}\}}$ sur $\mathrm{Gr}_{\{1,2\},V\boxtimes V^*}^{\{\{1,2\}\}}$ à la fibre $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1,2\}\}}$ en $\Delta(v)$. Par le produit de fusion (c'est-à-dire le d) du théorème 1.17) c'est aussi la restriction de $\mathcal{S}_{\{0\},V\boxtimes V^*,E}^{\{\{0\}\}}$ à la fibre de $\mathrm{Gr}_{\{0\},V\boxtimes V^*}^{\{\{0\}\}}$ en v . On a donc un morphisme canonique

$$\varepsilon : (\pi_{\{1,2\}^{\{\{1\},\{2\}\}}})!(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}}) \rightarrow \nu_{b,*}(E_v)$$

associé à $ev_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$. Par adjonction il permet de définir une correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b^{\mathrm{Gr}}$ de $(\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}, IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}})$ vers (v, E_v) supportée par

$$\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}} \xleftarrow{i_b} \mathfrak{Y}_b \xrightarrow{p_b} v.$$

En effet en appliquant le changement de base propre au carré cartésien (6.11) on obtient un morphisme

$$p_{b,!}i_b^*(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}}) \simeq \nu_b^*(\pi_{\{1,2\}^{\{\{1\},\{2\}\}}})!(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}}) \xrightarrow{\varepsilon} E_v.$$

Toute la construction ci-dessus était équivariante sous l'action de G_{nv} (la restriction à la Weil de G de nv vers le point) pourvu que n soit assez grand en fonction de V . On considère donc $\mathcal{C}_b^{\mathrm{Gr}}$ comme une correspondance cohomologique de $(\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{nv}, IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}})$ vers $(v/G_{nv}, E_v)$.

On considère maintenant le diagramme commutatif

$$(6.12) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} & \xleftarrow{i_b} & \mathfrak{Y}_b & \xrightarrow{p_b} & \mathcal{Z}^I \times v \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{nv} \times \mathfrak{K}^I & \xleftarrow{i_b \times \mathrm{Id}} & \mathfrak{Y}_b/G_{nv} \times \mathfrak{K}^I & \xrightarrow{p_b \times \mathrm{Id}} & v/G_{nv} \times \mathfrak{K}^I \end{array}$$

où \mathfrak{K}^I est un raccourci pour $(\mathrm{Gr}_{I,W}^I/G_{\sum n_i x_i})|_{\tilde{X}^I}$, et les entiers n_i sont assez grands. Les morphismes verticaux sont lisses par la proposition 2.8, car, d'après la remarque 1.9,

$$\mathrm{Gr}_{\{1,2\} \cup I, W \boxtimes V \boxtimes V^*}|_{\tilde{X}^I \times \Delta(v)} = \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}} \times \mathrm{Gr}_{I,W}^I|_{\tilde{X}^I}.$$

De plus les deux carrés sont cartésiens. On rappelle que la flèche verticale la plus à gauche envoie (6.8) sur le produit de

$$(\mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{\infty v}}) \quad \text{dans} \quad \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{nv}$$

(comme dans la remarque 1.11, c'est-à-dire que le G_{nv} -torseur tautologique est $\mathcal{G}_2|_{\Gamma_{nv}}$ et de $(\mathcal{G}_2|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}} \xrightarrow{\phi_3} \tau \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\sum n_i x_i}}) \in \mathfrak{K}^{(I)}$ (de nouveau comme dans la remarque 1.11 et nous ne le répèterons plus). Alors la correspondance cohomologique \mathcal{C}_b est définie comme l'image inverse par le diagramme (6.12) du produit de $\mathcal{C}_b^{\text{Gr}}$ et de la correspondance cohomologique identité de $(\mathfrak{K}^{(I)}, \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)})$ vers lui-même. En effet par la définition 4.5, $\mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse par la flèche verticale la plus à gauche de $IC_{\text{Gr}\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}} \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}$, et $\mathcal{F}^{(I)} \boxtimes E_v$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse par la flèche verticale la plus à droite de $E_v \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}$.

c) *Construction de \mathcal{C}_F (réalisant la restriction à $\check{X}^I \times v$ de l'action du morphisme de Frobenius partiel (6.3) \rightarrow (6.4)).* Quand on restreint $\text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$ à $\check{X}^I \times \Delta(v)$ seul importe l'ordre des pattes 1 et 2 dans la partition $(\{1\}, \{2\}, I)$. Quand on le restreint à $\check{X}^I \times (\text{Frob}_X \times \text{Id}_X)^i \Delta(v)$, avec $i \in \{1, \dots, \text{deg}(v) - 1\}$ l'ordre de 1, 2 et I n'importe plus. On peut donc itérer $\text{deg}(v)$ fois le morphisme de Frobenius partiel en la patte 1 de la façon suivante (dans $D_c^b(\check{X}^I \times v, E)$):

$$\begin{aligned}
 (6.13) \quad & \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\},I\}} \Big|_{\check{X}^I \times \Delta(v)} \xrightarrow{\text{Fr}_{\{1\},N,I \cup \{1,2\}}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \\
 & \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\},I\}} \Big|_{\check{X}^I \times (\text{Frob} \times \text{Id})\Delta(v)} \xrightarrow{\text{Fr}_{\{1\},N,I \cup \{1,2\}}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \dots \\
 & \xrightarrow{\text{Fr}_{\{1\},N,I \cup \{1,2\}}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\},I\}} \Big|_{\check{X}^I \times (\text{Frob} \times \text{Id})^{\text{deg}(v)-1} \Delta(v)} \\
 & \xrightarrow{\text{Fr}_{\{1\},N,I \cup \{1,2\}}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{(I,\{2\},\{1\})} \Big|_{\check{X}^I \times \Delta(v)}.
 \end{aligned}$$

En copiant les notations de b) on pose

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}^{(I,\{2\},\{1\})} &= \text{Cht}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{(I,\{2\},\{1\})} \Big|_{\check{X}^I \times \Delta(v)} \\
 \text{et } \mathcal{F}^{(I,\{2\},\{1\})} &= \mathcal{F}_{N,I \cup \{1,2\}, W \boxtimes V \boxtimes V^*, \exists, E}^{(I,\{2\},\{1\})} \Big|_{\mathcal{Z}^{(I,\{2\},\{1\})}}.
 \end{aligned}$$

On note $\text{Fr}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)} : \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} \rightarrow \mathcal{Z}^{(I,\{2\},\{1\})}$ l'itérée (6.13). En itérant l'isomorphisme $\text{F}_{\{1\},N,I \cup \{1,2\}}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$ (de la proposition 3.3) on obtient un isomorphisme

$$\text{F}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)} : (\text{Fr}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)})^* (\mathcal{F}^{(I,\{2\},\{1\})}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\},I\}}.$$

Alors \mathcal{C}_F est définie comme la correspondance cohomologique "image inverse" de $(\mathcal{Z}^{(I,\{2\},\{1\})}, \mathcal{F}^{(I,\{2\},\{1\})})$ vers $(\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}, \mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\},I\}})$ supportée par

$$\mathcal{Z}^{(I,\{2\},\{1\})} \xleftarrow{\text{Fr}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)}} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} = \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$$

et donnée par l'isomorphisme $\text{F}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)}$.

d) *Construction de \mathcal{C}_\sharp (réalisant la restriction à $\check{X}^I \times v$ du morphisme de création (6.2) \rightarrow (6.3)).* A la permutation près des pattes 1 et 2, \mathcal{C}_\sharp n'est rien d'autre que le dual de Verdier de \mathcal{C}_b , mais nous préférons en donner rapidement la construction.

On note $\mathcal{Y}_\# \xrightarrow{i_\#} \mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})}$ le sous-champ fermé défini par la condition que dans le diagramme

$$(6.14) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\phi_1} & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \\ & & \downarrow \phi_2 & \nearrow \phi_3 & \\ & & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & & \end{array}$$

$\phi_3 \phi_2 : \mathcal{G}_1|_{(X-v) \times S} \rightarrow \tau \mathcal{G}_0|_{(X-v) \times S}$ s'étend en un isomorphisme sur $X \times S$. On a un morphisme

$$p_\# : \mathcal{Y}_\# \rightarrow \mathcal{Z}^{(I)} \times v$$

dont la première composante envoie

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\phi_1} & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & \xrightarrow{\sim} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \\ & & \downarrow \phi_2 & \nearrow \phi_3 & \\ & & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & & \end{array}$$

vers la ligne supérieure, c'est-à-dire

$$(6.15) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{(\phi_3 \phi_2) \phi_1} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)).$$

On définit maintenant une correspondance cohomologique

$$\mathcal{C}_\# \text{ de } (\mathcal{Z}^{(I)} \times v, \mathcal{F}^{(I)} \boxtimes E_v) \text{ vers } (\mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})}, \mathcal{F}^{(I, \{2\}, \{1\})})$$

supportée par la correspondance

$$\mathcal{Z}^{(I)} \times v \xleftarrow{p_\#} \mathcal{Y}_\# \xrightarrow{i_\#} \mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})},$$

et qui réalisera la restriction à $\tilde{X}^I \times v$ du morphisme de création (6.2)→(6.3).

Comme dans b), on associe à $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$ une correspondance cohomologique $\mathcal{C}_\#^{\text{Gr}}$ de (v, E_v) vers $(\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}, IC_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}})$ supportée par

$$v \xleftarrow{p_\#} \mathcal{Y}_\# \xrightarrow{i_\#} \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}$$

où $\mathcal{Y}_\#$ est défini par le carré cartésien

$$(6.16) \quad \begin{array}{ccc} \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}} & \xleftarrow{i_\#} & \mathcal{Y}_\# \\ \downarrow \pi_{\{1,2\}}^{\{\{2\}, \{1\}\}} & & \downarrow p_\# \\ \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1,2\}\}} & \xleftarrow{\nu_\#} & v \end{array}$$

Grâce au produit de fusion, on associe à δ_V un morphisme

$$\nu_{\#, !} E_v \rightarrow (\pi_{\{1,2\}}^{\{\{2\}, \{1\}\}})_* IC_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}},$$

et donc par adjonction et changement de base propre par le carré cartésien (6.16), un morphisme

$$E_v \rightarrow \nu_{\#}^!(\pi_{\{1,2\}}^{\{\{2\}, \{1\}\}})_* IC_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}} \simeq p_{\#, * } i_{\#}^! IC_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}}.$$

Cette correspondance cohomologique est équivariante par l'action de G_{nv} . On considère maintenant le diagramme commutatif

$$(6.17) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}^{(I)} \times v & \xleftarrow{p_{\sharp}} & \mathcal{Y}_{\sharp} & \xrightarrow{i_{\sharp}} & \mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ v/G_{nv} \times \mathfrak{K}^{(I)} & \xleftarrow{p_{\sharp} \times \text{Id}} & \mathfrak{Y}_{\sharp}/G_{nv} \times \mathfrak{K}^{(I)} & \xrightarrow{i_{\sharp} \times \text{Id}} & \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}/G_{nv} \times \mathfrak{K}^{(I)} \end{array}$$

Les morphismes verticaux sont lisses d'après la proposition 2.8 et les deux carrés sont cartésiens. On rappelle que la flèche verticale la plus à droite de (6.17) envoie (6.14) sur le produit de

$$(\mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_3} \tau \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}}) \quad \text{dans} \quad \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}/G_{nv}$$

et de $(\mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\Sigma n_i x_i}} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\Sigma n_i x_i}}) \in \mathfrak{K}^{(I)}$. Alors la correspondance cohomologique \mathcal{C}_{\sharp} est définie comme l'image inverse par le diagramme (6.17) du produit de $\mathcal{C}_{\sharp}^{\text{Gr}}$ et de la correspondance cohomologique identité de $(\mathfrak{K}^{(I)}, \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)})$.

Remarque 6.9. Justification des normalisations choisies pour \mathcal{C}_b et \mathcal{C}_{\sharp} . Il suffit de trouver une situation où apparaissent un opérateur de création et un opérateur d'annihilation du même type (avec des pattes créées ou annihilées apparaissant dans le même ordre) et où on sait calculer leur composée directement. Voici une telle situation, où on part d'un champ de Hecke avec une patte indexée par 1, puis on crée les pattes 2 et 3 par $\mathbf{1} \rightarrow V^* \otimes V$, puis on annihile les pattes 1 et 2 par $V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$. Plus précisément on introduit le champ de Hecke $\text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}$ muni du faisceau image inverse de $\mathcal{S}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V, E}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}$ que l'on note encore par la même lettre. On introduit de même le champ de Hecke $\text{Hecke}_{\{1\}, V}^{\{1\}}$ muni de $\mathcal{S}_{\{1\}, V}^{\{1\}}$ (et aussi le même en remplaçant le singleton $\{1\}$ par $\{3\}$). On considère alors la composée

- de la correspondance \mathcal{D}_{\sharp} analogue à \mathcal{C}_{\sharp}

$$\text{de } (\text{Hecke}_{\{1\}, V}^{\{1\}}, \mathcal{S}_{\{1\}, V}^{\{1\}}) \text{ vers } (\text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}, \mathcal{S}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V, E}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}})$$

créant les pattes 2 et 3 par $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V^* \otimes V$, c'est-à-dire donnée par la correspondance

$$\text{Hecke}_{\{1\}, V}^{\{1\}} \leftarrow \mathcal{X}_{\sharp} \hookrightarrow \text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}$$

où \mathcal{X}_{\sharp} est formé des points

$$(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\phi_3} \mathcal{G}_3) \in \text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}$$

tels que $\phi_3 \phi_2$ soit un isomorphisme,

- de la correspondance \mathcal{D}_b analogue à \mathcal{C}_b

$$\text{de } (\text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}, \mathcal{S}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V, E}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}) \text{ vers } (\text{Hecke}_{\{3\}, V}^{\{3\}}, \mathcal{S}_{\{3\}, V}^{\{3\}})$$

annihilant les pattes 1 et 2 par $\text{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$, c'est-à-dire donnée par la correspondance

$$\text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}} \leftarrow \mathcal{X}_b \rightarrow \text{Hecke}_{\{3\}, V}^{\{3\}}$$

où \mathcal{X}_b est formé des points

$$(\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\phi_3} \mathcal{G}_3) \in \text{Hecke}_{\{1,2,3\}, V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\{1\}, \{2\}, \{3\}}$$

tels que $\phi_2\phi_1$ soit un isomorphisme.

On voit que sur les lieux lisses (correspondant aux $G(\mathcal{O})$ -orbites ouvertes dans les strates fermées de grassmanniennes affines associées à V et V^*) la composition $\mathcal{D}_b \circ \mathcal{D}_\#$ est transverse et égale à Id . D'un autre côté le lemme "de Zorro" dit que pour tout espace vectoriel V

$$(6.18) \quad \text{la composée } V \xrightarrow{\text{Id}_V \otimes \delta_V} V \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{\text{ev}_V \otimes \text{Id}_V} V \text{ est l'identité}$$

(c'est un lemme élémentaire dans la catégorie des espaces vectoriels et un des axiomes des catégories tannakiennes [Del90]). La coïncidence des deux façons de calculer $\mathcal{D}_b \circ \mathcal{D}_\#$ (dont la première est limitée au lieu lisse) valide la normalisation choisie pour les correspondances $\mathcal{C}_\#$ et \mathcal{C}_b .

On a donc terminé la construction de $\mathcal{C}_{h_{V,v}}$, \mathcal{C}_b , \mathcal{C}_F et $\mathcal{C}_\#$. On voit facilement que $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_\#$ est supportée par le produit fibré $\mathcal{Y}_b \times_{\mathcal{Z}(I, \{2\}, \{1\})} \mathcal{Y}_\#$, où les morphismes sont

$$(6.19) \quad \mathcal{Y}_b \xrightarrow{i_b} \mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I) \xrightarrow{\text{Fr}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)}} \mathcal{Z}(I, \{2\}, \{1\})$$

et $i_\#$.

Lemme 6.10. *On a un isomorphisme canonique*

$$(6.20) \quad \Gamma(I) \times v \simeq \mathcal{Y}_b \times_{\mathcal{Z}(I, \{2\}, \{1\})} \mathcal{Y}_\#.$$

Démonstration. Soit S un schéma sur $\tilde{X}^I \times v$. On note v le S -point de X donné par $S \rightarrow v \rightarrow X$ et on note $\tau^i v$ son image par Frob_X^i , pour $i \in \mathbb{N}$. Les S -points $v, \tau v, \dots, \tau^{\text{deg}(v)-1} v$ sont deux à deux disjoints mais $\tau^{\text{deg}(v)} v = v$. Soit

$$(6.21) \quad \begin{array}{ccccc} & & (\mathcal{G}_1, \psi_1) & & \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \phi_2 & & \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{G}_2, \psi_2) & \xrightarrow{\phi_3} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \end{array}$$

un S -point de \mathcal{Y}_b . On veut comprendre son image

$$(6.22) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{\mathcal{G}}_0, \tilde{\psi}_0) & \xrightarrow{\tilde{\phi}_1} & (\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\psi}_1) \\ & & \downarrow \tilde{\phi}_2 \\ & & (\tilde{\mathcal{G}}_2, \tilde{\psi}_2) \\ & & \nearrow \tilde{\phi}_3 \\ & & (\tau \tilde{\mathcal{G}}_0, \tau \tilde{\psi}_0) \end{array}$$

dans $\mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})}$ par (6.19). On remarque que $\cup_{i=0}^{\deg(v)-1} \Gamma_{\infty^{\tau^i v}} \subset X \times S$ est la complétion de $X \times S$ le long de $v \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} S$. Comme ϕ_3 est une modification en les pattes indexées par I et $\phi_2 \phi_1$ est un isomorphisme sur $X \times S$, $\phi_3 \phi_2 \phi_1 : \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty^{\tau^i v}}} \rightarrow \tau^i \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty^{\tau^i v}}}$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on peut considérer $(\tau^i \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\tau^i \phi_1} \tau^i \mathcal{G}_1)$ comme une modification de \mathcal{G}_0 (et aussi de $\tau \mathcal{G}_0$) en $\tau^i v$, et dans l'énoncé suivant on notera cette modification A_i . On remarque que A_0 et $A_{\deg(v)}$ sont deux modifications en le même point $\tau^{\deg(v)} v = v$ mais ne sont pas égales en général si on est parti d'un S -point arbitraire (6.21) de \mathcal{Y}_b . Avec ces notations,

- $\tilde{\mathcal{G}}_0$ est obtenu à partir de \mathcal{G}_0 par les modifications $A_0, \dots, A_{\deg(v)-1}$,
- $\tilde{\mathcal{G}}_1$ est obtenu à partir de $\tau \mathcal{G}_0$ par les modifications $A_0, \dots, A_{\deg(v)-1}$,
- $\tilde{\mathcal{G}}_2$ est obtenu à partir de $\tau \mathcal{G}_0$ par les modifications $A_1, \dots, A_{\deg(v)-1}$,
- $\tau \tilde{\mathcal{G}}_0$ est obtenu à partir de $\tau \mathcal{G}_0$ par les modifications $A_1, \dots, A_{\deg(v)}$,

et bien sûr les structures de niveau en N sont conservées. Par conséquent (6.22) appartient à $i_{\#}(\mathcal{Y}_{\#}) \subset \mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})}$ si et seulement si $A_0 = A_{\deg(v)}$. Si on note $\kappa : \mathcal{G}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_0$ la modification décrite ci-dessus (et donnée par $A_0, \dots, A_{\deg(v)-1}$), c'est exactement la condition pour que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\mathcal{G}}_0, \tilde{\psi}_0) & \xrightarrow{\tilde{\phi}_3 \tilde{\phi}_2 \tilde{\phi}_1} & (\tau \tilde{\mathcal{G}}_0, \tau \tilde{\psi}_0) \\ \kappa \uparrow & & \tau \kappa \uparrow \\ (\mathcal{G}_0, \psi_0) & \xrightarrow{\phi_3 \phi_2 \phi_1} & (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \end{array}$$

soit commutatif et alors il appartient à $\Gamma^{(I)} \times v$ (car on l'identifie avec le diagramme (6.7)). On a donc prouvé (6.20). □

La correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ de $(\mathcal{Z}^{(I)} \times v, \mathcal{F}^{(I)} \boxtimes E_v)$ vers lui-même est donc supportée par $\Gamma^{(I)} \times v$. Comme les projections pr_1 et pr_2 de $\Gamma^{(I)}$ vers $\mathcal{Z}^{(I)}$ sont étales et que $\mathcal{F}^{(I)}$ est isomorphe à $IC_{\mathcal{Z}^{(I)}}$ à un décalage près, $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ est donné par la multiplication par une fonction localement constante sur $\Gamma^{(I)}$ (de façon encore plus canonique $\text{pr}_1^*(\mathcal{F}^{(I)})$ et $\text{pr}_1^*(\mathcal{F}^{(I)})$ sont tous les deux image inverse de $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I)}$). Le lemme suivant, qui affirme qu'elle est égale à la fonction déduite de $h_{V, v}$, implique donc le lemme 6.7.

Lemme 6.11. *La correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ est égale au produit de $\mathcal{C}_{h_{V, v}}$ avec la correspondance cohomologique identité de (v, E_v) vers lui-même.*

On verra que le lemme précédent résulte des deux lemmes suivants.

Lemme 6.12. *Il existe une fonction $k_{V,v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$ (à support dans $G(\mathcal{O}_v)\backslash \text{Orb}_V$) qui dépend seulement de $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$, de la restriction de G à $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ et de V (et en particulier est indépendante de N , I et W) telle que la correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_\sharp$ soit égale au produit de $\mathcal{C}_{k_{V,v}}$ avec la correspondance cohomologique identité de (v, E_v) vers lui-même.*

On peut paraphraser le lemme précédent en disant que l’opérateur $S_{V,v}$ est “de nature locale en v ”. C’est un énoncé extrêmement intuitif, dans la mesure où le morphisme $S_{V,v}$ peut être défini au niveau des chtoucas locaux (une notion analogue à celle des groupes p -divisibles). Dans la preuve on utilisera des chtoucas restreints (analogues aux Barsotti-Tate tronqués) au lieu des chtoucas locaux, pour des raisons techniques. En fait il s’agit du “cas non ramifié” de [GL17] où l’on montre que pour toute place v (y compris dans N) les opérateurs d’excursions $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ sont de “nature locale” en v dès lors que les γ_i appartiennent au groupe de Weil local en v (la preuve du lemme 10.2 ci-dessous montre que $S_{V,v}$ est un opérateur d’excursion de ce type).

Lemme 6.13. *Le lemme 6.11 est vrai lorsque $I = \emptyset$, $W = \mathbf{1}$ et $\deg(v) = 1$.*

Les lemmes 6.12 et 6.13 impliquent le lemme 6.11 car si on se donne $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ on peut toujours trouver une courbe X sur $k(v)$ contenant un point $v \in X(k(v))$ (de sorte que $\deg(v) = 1$), et étendre G de $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ à X (ici c’est automatique puisque G est déployé), et alors, par un argument classique de séries de Poincaré (rappelé dans [GL17]), une fonction $k_{V,v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$ est caractérisée par son action sur $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ lorsque le niveau $N \subset X \setminus v$ et Ξ sont arbitraires.

Il reste donc à montrer les lemmes 6.12 et 6.13.

6.4. Démonstration du lemme 6.12. Pour établir la nature locale en v du morphisme $S_{V,v}$, nous allons construire des champs classifiants de chtoucas restreints (c’est-à-dire en gros des chtoucas “à coefficients” sur un sous-schéma fini $nv \subset X$ pour n assez grand). Nous utilisons les chtoucas restreints plutôt que les chtoucas locaux (c’est-à-dire des chtoucas “à coefficients” sur $\infty v \subset X$) parce que leurs champs classifiants sont des champs d’Artin, et les morphismes des champs classifiant les chtoucas globaux vers les champs classifiant les chtoucas restreints sont lisses.

On construira alors des analogues des correspondances cohomologiques \mathcal{C}_b , \mathcal{C}_F , \mathcal{C}_\sharp pour ces champs de chtoucas restreints, en utilisant la deuxième colonne du diagramme suivant (dont les trois premières lignes n’ont pas encore été définies). Par rapport aux autres diagrammes de ce paragraphe, le diagramme suivant ainsi que le diagramme (6.35) quelques pages plus loin sont tournés de $\pi/2$ pour rentrer dans la page. Nous verrons plus tard que toutes les flèches horizontales (qui étaient donc verticales dans les diagrammes précédents) sont lisses et que tous les carrés sont cartésiens à part le carré entre a_3 et a_4 qui est seulement commutatif. Ainsi les flèches horizontales (lisses) situées entre le colonne de gauche et celle du milieu entrelaceront les correspondances cohomologiques \mathcal{C}_b , \mathcal{C}_F , \mathcal{C}_\sharp avec leurs analogues pour les chtoucas restreints. Voici ce diagramme, où tous les champs sont sur

$\check{X}^I \times v$:
(6.23)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{Z}^{(I)} \times v & \xrightarrow{a_1} & \text{Cht}_{\mathbb{1}}^{\text{res}(m,n)} \times \mathfrak{K}^{(I)} & \xrightarrow{b_1 \times \text{Id}} & v/G_{mv} \times \mathfrak{K}^{(I)} \\
 \uparrow p_b & & p_b^{\text{res}(m,n)} \times \text{Id} \uparrow & & \mathfrak{p}_b \times \text{Id} \uparrow \\
 \mathcal{Y}_b & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{Y}_b^{\text{res}(m,n)} \times \mathfrak{K}^{(I)} & \xrightarrow{b_2 \times \text{Id}} & \mathfrak{Y}_b/G_{mv} \times \mathfrak{K}^{(I)} \\
 \downarrow i_b & & i_b^{\text{res}(m,n)} \times \text{Id} \downarrow & & \mathfrak{i}_b \times \text{Id} \downarrow \\
 \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} & \xrightarrow{a_3} & \text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \text{res}(m,n)} \times \mathfrak{K}^{(I)} & \xrightarrow{b_3 \times \text{Id}} & \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv} \times \mathfrak{K}^{(I)} \\
 \downarrow \text{Fr}_{\{1\}}^{\text{deg}(v)} & & \text{Fr}_{\{1\}/k(v)}^{\text{res}(m,n)} \times \text{Id} \downarrow & & \\
 \mathcal{Z}^{(I, \{2\}, \{1\})} & \xrightarrow{a_4} & \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}/G_{nv} \times \mathfrak{K}^{(I)} & & \\
 \uparrow i_{\#} & & i_{\#} \times \text{Id} \uparrow & & \\
 \mathcal{Y}_{\#} & \xrightarrow{a_5} & \mathfrak{Y}_{\#}/G_{nv} \times \mathfrak{K}^{(I)} & & \\
 \downarrow p_{\#} & & \mathfrak{p}_{\#} \times \text{Id} \downarrow & & \\
 \mathcal{Z}^{(I)} \times v & \xrightarrow{a_6} & v/G_{nv} \times \mathfrak{K}^{(I)} & &
 \end{array}$$

On aurait pu écrire un diagramme plus compliqué où les lignes 4, 5, 6 auraient été similaires aux lignes 1, 2, 3 du diagramme (6.23) (avec des entiers m, n plus petits que ceux des lignes 1, 2, 3). En fait nous pouvons concevoir les champs d'arrivée de a_4, a_5 et a_6 dans le diagramme (6.23) comme des “chtoucas restreints de niveau 0” et nous considérons seulement ce cas particulier parce qu'il nous suffit.

On commence par définir le champ $\text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \text{res}(m,n)}$ sur v . C'est un champ classifiant de “chtoucas restreints en v ” c'est-à-dire en gros de “chtoucas à coefficients sur le sous-schéma $nv \subset X$ ”. Cependant pour les définir on aura besoin de choisir un entier subsidiaire m suffisamment grand par rapport à n , et de faire intervenir des G -torseurs sur mv .

Remarque 6.14. Les champs $r\bar{\mathcal{C}}_0^N$ de [Laf02a] II.1.a constituent une excellente définition des “chtoucas à coefficients sur un sous-schéma fini N ” lorsque $G = GL_r$ et $V = \text{St}$, car ils sont vraiment analogues aux Barsotti-Tate tronqués (pour les experts: une action stricte au sens de Faltings [Fal02] est cachée dans leur définition). Nous ne savons pas comment généraliser la construction de ces champs lorsque G et V sont arbitraires.

Bien que nous ne les utilisons pas dans cet article, il est éclairant de commencer par définir les champs classifiants de chtoucas locaux (qui ne sont pas des champs d'Artin). Un chtouca local sur un schéma S sur v est la donnée

- d'un morphisme

$$(6.24) \quad \kappa : S \rightarrow \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{\infty v} \text{ donné par } (\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} \widehat{\mathcal{G}}_2)$$

(où les $\widehat{\mathcal{G}}_i$ sont des G -torseurs sur $\Gamma_{\infty v} \subset X \times S$ et le $G_{\infty v}$ -torseur tautologique sur le quotient $\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{\infty v}$ est $\widehat{\mathcal{G}}_2$),

- d'un isomorphisme

$$(6.25) \quad \theta : \widehat{\mathcal{G}}_2 \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_{\infty v} \times \mathrm{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_0).$$

On renvoie à [GL11] pour une étude des chtoucas locaux. On note ici $(\mathrm{Id}_{\infty v} \times \mathrm{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_0)$ au lieu de ${}^\tau\widehat{\mathcal{G}}_0$ parce que le morphisme de Frobenius est relatif à $k(v)$ et non à \mathbb{F}_q . D'une façon plus concise un chtouca local peut être écrit sous la forme

$$(6.26) \quad (\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} (\mathrm{Id}_{\infty v} \times \mathrm{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_0)).$$

Voici maintenant la définition des chtoucas restreints. Soit $n \geq 0$. Plus tard on demandera que n soit assez grand pour que la condition (6.32) soit satisfaite. On a un G_{nv} -torseur naturel sur $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ dont la fibre en

$$(6.27) \quad (\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} \widehat{\mathcal{G}}_2 \simeq G|_{\Gamma_{\infty v}})$$

(où $\widehat{\mathcal{G}}_0, \widehat{\mathcal{G}}_1, \widehat{\mathcal{G}}_2$ sont des G -torseurs sur $\Gamma_{\infty v}$) est $\widehat{\mathcal{G}}_0|_{\Gamma_{nv}}$. On note $\mathrm{Gr}_{\Delta(v), \mathrm{triv}_n}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ l'espace total de ce G_{nv} -torseur, dont les points consistent en la donnée de (6.27) et d'une trivialisaton de $\widehat{\mathcal{G}}_0|_{\Gamma_{nv}}$. On choisit $m \geq n$ assez grand (en fonction de V et n) pour que l'action à droite naturelle de $G_{\infty v}$ sur $\mathrm{Gr}_{\Delta(v), \mathrm{triv}_n}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ (par changement de la trivialisaton de $\widehat{\mathcal{G}}_2$) se factorise à travers G_{mv} . On imposera plus tard la condition supplémentaire (6.34) sur m , qui sera satisfaite s'il est assez grand (en fonction de n). Le quotient $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv}$ est muni

- d'un G_{mv} -torseur $\mathcal{G}_{2,mv}$ tautologiquement associé au quotient par G_{mv} ,
- d'un G_{nv} -torseur $\mathcal{G}_{0,nv}$ dont l'espace total est $\mathrm{Gr}_{\Delta(v), \mathrm{triv}_n}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv}$ (la notation $\widehat{\mathcal{G}}_0|_{\Gamma_{nv}}$ aurait constitué un abus car $\widehat{\mathcal{G}}_0$ existe sur $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ et aussi sur $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{\infty v}$ mais pas sur $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv}$).

Alors, pour tout schéma S sur v , les S -points de $\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)}$ classifient la donnée

- d'un morphisme

$$(6.28) \quad \kappa : S \rightarrow \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv}$$

de champs sur v ,

- d'une identification

$$(6.29) \quad \theta : \kappa^*(\mathcal{G}_{2,mv}|_{nv}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_{nv} \times \mathrm{Frob}_{S/v})^*\kappa^*(\mathcal{G}_{0,nv})$$

de G_{nv} -torseurs sur S .

Le morphisme

$$b_3 : \mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)} \rightarrow \mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv}$$

est simplement l'oubli de θ , donc il est lisse (c'est même un G_{nv} -bitorseur).

Pour préparer la construction de a_3 on commence par déclarer que le chtouca local associé à un S -point (6.8) de $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$ est

$$(6.30) \quad \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\tau^{\deg(v)-1}(\phi_3\phi_2\phi_1)\cdots\tau(\phi_3\phi_2\phi_1)\phi_3\phi_2} (\mathrm{Id}_{\infty v} \times \mathrm{Frob}_{S/v})^*(\mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}})$$

où l'on a utilisé l'isomorphisme

$$\tau^{\deg(v)} \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}} \simeq (\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}})$$

et le fait que

$$\tau^{\deg(v)-1}(\phi_3\phi_2\phi_1) \cdots \tau(\phi_3\phi_2\phi_1)\phi_3 : \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{\infty v}} \rightarrow \tau^{\deg(v)} \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}}$$

est un isomorphisme. Pour construire a_3 on considère le chtouca restreint associé à ce chtouca local.

Plus précisément la première composante de a_3 est le morphisme

$$\mathcal{Z}(\{1\},\{2\},I) \rightarrow \text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{1\},\{2\},\text{res}(m,n)}$$

qui envoie (6.8) vers le chtouca restreint associé au chtouca local (6.30), c'est-à-dire

- le morphisme $\kappa : S \rightarrow \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{1\},\{2\}}/G_{mv}$ associé à

$$(\mathcal{G}_0|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1|_{\Gamma_{\infty v}} \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{\infty v}}),$$

si bien que $\kappa^*(\mathcal{G}_{0,nv}) = \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{nv}}$ et $\kappa^*(\mathcal{G}_{2,mv}) = \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{mv}}$,

- et

$$\theta = \tau^{\deg(v)-1}(\phi_3\phi_2\phi_1) \cdots \tau(\phi_3\phi_2\phi_1)\phi_3|_{\Gamma_{nv}} : \mathcal{G}_2|_{\Gamma_{nv}} \xrightarrow{\sim} \tau^{\deg(v)} \mathcal{G}_0|_{\Gamma_{nv}}.$$

La deuxième composante de a_3 envoie (6.8) vers le S -point de $\mathfrak{R}^{(I)}$ associé à $(\mathcal{G}_2 \xrightarrow{\phi_3} \tau \mathcal{G}_0)$.

On va montrer maintenant la lissité de a_3 . On note $\text{Bun}_{G,[nv]}$ le champ sur \mathbb{F}_q dont les S -points classifient un G -torseur \mathcal{G} sur $X \times S$ et une trivialisation $\psi : \mathcal{G}|_{nv \times S} \rightarrow G|_{nv \times S}$ (autrement dit $[nv]$ est considéré comme un diviseur sur X). On a un isomorphisme

$$\text{Bun}_{G,[nv]} \times v = \text{Bun}_{G,nv+n\tau v+\dots+n\tau^{\deg(v)-1}v}$$

de champs sur v où, dans le membre de droite, v désigne le morphisme $v \rightarrow X$. L'action de $\text{Frob}_{\text{Bun}_{G,[nv]}} \times \text{Id}_v$ sur le membre de gauche permute circulairement les structures de niveau en $v, \tau v, \dots, \tau^{\deg(v)-1}v$ dans le membre de droite.

Comme la lissité de a_3 est une propriété locale pour la topologie lisse sur le but, il suffit de montrer la lissité sur S de

$$(6.31) \quad \mathcal{Z}(\{1\},\{2\},I) \times_{\text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{1\},\{2\},\text{res}(m,n)} \times \mathfrak{R}^{(I)}} S$$

où S est un schéma sur \mathbb{F}_q (ou en fait sur $\check{X}^I \times v$) et le morphisme $S \rightarrow \text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{1\},\{2\},\text{res}(m,n)} \times \mathfrak{R}^{(I)}$ est donné par

- a) un morphisme κ comme dans (6.28) provenant d'un morphisme $y : S \rightarrow \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{1\},\{2\}}$,
- b) une identification θ comme dans (6.29) provenant d'une trivialisation $\lambda : y^*(\mathcal{G}_{0,nv}) \xrightarrow{\sim} G|_{\Gamma_{nv}}$,
- c) un morphisme $z : S \rightarrow \text{Gr}_{I,W}^{(I)}|_{\check{X}^I}$.

Comparée à un S -point (κ, θ) de $\text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{1\},\{2\},\text{res}(m,n)}$ la donnée de a) et b) consiste en une trivialisation λ de $\mathcal{G}_{0,nv}$, puis un raffinement de nv à mv de la trivialisation $\theta \circ (\text{Id}_{nv} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\lambda)$ de $\mathcal{G}_{2,mv}|_{nv}$. De plus $\text{Gr}_{I,W}^{(I)}|_{\check{X}^I} \rightarrow \mathfrak{R}^{(I)}$ est évidemment

lisse puisque c'est un $G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}$ -torseur. On a donc justifié le fait que les S comme ci-dessus recouvrent $\text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}, \text{res}(m, n)} \times \mathfrak{K}^{(I)}$ pour la topologie lisse.

Il reste à montrer que (6.31) est lisse sur S . Cela résulte du fait que (6.31) est l'égalisateur entre les deux morphismes suivants de champs sur S : le morphisme lisse d'oubli

$$\begin{aligned} & \text{Bun}_{G, mv+n\tau v+\dots+n\tau \deg(v)-1 v+\sum_{i \in I} n_i x_i} \times (\check{X}^I \times v) S \\ \rightarrow & \text{Bun}_{G, nv+n\tau v+\dots+n\tau \deg(v)-1 v} \times_v S = \text{Bun}_{G, [nv]} \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} S \end{aligned}$$

et la composée

$$\begin{aligned} & \text{Bun}_{G, mv+n\tau v+\dots+n\tau \deg(v)-1 v+\sum_{i \in I} n_i x_i} \times (\check{X}^I \times v) S \\ & \xrightarrow{a_z} \text{Bun}_{G, mv+n\tau v+\dots+n\tau \deg(v)-1 v} \times_v S \\ \xrightarrow{a_{(y, \lambda)}} & \text{Bun}_{G, nv+n\tau v+\dots+n\tau \deg(v)-1 v} \times_v S = \text{Bun}_{G, [nv]} \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} S \\ & \xrightarrow{\text{Frob}_{\text{Bun}_{G, [nv]} \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} \text{Id}_S}} \text{Bun}_{G, [nv]} \times_{\text{Spec } \mathbb{F}_q} S, \end{aligned}$$

où

- a_z envoie (\mathcal{G}_3, ψ_3) vers (\mathcal{G}_2, ψ_2) , où \mathcal{G}_2 est obtenu par la modification de \mathcal{G}_3 en les points $(x_i)_{i \in I}$ donnée par z et $\psi_3|_{\Gamma_{\sum_{i \in I} n_i x_i}}$ (comme dans la preuve de la proposition 2.8), c'est-à-dire

$$(\mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3) = (\beta_{I, W, \underline{n}}^{(I)})^{-1}(z, (\mathcal{G}_3, \psi_3|_{\Gamma_{\sum_{i \in I} n_i x_i}}))$$

où $\beta_{I, W, \underline{n}}^{(I)}$ a été défini dans (1.10) et

$$\psi_2 = \psi_3|_{\Gamma_{mv+n\tau v+\dots+n\tau \deg(v)-1 v}}$$

(grâce au fait que les x_i restent disjoints du sous-schéma $v \subset X$),

- $a_{(y, \lambda)}$ envoie (\mathcal{G}_2, ψ_2) vers (\mathcal{G}_0, ψ_0) , où \mathcal{G}_0 est obtenu par la modification de \mathcal{G}_2 en v donnée par y et $\psi_2|_{\Gamma_{mv}}$ (de nouveau comme dans la preuve de la proposition 2.8), c'est-à-dire

$$(\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2) = (\beta_{\{1, 2\}, V \boxtimes V^*, m}^{\{\{1\}, \{2\}\}})^{-1}(y, (\mathcal{G}_2, \psi_2|_{\Gamma_{mv}}))$$

et

$$\psi_0|_{\Gamma_{nv}} = \lambda \text{ et } \psi_0|_{\Gamma_{n\tau^i v}} = \psi_2|_{\Gamma_{n\tau^i v}} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, \deg(v) - 1\}.$$

Donc (6.31) est lisse sur S car c'est l'égalisateur entre un morphisme lisse entre deux champs lisses sur S et un morphisme dont la dérivée relative à S est nulle (à cause de $\text{Frob}_{\text{Bun}_{G, [nv]}}$). Ceci termine la preuve de la lissité de a_3 .

Ensuite $\mathfrak{y}_b^{\text{res}(m, n)}$ est le sous-champ fermé de $\text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}, \text{res}(m, n)}$ défini par la condition que $\phi_2 \phi_1$ est un isomorphisme. Plus précisément il est tel que le diagramme suivant (dont le produit par $\mathfrak{K}^{(I)}$ apparaît dans (6.23)) soit cartésien:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{y}_b^{\text{res}(m, n)} & \xrightarrow{b_2} & \mathfrak{Y}_b / G_{mv} \\ \downarrow i_b^{\text{res}(m, n)} & & \downarrow i_b \\ \text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}, \text{res}(m, n)} & \xrightarrow{b_3} & \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}} / G_{mv} \end{array}$$

Le champ $\text{Cht}_1^{\text{res}(m,n)}$ classifie la donnée d'un G_{mv} -torseur \mathcal{G} et d'un isomorphisme $\theta : (\text{Id}_{nv} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\mathcal{G}|_{nv}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}|_{nv}$ de G_{nv} -torseurs. Autrement dit c'est le champ classifiant du groupe $K_{m,n}$ défini comme l'image inverse du groupe fini $G(\mathcal{O}_{nv})$ par le morphisme d'oubli $G_{mv} \rightarrow G_{nv}$. L'inclusion naturelle de $K_{m,n}$ dans G_{mv} fournit le morphisme lisse $b_1 : v/K_{m,n} \rightarrow v/G_{mv}$. Les lignes 4, 5, 6 du diagramme (6.23) sont simplement obtenues en tournant le diagramme (6.17) de $\pi/2$.

Pour terminer la construction du diagramme (6.23), il ne reste plus qu'à définir

$$\text{Fr}_{\{1\}/k(v)}^{\text{res}(m,n)} : \text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\}, \{2\}\}, \text{res}(m,n)} \rightarrow \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}/G_{nv}.$$

Pour comprendre l'idée, on commence par définir le morphisme de Frobenius partiel analogue pour les chtoucas locaux: il envoie (6.26) vers

$$(\widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} (\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_0) \xrightarrow{(\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\phi}_1)} (\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_1)).$$

Avec les notations de (6.24) et (6.25) on peut le reformuler ainsi: on considère

$$(\widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} \widehat{\mathcal{G}}_2) \text{ et } ((\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_0) \xrightarrow{(\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\phi}_1)} (\text{Id}_{\infty v} \times \text{Frob}_{S/v})^*(\widehat{\mathcal{G}}_1))$$

qui sont tous les deux déterminés par κ , et on les recolle avec l'aide de θ .

Pour faire la même chose avec les chtoucas restreints, on a besoin de nouvelles notations. On note $\text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}$, *resp.* $\text{Gr}_v^{\{\{2\}\}}$ le schéma sur v égal à la fibre de $\text{Gr}_{\{1\}, V}^{\{\{1\}\}}$, *resp.* $\text{Gr}_{\{2\}, V^*}^{\{\{2\}\}}$, sur v . On note $\text{Gr}_{v, \text{triv}_n}^{\{\{1\}\}}$ l'espace total du G_{nv} -torseur $\mathcal{G}_{0, nv}$ sur $\text{Gr}_{\{1\}, V}^{\{\{1\}\}}$ dont la fibre en $(\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1 \simeq G|_{\Gamma_{\infty v}})$ est $\widehat{\mathcal{G}}_0|_{\Gamma_{nv}}$. La condition sur n mentionnée précédemment (et satisfaite s'il est assez grand) est que

$$(6.32) \quad \text{l'action de } G_{\infty v} \text{ sur } \text{Gr}_v^{\{\{2\}\}} \text{ se factorise par } G_{nv}.$$

Alors $\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}$ peut être identifié au quotient de $\text{Gr}_v^{\{\{2\}\}} \times_v \text{Gr}_{v, \text{triv}_n}^{\{\{1\}\}}$ par l'action diagonale de G_{nv} . On fixe $r \geq n$ assez grand en fonction de n pour que l'action naturelle de $G_{\infty v}$ sur $\text{Gr}_{v, \text{triv}_n}^{\{\{1\}\}}$ se factorise à travers G_{rv} . Par conséquent

$$(6.33) \quad \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\}, \{1\}\}}/G_{rv} = \left(\text{Gr}_v^{\{\{2\}\}}/G_{nv} \right) \times_{(v/G_{nv})} \text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}/G_{rv}$$

où le morphisme $\alpha_2 : \text{Gr}_v^{\{\{2\}\}}/G_{nv} \rightarrow v/G_{nv}$ est tautologique et le morphisme $\alpha_1 : \text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}/G_{rv} \rightarrow v/G_{nv}$ est donné par le G_{nv} -torseur $\mathcal{G}_{0, nv}$ sur $\text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}/G_{rv}$ dont l'espace total est $\text{Gr}_{v, \text{triv}_n}^{\{\{1\}\}}/G_{rv}$. On note $\gamma : \text{Gr}_{\Delta(v), \text{triv}_n}^{\{\{1\}, \{2\}\}}/G_{\infty v} \rightarrow \text{Gr}_{v, \text{triv}_n}^{\{\{1\}\}}/G_{rv}$ le morphisme naturel qui provient du morphisme évident

$$\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}/G_{\infty v} \rightarrow \text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}/G_{rv}, \quad (\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} \widehat{\mathcal{G}}_2) \mapsto (\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1).$$

La condition sur m mentionnée précédemment (et satisfaite s'il est assez grand en fonction de r , donc de n) est que

$$(6.34) \quad \gamma \text{ se factorise à travers } \text{Gr}_{\Delta(v), \text{triv}_n}^{\{\{1\}, \{2\}\}}/G_{mv}.$$

On obtient ainsi un morphisme

$$\beta_1 : \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}/G_{mv} \rightarrow \text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}/G_{rv}$$

et une identification $\beta_1^*(\mathcal{G}_{0, nv}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{0, nv}$. On introduit aussi le morphisme

$$\beta_2 : \text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\}, \{2\}\}}/G_{mv} \rightarrow \text{Gr}_v^{\{\{2\}\}}/G_{nv}$$

qui provient du morphisme évident

$$\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}} \rightarrow \mathrm{Gr}_v^{\{\{2\}\}}, (\widehat{\mathcal{G}}_0 \xrightarrow{\widehat{\phi}_1} \widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} \widehat{\mathcal{G}}_2 \simeq G|_{\Gamma_{\infty v}}) \mapsto (\widehat{\mathcal{G}}_1 \xrightarrow{\widehat{\phi}_2} \widehat{\mathcal{G}}_2 \simeq G|_{\Gamma_{\infty v}}).$$

Alors $\mathrm{Fr}_{\{1\}/k(v)}^{\mathrm{res}(m,n)}$ est défini comme suit : il envoie un S -point de $\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)}$ donné par

- un S -point κ de $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}/G_{mv}$ comme dans (6.28),
- un isomorphisme θ comme dans (6.29)

vers le S -point de $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\},\{1\}\}}/G_{nv}$ déduit du S -point de $\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\},\{1\}\}}/G_{rv}$ associé, avec l'aide de (6.33),

- au S -point de $\mathrm{Gr}_v^{\{\{2\}\}}/G_{nv}$ égal à $\beta_2 \circ \kappa$,
- au S -point de $\mathrm{Gr}_v^{\{\{1\}\}}/G_{rv}$ égal à $\beta_1 \circ \kappa \circ \mathrm{Frob}_{S/k(v)}$,
- à l'identification donnée par θ de leurs images respectives par α_2 et α_1 comme S -points de v/G_{nv} (c'est-à-dire comme G_{nv} -torseurs sur S).

Grâce à la lissité de b_1, b_2, b_3 et au fait que le carré entre b_1 et b_2 et le carré entre b_2 et b_3 sont cartésiens, on définit une correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b^{\mathrm{res}(m,n)}$

$$\text{de } (\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)}, \mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\mathrm{res}(m,n)}) \text{ vers } (\mathrm{Cht}_1^{\mathrm{res}(m,n)}, \mathcal{F}_1^{\mathrm{res}(m,n)})$$

supportée par

$$\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)} \xleftarrow{i_b^{\mathrm{res}(m,n)}} \mathcal{Y}_b^{\mathrm{res}(m,n)} \xrightarrow{p_b^{\mathrm{res}(m,n)}} \mathrm{Cht}_1^{\mathrm{res}(m,n)}$$

comme l'image inverse de $\mathcal{C}_b^{\mathrm{Gr}}$, où l'on pose

$$\mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\mathrm{res}(m,n)} = b_3^*(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}}) \text{ et } \mathcal{F}_1^{\mathrm{res}(m,n)} = b_1^*(E_v) = E_v.$$

On définit la correspondance cohomologique $\mathcal{C}_F^{\mathrm{res}(m,n)}$

$$\text{de } (\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\},\{1\}\}}/G_{nv}, IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\},\{1\}\}}}) \text{ vers } (\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)}, \mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\mathrm{res}(m,n)})$$

supportée par

$$\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\},\{1\}\}}/G_{nv} \xleftarrow{\mathrm{Fr}_{\{1\}/k(v)}^{\mathrm{res}(m,n)}} \mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)}$$

comme le morphisme $(\mathrm{Fr}_{\{1\}/k(v)}^{\mathrm{res}(m,n)})^*(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{2\},\{1\}\}}}) \rightarrow \mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\mathrm{res}(m,n)}$ (qui provient de l'énoncé analogue à la proposition 3.4 pour les chtoucas restreints).

Aux morphismes lisses a_1, a_3, a_4, a_6 on associe les correspondances cohomologiques "images inverses" $\mathcal{C}_{a_1}^*, \mathcal{C}_{a_3}^*, \mathcal{C}_{a_4}^*, \mathcal{C}_{a_6}^*$. Par exemple $\mathcal{C}_{a_3}^*$ est la correspondance cohomologique

$$\text{de } (\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)} \times \mathfrak{R}^{(I)}, \mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\mathrm{res}(m,n)} \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}) \text{ vers } (\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}, \mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\},I\}})$$

supportée par

$$\mathrm{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}, \mathrm{res}(m,n)} \times \mathfrak{R}^{(I)} \xleftarrow{a_3} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$$

et donnée par l'isomorphisme

$$a_3^*(\mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\mathrm{res}(m,n)} \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$$

provenant du fait que les deux sont canoniquement isomorphes à $(b_3 a_3)^*(IC_{\mathrm{Gr}_{\Delta(v)}^{\{\{1\},\{2\}\}}}) \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}$.

Finalement on a un diagramme commutatif de correspondances cohomologiques: (6.35)

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{Z}^{(I)} \times v, \mathcal{F}^{(I)} \boxtimes E_v) & \xleftarrow{\mathcal{C}_{a_1}^*} & (\text{Cht}_{\mathbf{1}}^{\text{res}(m,n)} \times \mathfrak{R}^{(I)}, \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{\text{res}(m,n)} \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}) \\
\uparrow \mathcal{C}_b & & \uparrow \mathcal{C}_b^{\text{res}(m,n)} \times \text{Id} \\
(\mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}, I), \mathcal{F}(\{1\}, \{2\}, I)) & \xleftarrow{\mathcal{C}_{a_3}^*} & (\text{Cht}_{V \boxtimes V^*}^{\{1\}, \{2\}, \text{res}(m,n)} \times \mathfrak{R}^{(I)}, \mathcal{F}_{V \boxtimes V^*}^{\text{res}(m,n)} \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}) \\
\uparrow \mathcal{C}_F & & \uparrow \mathcal{C}_F^{\text{res}(m,n)} \times \text{Id} \\
(\mathcal{Z}(I, \{2\}, \{1\}), \mathcal{F}(I, \{2\}, \{1\})) & \xleftarrow{\mathcal{C}_{a_4}^*} & (\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{2\}, \{1\}} / G_{nv} \times \mathfrak{R}^{(I)}, IC_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{2\}, \{1\}}} \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)}) \\
\uparrow \mathcal{C}_{\#} & & \uparrow \mathcal{C}_{\#}^{\text{Gr}} \times \text{Id} \\
(\mathcal{Z}^{(I)} \times v, \mathcal{F}^{(I)} \boxtimes E_v) & \xleftarrow{\mathcal{C}_{a_6}^*} & (v/G_{nv} \times \mathfrak{R}^{(I)}, E_v \boxtimes \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I)})
\end{array}$$

On rappelle que $\text{Orb}_V \subset G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ est la réunion des $G(\mathcal{O}_v)$ -orbites associées aux copoids dominants qui sont des poids de V . La correspondance cohomologique $\mathcal{C}_b^{\text{res}(m,n)} \circ \mathcal{C}_F^{\text{res}(m,n)} \circ \mathcal{C}_{\#}^{\text{Gr}}$ est supportée par

$$v/G_{nv} \leftarrow \mathcal{Y}_b^{\text{res}(m,n)} \times_{\text{Gr}_{\Delta(v)}^{\{2\}, \{1\}}/G_{nv}} \mathfrak{Y}_{\#}/G_{nv} = \text{Orb}_V/K_{m,n} \rightarrow \text{Cht}_{\mathbf{1}}^{\text{res}(m,n)} = v/K_{m,n}$$

(où $K_{m,n}$ agit sur Orb_V à travers $G(\mathcal{O}_{nv})$). Elle est donc donnée par la multiplication par une fonction $k_{V,v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$ à support dans $\text{Orb}_V/G(\mathcal{O}_v)$. Cela termine la preuve du lemme 6.12. \square

6.5. Démonstration du lemme 6.13. Nous sommes ici dans le cas où $I = \emptyset$, $W = \mathbf{1}$ et $\deg(v) = 1$. Nous commençons par montrer le lemme à un signe et une puissance de $q^{1/2}$ près, puis nous vérifierons que la normalisation est correcte en nous limitant aux lieux lisses, par un argument similiaire à la preuve du cas minuscule donnée dans l'introduction.

Adaptons rapidement les notations précédentes, avec en plus une troncature de Harder-Naramsimhan pour garantir que nous aurons affaire à des schémas et non à des champs. Soit μ un copoids dominant arbitraire de G et $N \subset X \setminus v$ un niveau assez grand pour que $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$ soit un schéma. En fait pour des raisons techniques nous demandons que $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu + \kappa}$ soit un schéma (où κ , qui dépend seulement de V , sera défini dans quelques lignes).

Pour tout singleton J (qui sera $\{1\}$ pour la première copie de H_N et $\{2\}$ pour la deuxième copie dans le produit $H_N \times H_N$ qui apparaîtra dans le prochain diagramme) on définit H_N comme l'ouvert de Hecke ${}_{N,J,V}^{(J)}|_v$ formé des $(\mathcal{G}, \psi) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{G}', \psi')$ tels que (\mathcal{G}, ψ) et (\mathcal{G}', ψ') appartiennent à $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$. C'est un schéma. Voici la définition de κ : il est tel que pour tout point $(\mathcal{G}, \psi) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{G}', \psi')$ de $\text{Hecke}_{N,J,V}^{(J)}|_v$ vérifiant $(\mathcal{G}', \psi') \in \text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$, (\mathcal{G}, ψ) appartient à $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu + \kappa}$.

On note \mathcal{Z} et Γ les schémas discrets sur \mathbb{F}_q qui sont des réunions de copies de $v = \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$ indexées par les ensembles $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}(\mathbb{F}_q)$ et $H_N(\mathbb{F}_q)$ (plus loin on écrira parfois $\mathcal{Z} = \text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}(\mathbb{F}_q)$ et $\Gamma = H_N(\mathbb{F}_q)$). On remarque que Γ est la correspondance de Hecke entre \mathcal{Z} et lui-même, qui est formée des $((\mathcal{E}, \psi) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{E}', \psi'))$

avec (\mathcal{E}, ψ) et (\mathcal{E}', ψ') dans \mathcal{Z} et ϕ une modification en v telle que l'élément associé de $G(\mathcal{O}_v)\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ appartienne à $G(\mathcal{O}_v)\backslash \text{Orb}_V$. On note $p : \mathcal{Z} \rightarrow v$ le morphisme évident.

On définit $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ comme l'ouvert de $\text{Cht}_{N,\{1,2\},V\boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}}|_{\Delta(v)}$ formé des diagrammes

$$(6.36) \quad (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0)$$

tels que (\mathcal{G}_0, ψ_0) et (\mathcal{G}_1, ψ_1) appartiennent à $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$. C'est un schéma sur $v = \text{Spec } \mathbb{F}_q$. On note $\mathcal{Y}_b \xrightarrow{i_b} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ le sous-schéma fermé défini par la condition que $\phi_2\phi_1$ s'étend en un isomorphisme sur $X \times S$. On définit de façon analogue $\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}$ et \mathcal{Y}_\sharp . Le morphisme de Frobenius partiel $F_{\{1\}} : \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}} \rightarrow \mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}$ envoie (6.36) vers

$$(\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} (\tau \mathcal{G}_0, \tau \psi_0) \xrightarrow{\tau \phi_1} (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1).$$

On rappelle que les faisceaux d'intersection $\mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ et $\mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}}$ sont dotés des correspondances cohomologiques

- \mathcal{C}_\sharp de (v, E_v) vers $(\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}, \mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}})$ supportée sur

$$v \xleftarrow{p_\sharp} \mathcal{Y}_\sharp \xrightarrow{i_\sharp} \mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}},$$

- \mathcal{C}_F de $(\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}, \mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}})$ vers $(\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}}, \mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\}\}})$ supportée sur

$$\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}} \xleftarrow{F_{\{1\}}} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}},$$

- \mathcal{C}_b de $(\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}}, \mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\}\}})$ vers (v, E_v) supportée par

$$\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}} \xleftarrow{i_b} \mathcal{Y}_b \xrightarrow{p_b} v.$$

Leur composée $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_\sharp$ est supportée par $\mathcal{Y}_\sharp \times_{\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}} \mathcal{Y}_b = \Gamma$ et nous voulons montrer que c'est la multiplication par $h_{V,v}$ (à une puissance de $q^{1/2}$ et un signe près pour le moment). Ces trois correspondances cohomologiques sont récapitulées par la première ligne du diagramme suivant. D'autre part la composée des trois correspondances cohomologiques de la proposition 6.6, appliquée au schéma H_N sur \mathbb{F}_q et à son faisceau d'intersection, est récapitulée par la dernière ligne de ce diagramme et d'après la proposition 6.6 nous savons qu'elle est supportée par $\Gamma = H_N(\mathbb{F}_q)$ et donnée par la multiplication par $h_{V,v}$ (à une puissance de $q^{1/2}$ et un signe près pour le moment). Nous allons utiliser ce diagramme pour montrer que les deux composées sont les mêmes (ou pour être plus précis qu'elles sont données par la multiplication par la même fonction sur $H_N(\mathbb{F}_q)$):

$$(6.37) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{Z} & \xleftarrow{p_\sharp} & \mathcal{Y}_\sharp & \xleftarrow{i_\sharp} & \mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}} & \xleftarrow{F_{\{1\}}} & \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}} & \xleftarrow{i_b} & \mathcal{Y}_b & \xrightarrow{p_b} & \mathcal{Z} \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \alpha^{2,1} & & \downarrow \alpha^{1,2} & & \downarrow j_b & & \downarrow p \\ \mathcal{Z} & \xleftarrow{p_\sharp} & \mathcal{Y}_\sharp & \xleftarrow{i_\sharp^\tau} & \mathcal{J}^{2,1} & \xleftarrow{F_{\{1\}}^\tau} & \mathcal{J}^{1,2} & \xleftarrow{\Delta^\tau} & H_N & \xrightarrow{p_N} & v \\ \downarrow p & & \downarrow j_\sharp & & \downarrow \beta^{2,1} & & \downarrow \beta^{1,2} & & \parallel & & \parallel \\ v & \xleftarrow{p_N} & H_N & \xleftarrow{\Delta} & H_N \times H_N & \xleftarrow{\text{Frob} \times \text{Id}} & H_N \times H_N & \xleftarrow{\Delta} & H_N & \xrightarrow{p_N} & v \end{array}$$

On remarque que $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ s'identifie au sous-schéma fermé de $\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N$ formé des points

$$(6.38) \quad (((\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}'_1, \psi'_1)), ((\mathcal{G}_2, \psi_2) \xrightarrow{\phi_2} (\mathcal{G}'_2, \psi'_2)))$$

tels que

$$(6.39) \quad (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) = (\mathcal{G}'_2, \psi'_2)$$

$$(6.40) \quad \text{et } (\mathcal{G}_2, \psi_2) = (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1)$$

puisqu'ils fournissent alors le diagramme habituel

$$(\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) \simeq (\mathcal{G}'_2, \psi'_2) \xrightarrow{\phi_2^{-1}} (\mathcal{G}_2, \psi_2) \simeq (\tau \mathcal{G}_1, \tau \psi_1).$$

On définit $\mathcal{T}^{1,2}$ comme le sous-schéma fermé de $\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N$ formé des points (6.38) tels que la condition (6.39) soit satisfaite. On peut remarquer si on veut que $\mathcal{T}^{1,2}$ est égal à un ouvert de la fibre de Hecke $\mathcal{C}_{\{1,2\},V \boxtimes V^*}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ en $\Delta(v)$ mais cela ne servira pas.

De même $\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}$ s'identifie au sous-schéma fermé de $\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N$ formé des points (6.38) tels que

$$(6.41) \quad (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) = (\tau \mathcal{G}'_2, \tau \psi'_2)$$

$$(6.42) \quad \text{et } (\mathcal{G}_2, \psi_2) = (\mathcal{G}_1, \psi_1)$$

puisqu'ils fournissent alors le diagramme habituel

$$(\mathcal{G}'_2, \psi'_2) \xrightarrow{\phi_2^{-1}} (\mathcal{G}_2, \psi_2) \simeq (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}'_1, \psi'_1) \simeq (\tau \mathcal{G}'_2, \tau \psi'_2).$$

On définit $\mathcal{T}^{2,1}$ comme le sous-schéma fermé de $\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N$ formé des points (6.38) tels que la condition (6.41) soit satisfaite. On définit $\mathcal{F}_{\{1\}}^{\mathcal{T}}$ comme la restriction à $\mathcal{T}^{1,2}$ de $\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N \xrightarrow{\text{Frob} \times \text{Id}} \mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N$.

Dans le diagramme ci-dessus le carré entre j_{\sharp} et $\beta^{2,1}$ et le carré entre $\alpha^{1,2}$ et j_{\flat} sont cartésiens.

On définit \mathcal{F}_N comme le faisceau d'intersection de \mathbf{H}_N . On note $\text{Gr}_{V,v}$ le schéma sur v égal à la fibre de $\text{Gr}_{J,V}^{(J)}$ sur v , où J est un singleton (le même schéma avait été noté $\text{Gr}_v^{\{\{1\}\}}$ dans le paragraphe précédent).

On a un morphisme évident $\gamma : \mathbf{H}_N \rightarrow \text{Gr}_{V,v}/G_{nv}$ et \mathcal{F}_N est canoniquement isomorphe à $\gamma^*(IC_{\text{Gr}_{V,v}})[d](d/2)$ où $d = \dim \text{Bun}_{G,N}$. Bien sûr $\mathbb{D}\mathcal{F}_N \simeq \mathcal{F}_N$ mais il est préférable de garder la notation $\mathbb{D}\mathcal{F}_N$ puisqu'elle figure dans l'énoncé de la proposition 6.6.

On définit $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{2,1} = (\beta^{2,1})^*(\mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N)$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{1,2} = (\beta^{1,2})^*(\mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N)$. D'où une correspondance cohomologique "image inverse" évidente

$$\mathcal{C}_{\beta^{2,1}}^* \text{ de } (\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N, \mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) \text{ vers } (\mathcal{T}^{2,1}, \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{2,1})$$

supportée par

$$\mathbf{H}_N \times \mathbf{H}_N \xleftarrow{\beta^{2,1}} \mathcal{T}^{2,1} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{T}^{2,1}.$$

De même on a une correspondance cohomologique "image inverse" $\mathcal{C}_{\beta^{1,2}}^*$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{Z}(\{2\},\{1\}) & \xrightarrow{\alpha^{2,1}} & \mathcal{T}^{2,1} \\
 & \searrow^{\gamma^{2,1}} \quad \swarrow_{\delta^{2,1}} & \\
 & \text{Gr}_{V,v}/G_{nv} \times \text{Gr}_{V^*,v}/G_{nv} &
 \end{array}$$

et $\gamma^{2,1}$ et $\delta^{2,1}$ sont lisses, de dimension $2n \dim(G)$ et $2n \dim(G) + d$ et $\alpha^{2,1}$ est, fibre par fibre un plongement lisse de codimension d . Plus précisément, localement pour la topologie étale au voisinage de $\mathcal{Z}(\{2\},\{1\})$ on peut construire un morphisme $\kappa : \mathcal{T}^{2,1} \rightarrow \mathbb{A}^d$ tel que

- le morphisme

$$(6.43) \quad (\delta^{2,1}, \kappa) : \mathcal{T}^{2,1} \rightarrow \text{Gr}_{V,v}/G_{nv} \times \text{Gr}_{V^*,v}/G_{nv} \times \mathbb{A}^d$$

soit lisse de dimension $2n \dim(G)$,

- $\alpha^{2,1}$ identifie $\mathcal{Z}(\{2\},\{1\})$ avec l'image inverse de $0 \in \mathbb{A}^d$.

En effet on peut construire κ comme la différence entre des relevés de (\mathcal{G}_1, ψ_1) et (\mathcal{G}_2, ψ_2) par un morphisme étale d'un ouvert de \mathbb{A}^d dans $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$ (de sorte que l'annulation de κ force l'équation (6.42)).

Comme

$$\mathcal{F}(\{2\},\{1\}) = (\gamma^{2,1})^*(IC_{\text{Gr}_{V,v} \times \text{Gr}_{V^*,v}}) \text{ et } \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{2,1} = (\delta^{2,1})^*(IC_{\text{Gr}_{V,v} \times \text{Gr}_{V^*,v}})[2d](d),$$

on obtient une correspondance cohomologique "image directe" canonique

$$\mathcal{C}_{1,\alpha^{2,1}} \text{ de } (\mathcal{Z}(\{2\},\{1\}), \mathcal{F}(\{2\},\{1\})) \text{ vers } (\mathcal{T}^{2,1}, \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{2,1})$$

supportée par

$$\mathcal{Z}(\{2\},\{1\}) \xleftarrow{Id} \mathcal{Z}(\{2\},\{1\}) \xrightarrow{\alpha^{2,1}} \mathcal{T}^{2,1}.$$

En effet l'isomorphisme canonique $\iota^!(E_{\mathbb{A}^d}[2d](d)) \simeq E_v$ (où ι est l'inclusion de 0 dans \mathbb{A}^d) fournit, par recollement pour la topologie étale, un isomorphisme canonique de faisceaux pervers (à décalage près)

$$(6.44) \quad (\alpha^{2,1})^!(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{2,1}) \simeq \mathcal{F}(\{2\},\{1\}).$$

De même on définit un isomorphisme

$$(6.45) \quad (\alpha^{1,2})^!(\mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{1,2}) \simeq \mathcal{F}(\{1\},\{2\})$$

et on en déduit une correspondance cohomologique "image directe" $\mathcal{C}_{1,\alpha^{1,2}}$.

La définition de $\mathcal{C}_{p,!}$ et \mathcal{C}_p^* dans le diagramme ci-dessous est évidente puisque \mathcal{Z} est une réunion de copies de v . On définit les correspondances cohomologiques $\mathcal{C}_{\sharp}^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{C}_F^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{C}_p^{\mathcal{T}}$ du diagramme ci-dessous de la façon suivante :

- on définit $\mathcal{C}_{\sharp}^{\mathcal{T}}$ comme

$$(i_{\sharp}^{\mathcal{T}})_! p_{\sharp}^* E_{\mathcal{Z}} = (i_{\sharp}^{\mathcal{T}})_! j_{\sharp}^* p_N^* E_v = (\beta^{2,1})^* \Delta_! p_N^* E_v \rightarrow (\beta^{2,1})^*(\mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) = \mathcal{F}_{\mathcal{T}}^{2,1}$$

où la deuxième égalité est le changement de base propre dans le carré cartésien entre j_{\sharp} et $\beta^{2,1}$, et le morphisme en troisième position provient du morphisme $\Delta_! p_N^* E_v \rightarrow \mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N$ associé à $\mathcal{C}_{\sharp}^{\Delta}$, si bien que $\mathcal{C}_{\sharp}^{\mathcal{T}} \circ \mathcal{C}_p^* = \mathcal{C}_{\beta^{2,1}}^* \circ \mathcal{C}_{\sharp}^{\Delta}$,

- $\mathcal{C}_F^{\mathcal{J}}$ est associée à la correspondance image inverse

$$\mathcal{J}^{2,1} \xleftarrow{F_{\{1\}}^{\mathcal{J}}} \mathcal{J}^{1,2} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{J}^{1,2},$$

et au morphisme $(F_{\{1\}}^{\mathcal{J}})^*(\mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{1,2}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{2,1}$ qui vient par image inverse par $\beta_{1,2}$ et $\beta_{2,1}$ du morphisme $(\text{Frob} \times \text{Id})^*(\mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) \rightarrow \mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N$ qui donne $\mathcal{C}_{\text{Frob} \times \text{Id}}$, si bien que $\mathcal{C}_{\beta^{1,2}}^* \circ \mathcal{C}_{\text{Frob} \times \text{Id}} = \mathcal{C}_F^{\mathcal{J}} \circ \mathcal{C}_{\beta^{2,1}}^*$,

- on définit $\mathcal{C}_b^{\mathcal{J}}$ comme la correspondance cohomologique donnée par le même morphisme

$$(\Delta^{\mathcal{J}})^*(\beta^{1,2})^*(\mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) = \Delta^*(\mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) \rightarrow p_N^! E_v$$

que \mathcal{C}_b^{Δ} , si bien que $\mathcal{C}_b^{\mathcal{J}} \circ \mathcal{C}_{\beta^{1,2}}^* = \mathcal{C}_b^{\Delta}$.

Alors le diagramme de correspondances cohomologiques suivant est commutatif (à une puissance de $q^{1/2}$ près pour le carré du milieu en haut et à un signe près pour les carrés de gauche et de droite en haut):

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}}) & \xrightarrow{\mathcal{C}_{\sharp}} & (\mathcal{Z}(\{2\}, \{1\}), \mathcal{F}(\{2\}, \{1\})) & \xrightarrow{\mathcal{C}_F} & (\mathcal{Z}(\{1\}, \{2\}), \mathcal{F}(\{1\}, \{2\})) & \xrightarrow{\mathcal{C}_b} & (\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}}) \\
 \downarrow \text{Id} & & \downarrow \mathcal{C}_{1,\alpha^{2,1}} & & \downarrow \mathcal{C}_{1,\alpha^{1,2}} & & \downarrow \mathcal{C}_{p,!} \\
 (\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}}) & \xrightarrow{\mathcal{C}_{\sharp}^{\mathcal{J}}} & (\mathcal{J}^{2,1}, \mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{2,1}) & \xrightarrow{\mathcal{C}_F^{\mathcal{J}}} & (\mathcal{J}^{1,2}, \mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{1,2}) & \xrightarrow{\mathcal{C}_b^{\mathcal{J}}} & (v, E_v) \\
 \uparrow \mathcal{C}_p^* & & \uparrow \mathcal{C}_{\beta^{2,1}}^* & & \uparrow \mathcal{C}_{\beta^{1,2}}^* & & \uparrow \text{Id} \\
 (v, E_v) & \xrightarrow{\mathcal{C}_{\sharp}^{\Delta}} & (\mathbb{H}_N \times \mathbb{H}_N, \mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) & \xrightarrow{\mathcal{C}_{\text{Frob} \times \text{Id}}} & (\mathbb{H}_N \times \mathbb{H}_N, \mathcal{F}_N \boxtimes \mathbb{D}\mathcal{F}_N) & \xrightarrow{\mathcal{C}_b^{\Delta}} & (v, E_v)
 \end{array}$$

Pour montrer la commutativité (à une puissance de $q^{1/2}$ près) du carré entre \mathcal{C}_F et $\mathcal{C}_F^{\mathcal{J}}$ on utilise les morphismes vers $\text{Gr}_v^{\{1\}}/G_{nv} \times \text{Gr}_v^{\{2\}}/G_{nv}$, et des variantes évidentes de la proposition 3.4. Plus précisément, localement pour la topologie étale au voisinage de l'image de $\mathcal{J}^{2,1}$ on peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{J}^{2,1} & \xleftarrow{F_{\{1\}}^{\mathcal{J}}} & \mathcal{J}^{1,2} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Gr}_{V,v}/G_{nv} \times \text{Gr}_{V^*,v}/G_{nv} \times \mathbb{A}^d & \xleftarrow{\text{Frob} \times \text{Id} \times \text{Id}} & \text{Gr}_{V,v}/G_{nv} \times \text{Gr}_{V^*,v}/G_{nv} \times \mathbb{A}^d
 \end{array}$$

tel que les flèches verticales soient lisses et que $\mathcal{Z}(\{2\}, \{1\}) \xleftarrow{F_{\{1\}}^{\mathcal{J}}} \mathcal{Z}(\{1\}, \{2\})$ s'obtienne comme image inverse de $0 \in \mathbb{A}^d$.

Il reste à montrer que les carrés en haut à gauche et en haut à droite sont commutatifs (à un signe près). La construction de $\mathcal{C}_{1,\alpha^{2,1}}$ ci-dessus fournit un isomorphisme canonique $(\alpha^{2,1})^!(\mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{2,1}) \simeq \mathcal{F}(\{2\}, \{1\})$, d'où un isomorphisme $(i_{\sharp}^{\mathcal{J}})^!(\mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{2,1}) \simeq i_{\sharp}^!(\mathcal{F}(\{2\}, \{1\}))$ sur \mathcal{Y}_{\sharp} et par conséquent il existe une unique correspondance cohomologique \mathcal{C}'_{\sharp} telle que $\mathcal{C}_{1,\alpha^{2,1}} \circ \mathcal{C}'_{\sharp} = \mathcal{C}_{\sharp}^{\mathcal{J}}$.

D'autre part on définit \mathcal{C}'_b à partir de $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}_b$ par changement de base propre dans le carré cartésien entre $\alpha^{1,2}$ et j_b , de sorte que $\mathcal{C}_{p,1} \circ \mathcal{C}'_b = \mathcal{C}^{\mathcal{J}}_b \circ \mathcal{C}_{1,\alpha^{1,2}}$. Plus précisément $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}_b$ est donnée par un morphisme $\mathcal{F}^{1,2}_{\mathcal{J}} \rightarrow \Delta^{\mathcal{J}}_* p^!_N E_v$, d'où l'on déduit la correspondance \mathcal{C}'_b par la composition

$$\mathcal{F}^{\{\{1\},\{2\}\}} \xrightarrow[\sim]{(6.45)} (\alpha^{1,2})^! \mathcal{F}^{1,2}_{\mathcal{J}} \rightarrow (\alpha^{1,2})^! \Delta^{\mathcal{J}}_* p^!_N E_v \simeq i_{b,*} j^!_b p^!_N E_v = i_{b,*} p^!_b E_{\mathcal{Z}}$$

où l'avant dernière étape est le changement de base propre.

Nous sommes donc réduits à montrer que $\mathcal{C}'_{\sharp} = \mathcal{C}_{\sharp}$ et $\mathcal{C}'_b = \mathcal{C}_b$ (au signe près). Ces égalités sont vraies sur les lieux lisses de $\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}$ et $\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\}\}}$ car ce sont les intersections avec le lieu lisse de $H_N \times H_N$, sur lequel tous les sous-schémas sont lisses et les deux carrés cartésiens sont des intersections transverses. Maintenant on applique à \mathcal{C}'_{\sharp} et \mathcal{C}_{\sharp} le lemme suivant (l'argument pour \mathcal{C}'_b et \mathcal{C}_b ne sera pas répété car il est similaire et en résulte même par dualité de Verdier et permutation de 1 et 2).

Lemme 6.15. *Si dans le diagramme ci-dessus on oublie les troncutures par $\text{Bun}^{\leq \mu}_{G,N}$, deux correspondances cohomologiques de $(\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}})$ vers $(\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}, \mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}})$ supportées par \mathcal{Y}_{\sharp} sont égales si elles coïncident sur le lieu lisse.*

Ce lemme suffit pour montrer que $\mathcal{C}'_{\sharp} = \mathcal{C}_{\sharp}$. En effet on peut plonger le diagramme ci-dessus dans le même diagramme mais avec les troncutures données par $\text{Bun}^{\leq \mu + \kappa}_{G,N}$ (c'est la raison pour laquelle on avait demandé que $\text{Bun}^{\leq \mu + \kappa}_{G,N}$ soit un schéma). Alors \mathcal{C}'_{\sharp} et \mathcal{C}_{\sharp} s'étendent en des correspondances dans le nouveau diagramme et d'autre part l'image inverse toute entière de $\mathcal{Z} = \text{Bun}^{\leq \mu}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ par p_{\sharp} est incluse dans le nouveau diagramme (c'est-à-dire qu'elle n'est pas coupée par la troncuture par $\mu + \kappa$ grâce à l'hypothèse sur κ).

Démonstration du lemme 6.15. On a $\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}} = \text{Cht}^{\{\{2\},\{1\}\}}_{N,\{2,1\},V \boxtimes V^*} |_{\Delta(v)}$ et on pose

$$\mathcal{Z}^{\{\{2,1\}\}} = \text{Cht}^{\{\{2,1\}\}}_{N,\{2,1\},V \boxtimes V^*} |_{\Delta(v)} = \text{Cht}^{\{0\}}_{N,\{0\},V \otimes V^*} |_v.$$

On a

$$(\pi^{\{\{2\},\{1\}\}})_{!}(\mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}}) = \mathcal{F}^{\{2,1\}}_{N,\{2,1\},V \boxtimes V^*, \Xi, E} |_{\Delta(v)} = \mathcal{F}^{\{0\}}_{N,\{0\},V \otimes V^*, \Xi, E} |_v.$$

On a une inclusion évidente $\mathcal{Z} \xrightarrow{\iota} \mathcal{Z}^{\{\{2,1\}\}}$ et un carré cartésien

$$(6.46) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{\sharp} & \xrightarrow{i_{\sharp}} & \mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}} \\ \downarrow p_{\sharp} & & \downarrow \pi^{\{\{2\},\{1\}\}} \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{Z}^{\{\{2,1\}\}} \end{array}$$

Une correspondance cohomologique

$$\text{de } (\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}}) \text{ vers } (\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}, \mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}}) \text{ supportée par } \mathcal{Y}_{\sharp}$$

est la même chose qu'une correspondance cohomologique

$$\text{de } (\mathcal{Z}, E_{\mathcal{Z}}) \text{ vers } (\mathcal{Z}^{\{\{2,1\}\}}, \mathcal{F}^{\{0\}}_{N,\{0\},V \otimes V^*, \Xi, E} |_v) \text{ supportée par } \mathcal{Z} \xleftarrow{\text{Id}} \mathcal{Z} \xrightarrow{\iota} \mathcal{Z}^{\{\{2,1\}\}},$$

car par changement de base propre dans (6.46) on a

$$(p_{\#})_* i_{\#}^! (\mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}}) = l^! (\pi_{\{\{2,1\}\}}^{\{\{2\},\{1\}\}})_* (\mathcal{F}^{\{\{2\},\{1\}\}}) = l^! \left(\mathcal{F}_{N,\{0\},V \otimes V^*, \Xi, E}^{\{0\}} \Big|_v \right).$$

Or $l^! \left(\mathcal{F}_{N,\{0\},V \otimes V^*, \Xi, E}^{\{0\}} \Big|_v \right)$ est supportée en degré ≥ 0 (puisque $\mathcal{F}_{N,\{0\},V \otimes V^*, \Xi, E}^{\{0\}} \Big|_v$ est pervers) et seul $\mathbf{1} \subset V \otimes V^*$ contribue à sa composante de degré 0. Par conséquent une telle correspondance cohomologique est simplement donnée par la multiplication par une fonction sur \mathcal{Z} , et elle est clairement déterminée par sa restriction sur le lieu lisse de $\mathcal{Z}^{\{\{2\},\{1\}\}}$ (ou $\mathcal{Y}^{\#}$). \square

La commutativité du diagramme ci-dessus montre que les trois composées $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$, $\mathcal{C}_b^{\mathcal{J}} \circ \mathcal{C}_F^{\mathcal{J}} \circ \mathcal{C}_{\#}^{\mathcal{J}}$ et $\mathcal{C}_b^{\Delta} \circ \mathcal{C}_{\text{Frob} \times \text{Id}} \circ \mathcal{C}_{\#}^{\Delta}$, sont égales (à une puissance de $q^{1/2}$ et un signe près pour le moment). Nous savons qu’elles sont supportées par $\Gamma = H_N(\mathbb{F}_q)$, et d’après la proposition 6.6 (appliqués à H_N et \mathcal{F}_N), $\mathcal{C}_b^{\Delta} \circ \mathcal{C}_{\text{Frob} \times \text{Id}} \circ \mathcal{C}_{\#}^{\Delta}$ est donné par la multiplication par $h_{V,v}$ (à une puissance de $q^{1/2}$ et un signe près). Par conséquent $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ est donné par la multiplication par $h_{V,v}$ (à une puissance de $q^{1/2}$ et un signe près pour le moment). On pourrait expliciter tous les signes et les puissances de $q^{1/2}$ dans l’argument précédent mais pour terminer la preuve du lemme 6.13 le plus simple est de remarquer que la restriction de $h_{V,v}$ à l’orbite correspondant au plus haut poids de V dans $G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v)$ est non nulle et correspond dans la composition $\mathcal{C}_b^{\Delta} \circ \mathcal{C}_{\text{Frob} \times \text{Id}} \circ \mathcal{C}_{\#}^{\Delta}$ à une situation où tous les lieux sont lisses et les intersections transverses. Cette situation est en tous points identique au cas minuscule traité dans l’introduction, dont il suffit de répéter les arguments. \square

La preuve de la proposition 6.2 était très longue. Les trois remarques ci-dessous proposent des idées de preuves différentes. Enfin dans la remarque 6.19 on évoquera une preuve beaucoup plus simple (mais reposant sur un formalisme général qui sort du cadre de cet article) que Yakov Varshavsky a indiquée récemment à l’auteur [Var16].

Remarque 6.16. On suppose que $\text{deg}(v) = 1$ car autrement les notations seraient trop compliquées. Les correspondances cohomologiques $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_b$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ sont supportées par $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_b$ et $\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_{\#} \times_{\mathcal{Z}^{\{I,\{2\},\{1\}\}}} \mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}$. Par suite $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ est supportée par $\mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{Z}^{\{\{1\},\{2\},I\}}} \mathcal{Y}_2 = \Gamma^{(I)}$. On peut montrer que cette intersection est transverse dans le sens où on est dans une situation produit localement pour la topologie étale (voir la v5 de cet article sur arXiv pour plus de détails). Cela devrait impliquer que les termes locaux pour la composée des correspondances cohomologiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 supportées par \mathcal{Y}_1 et \mathcal{Y}_2 peuvent être calculés directement sur les fibres des faisceaux en les points de l’intersection (6.20), et on obtient facilement $h_{V,v}$. Mais nous avons manqué de références.

Remarque 6.17. Une autre idée pour montrer la proposition 6.2 en évitant ces difficultés techniques serait d’utiliser les résolutions de Bott-Samelson pour avoir des champs lisses et des intersections de sous-champs lisses qui soient transverses au sens usuel. Un inconvénient de cette approche est qu’elle requiert des arguments supplémentaires dans le cas non déployé considéré dans la section 12.

Remarque 6.18. Dans la situation où I est vide et $\text{deg}(v) = 1$, la composition $\mathcal{C}_b \circ \mathcal{C}_F \circ \mathcal{C}_{\#}$ apparaît, avec les notations de la remarque 6.9, comme une sorte de

restriction au graphe de Frobenius de Hecke $_{\{1\},V}^{\{1\}}$ vers Hecke $_{\{3\},V}^{\{3\}}$ de la composition $\mathcal{D}_b \circ \mathcal{D}_\#$. Mais nous ne sommes pas parvenus à mettre en forme cette idée.

La conclusion de ces trois remarques est que l’auteur n’a pas trouvé de preuve plus simple de la proposition 6.2. Quelle que soit la méthode employée, il faut nécessairement montrer un résultat de transversalité. Enoncer et exploiter un tel résultat est rendu plus difficile par les singularités et le cas où $\deg(v) > 1$.

Remarque 6.19. Cependant Yakov Varshavsky [Var16] a récemment indiqué à l’auteur que l’égalité schématique (6.20) suffit en fait, grâce à des arguments généraux, à impliquer un certain énoncé de transversalité et à en déduire que la composée des correspondances cohomologiques est égale à ce que l’on attend. Cela repose sur un formalisme général qui dépasse le cadre de cet article.

7. RELATIONS D’EICHLER-SHIMURA

Soit I un ensemble fini, W une représentation de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ et V une représentation irréductible de \widehat{G} . On considère $W \boxtimes V$ comme une représentation de $(\widehat{G})^{I \cup \{0\}}$. Soit v une place de $X \setminus N$. Comme précédemment E_v désigne le faisceau constant en v .

Le morphisme

$$F_{\{0\}}^{\deg(v)} : \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{\leq \mu, E} |_{(X \setminus N)^I \times v} \rightarrow \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{\leq \mu + \kappa, E} |_{(X \setminus N)^I \times v}$$

est bien défini (pour κ assez grand) parce que $\text{Frob}_v^{\deg(v)}$ est l’identité en v . La relation d’Eichler-Shimura exprime qu’il est annulé par un polynôme de degré $\dim(V)$ dont les coefficients sont les restrictions de $(X \setminus N)^{I \cup \{0\}}$ à $(X \setminus N)^I \times v$ des opérateurs de Hecke étendus $T(h_{\Lambda^i V, v})$ de la proposition 6.2. Il est vraiment nécessaire de considérer les opérateurs étendus car les opérateurs de Hecke $T(h_{\Lambda^i V, v})$ du paragraphe 4.4 n’étaient définis que sur $(X \setminus (N \cup v))^{I \cup \{0\}}$. On rappelle que dans la proposition 6.2 l’opérateur de Hecke étendu $T(h_{\Lambda^i V, v})$ a été défini comme le morphisme $S_{\Lambda^i V, v}$. Pour cette raison on va énoncer la proposition suivante avec $S_{\Lambda^i V, v}$. Un autre avantage est que cela la rend logiquement indépendante de la proposition 6.2. En effet, grâce à la définition des morphismes $S_{\Lambda^i V, v}$ par (6.2)-(6.5), la preuve va consister en un simple calcul d’algèbre tensorielle (inspiré par une preuve du théorème d’Hamilton-Cayley).

Proposition 7.1. *Pour κ assez grand (en fonction de $\deg(v)$ et V), on a*

$$(7.1) \quad \sum_{i=0}^{\dim V} (-1)^i (F_{\{0\}}^{\deg(v)})^i \circ S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v} |_{(X \setminus N)^I \times v} = 0 \quad \text{dans}$$

$$\text{Hom}_{D_c^b((X \setminus N)^I \times v, E)} \left(\mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{\leq \mu, E} |_{(X \setminus N)^I \times v}, \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{\leq \mu + \kappa, E} |_{(X \setminus N)^I \times v} \right).$$

Avant d’attaquer la démonstration on commence par rappeler une preuve “tensorielle” du théorème de Hamilton-Cayley, d’après le paragraphe 6.5 de [Cvi08] et [Pet09]. En fait cette preuve apparaît déjà dans la démonstration du théorème 13.4.12 de [Jan07] (dans un esprit assez proche du nôtre).

Soit k un corps de caractéristique 0 (par exemple E). Pour tout ensemble fini J , on possède l’antisymétriseur

$$A_J = \frac{1}{(\#J)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(J)} s(\sigma) \sigma$$

dans l'algèbre du groupe des permutations de J (où $s(\sigma)$ est la signature de σ). Pour tout k -espace vectoriel V de dimension finie, \mathcal{A}_J agit sur $V^{\otimes J}$ par un idempotent dont l'image est $\Lambda^{\#J}V$.

Soit J un ensemble fini et V un k -espace vectoriel de dimension finie. Soit $T \in \text{End}(V)$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $U \in \text{End}(V^{\otimes \{0\} \cup J})$ on note $\mathfrak{C}_J(T, U) \in \text{End}(V)$ l'opérateur composé

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\text{Id}_V \otimes (\delta_V)^{\otimes J}} V \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes J} = V^{\otimes \{0\} \cup J} \otimes (V^*)^{\otimes J} \\ &\xrightarrow{U \otimes \text{Id}_{(V^*)^{\otimes J}}} V^{\otimes \{0\} \cup J} \otimes (V^*)^{\otimes J} = V \otimes V^{\otimes J} \otimes (V^*)^{\otimes J} \\ &\xrightarrow{\text{Id}_V \otimes T^{\otimes J} \otimes \text{Id}_{(V^*)^{\otimes J}}} V \otimes V^{\otimes J} \otimes (V^*)^{\otimes J} = V \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes J} \xrightarrow{\text{Id}_V \otimes (\text{ev}_V)^{\otimes J}} V \end{aligned}$$

où $\{0\} \cup J$ est bien sûr une réunion disjointe. On va appliquer cette construction à $J = \{1, \dots, n\}$, de sorte que $\{0\} \cup J = \{0, \dots, n\}$. On va montrer l'égalité

$$(7.2) \quad \mathfrak{C}_{\{1, \dots, n\}}(T, \mathcal{A}_{\{0, 1, \dots, n\}}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Tr}(\Lambda^{n-i} T) T^i \text{ dans } \text{End}(V).$$

Cette égalité fournit une preuve du théorème de Hamilton-Cayley car si $n = \dim V$, on a $\mathcal{A}_{\{0, 1, \dots, n\}} = 0$, donc $\mathfrak{C}_{\{1, \dots, n\}}(T, \mathcal{A}_{\{0, 1, \dots, n\}}) = 0$ et (7.2) est la relation de Hamilton-Cayley $\sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Tr}(\Lambda^{n-i} T) T^i = 0$.

Voici maintenant la démonstration de (7.2). On développe $\mathcal{A}_{\{0, 1, \dots, n\}}$ en une somme sur les permutations σ de $\{0, \dots, n\}$ et on distingue suivant la longueur $\ell(\sigma, 0)$ du cycle contenant 0. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$ le nombre de permutations telles que $\ell(\sigma, 0) = i + 1$ vaut toujours $n!$, car il y a $n(n-1) \cdots (n-i+1)$ possibilités pour le cycle, et $(n-i)!$ possibilités pour la permutation restante. Il suffit donc de démontrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mathfrak{C}_{\{1, \dots, n\}} \left(T, \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, n\}), \ell(\sigma, 0) = i+1} s(\sigma) \sigma \right) = (-1)^i \text{Tr}(\Lambda^{n-i} T) T^i.$$

Comme $\mathfrak{C}_{\{1, \dots, n\}}(T, U)$ est inchangé si on conjugue U par une permutation de $\{0, \dots, n\}$ fixant 0, on peut remplacer la moyenne sur les permutations σ telles que $\ell(\sigma, 0) = i + 1$ par une moyenne sur les permutations σ telles que $0 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} i \xrightarrow{\sigma} 0$ et il suffit donc de démontrer que

$$(7.3) \quad \mathfrak{C}_{\{1, \dots, n\}} \left(T, \frac{1}{(n-i)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, n\}), 0 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} i \xrightarrow{\sigma} 0} s(\sigma) \sigma \right) = (-1)^i \text{Tr}(\Lambda^{n-i} T) T^i.$$

Dans (7.3) σ est simplement la juxtaposition de la permutation circulaire $\kappa_i : 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow 0$ et d'une permutation τ de $\{i + 1, \dots, n\}$ et la moyenne porte sur τ . On a $s(\sigma) = (-1)^i s(\tau)$. Donc le membre de gauche de (7.3) est égal au produit

- de $(-1)^i$,
- du scalaire égal à la composée

$$\begin{aligned} k &\xrightarrow{(\delta_V)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}}} (V \otimes V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} = V^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \otimes (V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{A}_{\{i+1, \dots, n\}} \otimes \text{Id}_{(V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}}}} V^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \otimes (V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \\ &\xrightarrow{T^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \otimes \text{Id}_{(V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}}}} V^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \otimes (V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \\ &= (V \otimes V^*)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}} \xrightarrow{(\text{ev}_V)^{\otimes \{i+1, \dots, n\}}} k \end{aligned}$$

qui est évidemment $\text{Tr}(\Lambda^{n-i} T)$,

- et de $\mathfrak{C}_{\{1, \dots, i\}}(T, \kappa_i) : V \rightarrow V$, où $\kappa_i : V^{\otimes \{0, \dots, i\}} \rightarrow V^{\otimes \{0, \dots, i\}}$ agit par permutation circulaire des facteurs.

On en déduit (7.2), car on va montrer que $\mathfrak{C}_{\{1, \dots, i\}}(T, \kappa_i)$ est égal à $T^i : V \rightarrow V$. En effet, en changeant l'ordre des facteurs dans $V \otimes V^{\otimes \{1, \dots, i\}} \otimes (V^*)^{\otimes \{1, \dots, i\}}$ en $V \otimes (V^* \otimes V)^{\otimes i}$ on obtient que $\mathfrak{C}_{\{1, \dots, i\}}(T, \sigma)$ est égal à la composée

$$\begin{aligned} (7.4) \quad V &\xrightarrow{\text{Id}_V \otimes \delta_V^{\otimes i}} V \otimes (V^* \otimes V)^{\otimes i} \xrightarrow{T \otimes (\text{Id}_{V^*} \otimes T) \otimes \dots \otimes (\text{Id}_{V^*} \otimes T)} V \otimes (V^* \otimes V)^{\otimes i} \\ &= (V \otimes V^*)^{\otimes i} \otimes V \xrightarrow{\text{ev}_V^{\otimes i} \otimes \text{Id}_V} V. \end{aligned}$$

On montre par récurrence sur i que (7.4) est égal à T^i en utilisant le fait que la composée

$$(7.5) \quad V \xrightarrow{\text{Id}_V \otimes \delta_V} V \otimes (V^* \otimes V) = (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{\text{ev}_V \otimes \text{Id}_V} V$$

est égale à Id_V d'après le lemme de Zorro (6.18). Ceci termine l'explication de la preuve "tensorielle" du théorème de Hamilton-Cayley.

Démonstration de la proposition 7.1. On rappelle que pour tout ensemble fini J , on possède l'antisymétriseur

$$\mathcal{A}_J = \frac{1}{(\#J)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(J)} s(\sigma) \sigma.$$

Pour tout entier n et tout endomorphisme U de $V^{\otimes\{0,1,\dots,n\}} = V^{\otimes(n+1)}$, on note $\mathfrak{C}_n(U)$ (pour simplifier par rapport à la notation $\mathfrak{C}_{\{0,1,\dots,n\}}(U)$ utilisée précédemment) la composée

$$(7.6) \quad \begin{aligned} & \mathcal{H}_{N,I\cup\{0\},W\boxtimes V}^{\leq\mu,E} \Big|_{(X\setminus N)^I \times v} \xrightarrow{\mathfrak{e}_{\delta_{V^{\otimes n}}}^{\sharp} \Big|_{(X\setminus N)^I \times v}} \\ & \mathcal{H}_{N,I\cup\{0\}\cup\{1,\dots,n\}\cup\{n+1,\dots,2n\},W\boxtimes V\boxtimes V^{\boxtimes n}\boxtimes(V^*)^{\boxtimes n}}^{\leq\mu,E} \Big|_{(X\setminus N)^I \times \Delta(v)} \\ & \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes U \boxtimes \text{Id}_{(V^*)^{\boxtimes n}})} \mathcal{H}_{N,I\cup\{0\}\cup\{1,\dots,n\}\cup\{n+1,\dots,2n\},W\boxtimes V\boxtimes V^{\boxtimes n}\boxtimes(V^*)^{\boxtimes n}}^{\leq\mu,E} \Big|_{(X\setminus N)^I \times \Delta(v)} \\ & \xrightarrow{\prod_{j \in \{1,\dots,n\}} (F_{\{j\}})^{\text{deg}(v)}} \mathcal{H}_{N,I\cup\{0\}\cup\{1,\dots,n\}\cup\{n+1,\dots,2n\},W\boxtimes V\boxtimes V^{\boxtimes n}\boxtimes(V^*)^{\boxtimes n}}^{\leq\mu+n \text{ deg}(v)\kappa,E} \Big|_{(X\setminus N)^I \times \Delta(v)} \\ & \xrightarrow{\mathfrak{e}_{\text{ev}_{V^{\otimes n}}}^{\flat} \Big|_{(X\setminus N)^I \times v}} \mathcal{H}_{N,I\cup\{0\},W\boxtimes V}^{\leq\mu+n \text{ deg}(v)\kappa,E} \Big|_{(X\setminus N)^I \times v}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on part de $I\cup\{0\}$ (avec la patte 0 fixée en v) et de la représentation $W \boxtimes V$, puis

- on crée des paires de pattes $(1, n + 1), (2, n + 2), \dots, (n, 2n)$ en v à l'aide de $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$,
- on applique U aux pattes dans $\{0, \dots, n\}$ et à la représentation $V^{\otimes\{0,1,\dots,n\}}$,
- on applique le morphisme de Frobenius partiel $(F_{\{j\}})^{\text{deg}(v)}$ aux pattes $j \in \{1, \dots, n\}$,
- on annihile les paires de pattes $(1, n + 1), (2, n + 2), \dots, (n, 2n)$ en v à l'aide de $\text{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$.

On prend $n = \dim V$. Comme $\Lambda^{n+1}V = 0$, $\mathcal{A}_{\{0,1,\dots,n\}}$ agit par zéro sur $V^{\otimes\{0,\dots,n\}}$ et donc $\mathfrak{C}_n(\mathcal{A}_{\{0,1,\dots,n\}})$ est nul. Mais d'un autre côté, en développant la moyenne dans $\mathcal{A}_{\{0,1,\dots,n\}}$ on va montrer que $\mathfrak{C}_n(\mathcal{A}_{\{0,1,\dots,n\}})$ est égal au membre de gauche de (7.1) (divisé par $n + 1$).

On développe donc le morphisme composé (7.6) en écrivant $\mathcal{A}_{\{0,1,\dots,n\}}$ comme une moyenne sur les permutations σ de $\{0, \dots, n\}$ et on distingue suivant la longueur $\ell(\sigma, 0)$ du cycle contenant 0. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$ le nombre de permutations telles que $\ell(\sigma, 0) = i + 1$ est toujours $n!$, parce qu'il y a $n(n - 1) \cdots (n - i + 1)$ possibilités pour le cycle contenant 0, et $(n - i)!$ possibilités pour le reste de la permutation. Il suffit donc de montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mathfrak{C}_n \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{0,\dots,n\}), \ell(\sigma,0)=i+1} s(\sigma)\sigma \right) = (-1)^i (F_{\{0\}}^{\text{deg}(v)})^i \circ S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v}.$$

Comme $\mathfrak{C}_n(U)$ ne change pas quand on conjugue U par une permutation de $\{0, \dots, n\}$ fixant 0 (car cela revient seulement à changer les noms des indices dans $\{1, \dots, n\}$ et $\{n + 1, \dots, 2n\}$ qui apparaissent comme intermédiaires dans la construction), on peut remplacer la moyenne sur les permutations σ telles que $\ell(\sigma, 0) = i + 1$ par une moyenne sur les permutations σ telles que le cycle contenant 0 soit $0 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} i \xrightarrow{\sigma} 0$. Autrement dit il suffit de montrer que

$$(7.7) \quad \mathfrak{C}_n \left(\frac{1}{(n - i)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{0,\dots,n\}), 0 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} i \xrightarrow{\sigma} 0} s(\sigma)\sigma \right) = (-1)^i (F_{\{0\}}^{\text{deg}(v)})^i \circ S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v}.$$

Dans (7.7) σ est simplement la juxtaposition de la permutation circulaire $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow 0$ et d'une permutation τ de $\{i+1, \dots, n\}$ et la moyenne porte sur τ . On a $s(\sigma) = (-1)^i s(\tau)$ et cela explique le signe $(-1)^i$ dans le membre de droite de (7.7). Les pattes $\{0\} \cup \{1, \dots, i\} \cup \{n+1, \dots, n+i\}$ d'un côté et $\{i+1, \dots, n\} \cup \{n+i+1, \dots, 2n\}$ de l'autre côté jouent des rôles complètement indépendants (les pattes dans I ne jouent quant à elles aucun rôle).

Ce qui arrive aux pattes dans $\{i+1, \dots, n\} \cup \{n+i+1, \dots, 2n\}$ est la chose suivante:

- on crée les paires de pattes $(i+1, n+i+1), (i+2, n+i+2), \dots, (n, 2n)$ en v à l'aide de $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$,
- on antisymétrise les pattes dans $\{i+1, \dots, n\}$ (grâce à la moyenne sur τ),
- on applique le morphisme de Frobenius partiel en les pattes de $\{i+1, \dots, n\}$,
- on annihile les paires de pattes $(i+1, n+i+1), (i+2, n+i+2), \dots, (n, 2n)$ en v à l'aide de $\text{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$.

Comme $\mathcal{A}_{\{i+1, \dots, n\}}$ agit sur $V^{\otimes \{i+1, \dots, n\}}$ par un idempotent dont l'image est $\Lambda^{\dim V - i} V$, cette composée est exactement le morphisme $S_{\Lambda^{\dim V - i} V, v}$. Pour justifier ceci formellement on procède comme dans la preuve de (0.44), avec u égal à l'inclusion de $\Lambda^j V \otimes (\Lambda^j V)^*$ dans $V^{\otimes j} \otimes (V^*)^{\otimes j}$, qui est telle que

$$(\mathcal{A}_j \otimes \text{Id}_{(V^*)^{\otimes j}}) \circ \delta_{V^{\otimes j}} = u \circ \delta_{\Lambda^j V} \quad \text{et} \quad \text{ev}_{V^{\otimes j}} \circ u = \text{ev}_{\Lambda^j V}.$$

Ce qui arrive aux pattes dans $\{0\} \cup \{1, \dots, i\} \cup \{n+1, \dots, n+i\}$ est la chose suivante:

- on crée les paires de pattes $(1, n+1), (2, n+2), \dots, (i, n+i)$ en v à l'aide de $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V \otimes V^*$,
- on applique la permutation circulaire $0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow i \rightarrow 0$ aux pattes de $\{0, \dots, i\}$,
- on applique le morphisme de Frobenius partiel en les pattes de $\{1, \dots, i\}$,
- on annihile les paires de pattes $(1, n+1), (2, n+2), \dots, (i, n+i)$ en v à l'aide de $\text{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$.

Si on numérote l'ensemble $\{0\} \cup \{1, \dots, i\} \cup \{n+1, \dots, n+i\}$ de 0 à $2i$ dans l'ordre mélangé $(0, n+1, 1, n+2, \dots, n+i, i)$, la composée précédente devient égale à la suivante: partant de $I \cup \{0\}$,

- on crée les paires de pattes $(1, 2), (3, 4), \dots, (2i-1, 2i)$ en v à l'aide de $\delta_V : \mathbf{1} \rightarrow V^* \otimes V$, et on arrive dans

$$\mathcal{H}_{N, I \cup \{0\} \cup \{1, \dots, 2i\}, W \boxtimes V \boxtimes V^* \dots \boxtimes V \boxtimes V^* \boxtimes V}^{\leq \mu, E} \Big|_{(X \setminus N)^I \times \Delta(v)},$$

- on applique le morphisme de Frobenius partiel en les pattes de $\{0, 2, 4, \dots, 2i-2\}$,
- on annihile les paires de pattes $(0, 1), (2, 3), \dots, (2i-2, 2i-1)$ en v à l'aide de $\text{ev}_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbf{1}$.

Par récurrence sur i on montre facilement que cette dernière composée est égale à $(F_{\{0\}}^{\text{deg}(v)})^i$, à l'aide de l'égalité entre (7.5) et Id_V . Signalons que ce dernier argument (c'est-à-dire l'utilisation de la permutation circulaire pour obtenir $(F_{\{0\}}^{\text{deg}(v)})^i$) est très voisin du théorème 1 et du lemme 2 dans [NBC06a]. \square

Remarque 7.2. Dans [XZ17], Liang Xiao et Xinwen Zhu ont défini (dans un cadre un peu différent) un anneau de correspondances cohomologiques entre $\text{Cht}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes V}^{(I, \{0\})} \Big|_{(X \setminus N)^I \times v}$ et lui-même, dans lequel la relation d'Eichler-Shimura résulte formellement de Hamilton-Cayley.

8. SOUS-FAISCEAUX CONSTRUCTIBLES STABLES PAR LES MORPHISMES
DE FROBENIUS PARTIELS

On appelle point géométrique \bar{x} d'un schéma Y la donnée d'un corps algébriquement clos $k(\bar{x})$ et d'un morphisme $\mathrm{Spec}(k(\bar{x})) \rightarrow Y$ (dans l'exposé VIII "Foncteurs fibres, supports, étude cohomologique des morphismes finis" de [SGA4-2] la définition des points géométriques fait intervenir des extensions séparablement closes, mais nous ne suivons pas cette convention ici). Autrement dit c'est la donnée d'un point x de Y et d'une extension algébriquement close $k(\bar{x})$ de $k(x)$. Soit $A = \mathcal{O}_E, E$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Si \mathcal{F} est un A -faisceau constructible sur un voisinage de x dans Y , on note $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ ou $\mathcal{F}|_{\bar{x}}$ la fibre de \mathcal{F} en \bar{x} (qui est un A -module de type fini). On note $Y_{(\bar{x})}$ le localisé strict (ou hensélisé strict) de Y en \bar{x} . Autrement dit $Y_{(\bar{x})}$ est le spectre de l'anneau $\varinjlim \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, où la limite inductive est prise sur les voisinages étales \bar{x} -pointés de x . C'est un anneau local hensélien dont le corps résiduel est la clôture séparable de $k(x)$ dans $k(\bar{x})$. Si \bar{x} et \bar{y} sont deux points géométriques de Y , on appelle flèche de spécialisation $\mathfrak{sp} : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ un morphisme $Y_{(\bar{x})} \rightarrow Y_{(\bar{y})}$, ou de façon équivalente un morphisme $\bar{x} \rightarrow Y_{(\bar{y})}$ (une telle flèche existe si et seulement si y est dans l'adhérence de Zariski de x). D'après le paragraphe 7 de l'exposé VIII de [SGA4-2] une flèche de spécialisation $\mathfrak{sp} : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ induit pour tout A -faisceau constructible \mathcal{F} sur un ouvert de Y contenant y un homomorphisme de spécialisation $\mathfrak{sp}^* : \mathcal{F}_{\bar{y}} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{x}}$ (qui découle simplement de la définition de la fibre d'un faisceau en un point géométrique).

Comme on l'avait déjà fait dans l'introduction, on fixe une clôture algébrique \overline{F} de F et on note $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{F})$ le point géométrique correspondant au-dessus du point générique η de X .

Soit I un ensemble fini. On note $\Delta : X \rightarrow X^I$ le morphisme diagonal. On note $\eta^I = \mathrm{Spec}(F^I)$ le point générique de X^I . On fixe un point géométrique $\overline{\eta}^I$ au-dessus de η^I , muni d'une flèche de spécialisation $\mathfrak{sp} : \overline{\eta}^I \rightarrow \Delta(\overline{\eta})$.

Remarque 8.1. Le rôle de \mathfrak{sp} est le suivant. Les faisceaux $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}$ sont lisses sur des ouverts de X^I ne contenant pas forcément $\Delta(\eta)$ et c'est donc leur fibre en $\overline{\eta}^I$ que l'on étudie. D'un autre côté on construira certains sous-faisceaux qui se prolongent en des faisceaux lisses sur un ouvert de X^I contenant $\Delta(\eta)$ et pour ces sous-faisceaux il est très important de considérer la fibre en $\Delta(\overline{\eta})$ du prolongement car elle est plus canonique (par exemple elle est compatible avec l'action du groupe $\mathfrak{S}(I)$ des permutations de I et avec la coalescence des pattes). Le rôle de \mathfrak{sp} est d'identifier *canoniquement* la fibre en $\overline{\eta}^I$ de ces sous-faisceaux avec la fibre en $\Delta(\overline{\eta})$ de leur prolongement. L'idée de considérer la fibre en un point géométrique de la diagonale apparaît dans le paragraphe 3.1 de [NBC06a].

Dans la suite on emploiera des lettres gothiques $\mathfrak{E}, \mathfrak{G}, \mathfrak{M}$ pour les \mathcal{O}_E -modules ou les \mathcal{O}_E -faisceaux et des lettres calligraphiées $\mathcal{E}, \mathcal{G}, \mathcal{M}$ pour les E -espaces vectoriels ou les E -faisceaux.

On rappelle que pour toute partie $J \subset I$ on note $\mathrm{Frob}_J : X^I \rightarrow X^I$ le morphisme qui à $(x_i)_{i \in I}$ associe $(x'_i)_{i \in I}$ avec

$$(8.1) \quad x'_i = \mathrm{Frob}(x_i) \text{ si } i \in J \text{ et } x'_i = x_i \text{ sinon.}$$

Lemme 8.2 (Drinfeld, théorème 2.1 de [Dri80] et proposition 6.1 de [Dri87b]). *Soit U un ouvert dense de X . On a une équivalence entre*

- *la catégorie $\mathcal{C}(U, I, \mathcal{O}_E)$ des \mathcal{O}_E -faisceaux lisses (constructibles) \mathfrak{E} sur U^I , munis d'une action des morphismes de Frobenius partiels, c'est-à-dire d'isomorphismes $F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^*(\mathfrak{E}) \simeq \mathfrak{E}$ commutant entre eux et dont la composée est l'isomorphisme naturel $\text{Frob}_{U^I}^*(\mathfrak{E}) \simeq \mathfrak{E}$,*
- *la catégorie des représentations continues de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ sur des \mathcal{O}_E -modules de type fini,*

qui est caractérisée de manière unique par les deux faits suivants

- *la composée avec le foncteur de restriction des représentations de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ à $\pi_1(U, \overline{\eta})$ plongé diagonalement est le foncteur $\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}_{\Delta(\overline{\eta})}$,*
- *si $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ est une famille de \mathcal{O}_E -faisceaux lisses (constructibles) sur U , l'image par ce foncteur de $\boxtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ (muni de l'action naturelle des morphismes de Frobenius partiels) est $(\boxtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i)_{\Delta(\overline{\eta})} = \otimes_{i \in I} (\mathfrak{F}_i)_{\overline{\eta}}$, muni de l'action de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ venant du fait que chaque $(\mathfrak{F}_i)_{\overline{\eta}}$ est muni d'une action de $\pi_1(U, \overline{\eta})$.*

Remarque 8.3. Cette équivalence de catégories est bien caractérisée de manière unique par les deux conditions à la fin du lemme car l'énoncé du lemme implique que tout objet de la catégorie $\mathcal{C}(U, I, \mathcal{O}_E)$ est un quotient d'un objet de la forme $\boxtimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ comme dans le lemme. En effet c'est vrai dans la catégorie des représentations continues de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ sur des \mathcal{O}_E -modules de type fini (cela est très facile à montrer pour des \mathcal{O}_E -modules de type fini de torsion et ce cas suffit pour que l'équivalence de catégories soit caractérisée de façon unique par les deux conditions à la fin du lemme).

On peut décrire le foncteur inverse de façon explicite: à une représentation continue de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ sur un \mathcal{O}_E -module de type fini il associe un \mathcal{O}_E -faisceau lisse sur U^I grâce au morphisme évident $\pi_1(U^I, \Delta(\overline{\eta})) \rightarrow \pi_1(U, \overline{\eta})^I$ et l'action des morphismes de Frobenius partiels sur ce dernier est définie à l'aide de la construction suivante: si on se donne des revêtements étales galoisiens U_i de U et un ensemble fini A muni d'une action de $\prod_{i \in I} \text{Gal}(U_i/U)$, alors $(\prod_{i \in I} U_i) \times_{\prod_{i \in I} \text{Gal}(U_i/U)} A$ est muni des morphismes de Frobenius partiels $\text{Frob}_{U_i} \times \prod_{j \neq i} \text{Id}_{U_j} \times \text{Id}_A$.

Dans le lemme ci-dessus on a présenté l'équivalence de catégories dans le sens où on l'utilise dans cet article mais, comme on vient de le voir, c'est le foncteur inverse qui est construit simplement. Dans les lemmes ci-dessous on donnera des équivalences de catégorie dans l'autre sens.

Remarque 8.4. Dans le cadre du lemme précédent, l'homomorphisme de spécialisation $\mathfrak{sp}^* : \mathfrak{E}|_{\Delta(\overline{\eta})} \rightarrow \mathfrak{E}|_{\overline{\eta}^I}$ fournit un isomorphisme entre les foncteurs $\mathfrak{E} \mapsto \mathfrak{E}|_{\Delta(\overline{\eta})}$ et $\mathfrak{E} \mapsto \mathfrak{E}|_{\overline{\eta}^I}$ de la catégorie $\mathcal{C}(U, I, \mathcal{O}_E)$ vers la catégorie des \mathcal{O}_E -modules.

Démonstration. Dans le cas où $\sharp I = 2$ l'énoncé figure dans le théorème 2.1 de [Dri80]. La preuve est donnée dans la proposition 6.1 de [Dri87b] (qui utilise la proposition 1.1 de [Dri87a]). Elle est également reprise dans le théorème 4 du paragraphe IV.2 de [Laf97]. Le cas général est expliqué dans le théorème 8.1.4 de [Lau04], qui n'est pas publié.

Pour la commodité du lecteur nous rappelons maintenant la preuve. La rédaction de la preuve donnée ci-dessous a été faite avec l'aide de Vladimir Drinfeld, Alain Genestier et Gérard Laumon. On commence par le lemme suivant.

Lemme 8.5 (Variante de la proposition 1.1 de [Dri87a]). *Soit k un corps séparable-ment clos contenant \mathbb{F}_q .*

1) *Le foncteur qui à V associe $W = V \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ muni de $\varphi = \text{Id}_V \otimes \text{Frob}_k$ fournit une équivalence*

- *de la catégorie des \mathbb{F}_q -espaces vectoriels V de dimension finie,*
- *vers la catégorie des couples (W, φ) où W est un k -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : (\text{Frob}_{\text{Spec } k})^*(W) \rightarrow W$ est un isomorphisme (si k est algébriquement clos, φ est simplement un isomorphisme Frob_k -linéaire de W dans W).*

2) *Soit A une \mathbb{F}_q -algèbre. Alors le foncteur qui à \mathcal{M} associe $\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{F}_q} k = \mathcal{M} \otimes_A (A \otimes k)$ induit une équivalence*

- *de la catégorie des A -modules \mathcal{M} ,*
- *vers la catégorie des $A \otimes k$ -modules \mathcal{N} munis d'un isomorphisme $\varphi : (\text{Id}_{\text{Spec } A} \times \text{Frob}_{\text{Spec } k})^*(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$ tel que tout élément de \mathcal{N} soit inclus dans un sous- k -espace vectoriel de \mathcal{N} de dimension finie stable par φ .*

Démonstration (d'après [Dri87a]). Le 1) résulte de la surjectivité de l'isogénie de Lang pour GL_n où $n = \dim V$. On a $V = W^\varphi$. Le 2) avec $A = \mathbb{F}_q$ découle de 1) en l'appliquant aux sous- k -espaces vectoriels de \mathcal{N} de dimension finie stables par φ (en effet la somme de deux sous-espaces de ce type est de ce type et \mathcal{N} est une réunion croissante de sous-espaces de ce type). Le 2) avec A arbitraire résulte du 2) avec $A = \mathbb{F}_q$ car l'action de A se transmet par l'équivalence de catégories. \square

Remarque 8.6. Voici un exemple de (\mathcal{N}, φ) qui n'est pas dans l'image essentielle du foncteur de 2), bien que \mathcal{N} soit un module projectif de type fini sur $A \otimes k$, parce que la condition à la fin de 2) n'est pas respectée: on prend $A = \mathbb{F}_q[t, t^{-1}]$ (l'algèbre des fonctions sur \mathbb{G}_m), $\mathcal{N} = A \otimes k = k[t, t^{-1}]$, et φ égal à la composée de $\text{Id}_A \otimes \text{Frob}_k$ et de la multiplication par t .

Remarque 8.7. Dans la situation de 2), si $\text{Spec}(A)$ est un ouvert affine Y d'une variété projective \bar{Y} sur \mathbb{F}_q et (\mathcal{N}, φ) vient d'un \mathcal{O} -module cohérent $\bar{\mathcal{N}}$ sur $\bar{Y} \times \text{Spec } k$ muni d'un isomorphisme $\bar{\varphi} : (\text{Id}_{\bar{Y}} \times \text{Frob}_{\text{Spec } k})^*(\bar{\mathcal{N}}) \simeq \bar{\mathcal{N}}$, la condition à la fin de 2) est satisfaite (car, en notant L un fibré ample sur \bar{Y} , les $H^0(\bar{Y} \times \text{Spec } k, \bar{\mathcal{N}} \otimes L^n)$ sont de dimension finie et stables par l'action de Frobenius). C'était la situation considérée par Drinfeld dans la proposition 1.1 de [Dri87a] (dont l'énoncé est que la catégorie des $(\bar{\mathcal{N}}, \bar{\varphi})$ comme ci-dessus est équivalente à celle des \mathcal{O} -modules cohérents sur \bar{Y}).

Lemme 8.8 (Généralisation de la proposition 6.1 de [Dri87b] et du lemme 8.1.2 de [Lau04]). *Soit k un corps séparable-ment clos contenant \mathbb{F}_q . Soit Y un schéma sur \mathbb{F}_q . Alors le foncteur $Z \mapsto Z \times \text{Spec } k$ est une équivalence*

- *de la catégorie des revêtements étales $Z \rightarrow Y$,*
- *vers la catégorie des revêtements étales $T \rightarrow Y \times \text{Spec } k$ munis d'un automorphisme $\alpha : (\text{Id}_Y \times \text{Frob}_{\text{Spec}(k)})^*(T) \rightarrow T$.*

On appelle revêtement étale un morphisme fini étale.

Remarque 8.9. La conclusion est fautive si l'on omet l'hypothèse que les morphismes sont étales. Voici un contre-exemple. On prend $Y = \mathbb{G}_m = \text{Spec } \mathbb{F}_q[t, t^{-1}]$, de sorte que $Y \times \text{Spec } k = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$. On prend alors $Z = \text{Spec}(k[t, t^{-1}][\epsilon]/\epsilon^2)$, et α tel que $\alpha^*(t) = t$ et $\alpha^*(\epsilon) = t\epsilon$ (et bien sûr α^* agit sur k par $x \mapsto x^q$).

Démonstration. Comme la catégorie des revêtements étales de Y est équivalente à celle de son réduit, et de même pour $Y \times \text{Spec } k$, il suffit de montrer le lemme pour Y réduit. En considérant les composantes irréductibles de Y et leurs intersections, on voit qu'il suffit de montrer le lemme pour Y irréductible. En recollant il suffit de montrer le lemme pour Y affine. On suppose donc $Y = \text{Spec}(A)$ avec A une \mathbb{F}_q -algèbre intègre.

Il est clair que le foncteur est pleinement fidèle. Il reste à montrer qu'il est essentiellement surjectif. On se donne donc T et α comme ci-dessus. Les équations donnant T et le morphisme α sont à coefficients dans une sous-algèbre de A de type fini. On suppose donc que A est une \mathbb{F}_q -algèbre intègre de type fini.

En langage géométrique la preuve consiste à compactifier Y , donc $Y \times \text{Spec } k$, puis à considérer sa normalisation à l'infini dans le corps des fractions de T . On va le faire de façon complètement élémentaire.

On note \mathcal{B} la k -algèbre des fonctions sur T . Grâce au 2) du lemme précédent il suffit de montrer que \mathcal{B} est une réunion de sous- k -espaces vectoriels de dimension finie stables par α^* . Si S est une partie finie de $A \setminus \{0\}$, comme $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}[S^{-1}]$ il suffit de montrer que $\mathcal{B}[S^{-1}]$ est une réunion de sous- k -espaces vectoriels de dimension finie stables par α^* . Donc on peut remplacer A par $A[S^{-1}]$. En choisissant S convenablement on peut supposer que Y est lisse, ce qu'on fait désormais. Il suffit de montrer le résultat pour chaque composante connexe de Z . Or Z est lisse puisque étale sur $Y \times \text{Spec } k$, et ses composantes connexes sont donc irréductibles.

Pour terminer la preuve il suffit donc de montrer que si \mathcal{B} est une k -algèbre intègre contenant $A \otimes k$ et finie comme $A \otimes k$ -module, telle que $\text{Frac}(\mathcal{B})$ est une extension séparable de $\text{Frac}(A \otimes k)$, et si $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ est un morphisme relevant $\text{Id}_A \otimes \text{Frob}_k$ et induisant un isomorphisme $\mathcal{B} \otimes_{k, \text{Frob}_k} k \rightarrow \mathcal{B}$, alors \mathcal{B} est une réunion de sous- k -espaces vectoriels de dimension finie stables par φ . Le reste de la preuve consiste à montrer ce dernier énoncé.

Par le théorème de normalisation de Noether il existe $d \in \mathbb{N}$ et x_1, \dots, x_d algébriquement indépendants dans A tels que A soit finie sur la sous-algèbre $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d]$, et que $\text{Frac}(A)$ soit une extension séparable de $\mathbb{F}_q(x_1, \dots, x_d)$ (voir par exemple le corollaire 16.18 de [Eis95] ou le théorème 4.2.2 de [HS06]). On est donc ramené à montrer l'énoncé avec $A = \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_d]$. Tout élément de \mathcal{B} est entier sur $A \otimes k$ et on possède $\text{Tr} : \mathcal{B} \rightarrow A \otimes k$ et $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathcal{B}$ tels que $\iota : b \mapsto (\text{Tr}(\beta_i b))_{i \in \{1, \dots, s\}}$ soit une injection de $(A \otimes k)$ -modules de \mathcal{B} dans $(A \otimes k)^s$. On note A_n le sous- \mathbb{F}_q -espace vectoriel de A formé des polynômes de degré total $\leq n$. On note \mathcal{B}_n le sous- k -espace vectoriel de \mathcal{B} formé des éléments annihilés par un polynôme de la forme

$$(8.2) \quad x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } a_i \in A_{in} \otimes k \text{ pour tout } i = 1, \dots, k.$$

Les formules classiques donnant à partir de deux polynômes P et Q de racines X_i et Y_j les polynômes de racines $X_i + Y_j$ et $X_i Y_j$ montrent que \mathcal{B}_n est un sous- k -espace vectoriel de \mathcal{B} et que $\mathcal{B}_m \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{m+n}$. De plus $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. On a $\text{Tr}(\mathcal{B}_n) \subset A_n \otimes k$ car Tr préserve la condition d'annulation par un polynôme de la forme (8.2) et $A_n \otimes k$ est exactement l'ensemble des éléments de $A \otimes k$ vérifiant cette condition. Donc si m est un entier tel que β_1, \dots, β_s appartiennent à \mathcal{B}_m , $\iota(\mathcal{B}_n) \subset (A_{m+n} \otimes k)^s$. Donc \mathcal{B}_n est un k -espace vectoriel de dimension finie. Par construction il est stable par φ . Donc on a fini. \square

Le lemme précédent implique immédiatement le lemme suivant.

Lemme 8.10. *Soit Y un schéma sur \mathbb{F}_q . On note F un corps contenant \mathbb{F}_q et F^{sep} une clôture séparable de F . Le foncteur*

- *de la catégorie des revêtements étales Z de Y , munis d'une action de $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$,*
- *vers la catégorie des revêtements étales $T \rightarrow Y \times \text{Spec}(F)$ munis d'un automorphisme $\alpha : (\text{Id}_Y \times \text{Frob}_{\text{Spec}(F)})^*(T) \rightarrow T$,*

qui à Z muni d'une action de $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$ associe (T, α) avec

- *T égal au quotient de $Z \times \text{Spec}(F^{\text{sep}})$ par l'action diagonale de $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$,*
- *α donné par l'action de $\text{Id}_Z \times \text{Frob}_{\text{Spec}(F^{\text{sep}})}$ sur ce quotient,*

est une équivalence de catégories.

Démonstration. On va construire un foncteur quasi-inverse qui à (T, α) associe Z muni d'une action de $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$. On voit que

$$\tilde{T} = T \times_{Y \times \text{Spec}(F)} (Y \times \text{Spec}(F^{\text{sep}}))$$

est un revêtement étale de $Y \times \text{Spec}(F^{\text{sep}})$ muni d'un isomorphisme

$$\tilde{\alpha} : (\text{Id}_Y \times \text{Frob}_{\text{Spec}(F^{\text{sep}})})^*(\tilde{T}) \rightarrow \tilde{T}.$$

Par le lemme précédent il existe Z revêtement étale de Y tel que $\tilde{T} = Z \times \text{Spec} F^{\text{sep}}$ et $\tilde{\alpha} = \text{Id}_Z \times \text{Frob}_{\text{Spec} F^{\text{sep}}}$. Comme Z est égal à l'espace des coinvariants de $\tilde{\alpha}$ agissant sur \tilde{T} (c'est-à-dire au coégalisateur de Id et $\tilde{\alpha}$), $\text{Gal}(F^{\text{sep}}/F)$ agit naturellement sur Z . \square

Lemme 8.11 (Drinfeld, théorème 2.1 de [Dri80] et proposition 6.1 de [Dri87b], et Eike Lau, lemme 8.1.2 de [Lau04]). *Soient X_1, \dots, X_k des schémas connexes sur \mathbb{F}_q . Pour tout i , soit \bar{z}_i un point géométrique de X_i . On a une équivalence entre*

- *la catégorie des actions continues de $\prod_{i=1}^k \pi_1(X_i, \bar{z}_i)$ sur des ensembles finis,*
- *la catégorie des revêtements étales T de $X_1 \times \dots \times X_k$, munis d'une action des morphismes de Frobenius partiels, c'est-à-dire de morphismes $F_{\{i\}}$ au-dessus de $\text{Frob}_{X_i} \times \prod_{j \neq i} \text{Id}_{X_j}$, commutant entre eux et dont la composée est Frob_T ,*

où le foncteur est le suivant: si on se donne des revêtements étales galoisiens U_i de X_i et un ensemble fini A muni d'une action de $\prod_{i \in I} \text{Gal}(U_i/X_i)$, alors $(\prod_{i \in I} U_i) \times_{\prod_{i \in I} \text{Gal}(U_i/X_i)} A$, muni des morphismes de Frobenius partiels $\text{Frob}_{U_i} \times \prod_{j \neq i} \text{Id}_{U_j} \times \text{Id}_A$, est l'image par le foncteur de l'action de $\prod_{i=1}^k \pi_1(X_i, \bar{z}_i)$ sur l'ensemble fini $(\prod_{i=1}^k (U_i)_{\bar{z}_i}) \times_{\prod_{i \in I} \text{Gal}(U_i/X_i)} A$.

Démonstration. Le cas où $k = 2$ permet de montrer le cas général, par récurrence sur k . On suppose donc que $k = 2$. Il est clair que le foncteur décrit dans l'énoncé est pleinement fidèle. Il reste donc à montrer qu'il est essentiellement surjectif. On peut définir de façon équivalente la première catégorie comme la catégorie des revêtements étales de X_2 munis d'une action continue de $\pi_1(X_1, \bar{z}_1)$. En recollant on peut supposer X_2 réduit, irréductible et affine. En échangeant les rôles de X_1 et X_2 on peut faire de même pour X_1 . Désormais on suppose donc que X_1 et X_2 sont réduits, irréductibles et affines.

On se donne donc un revêtement étale T de $X_1 \times X_2$, muni de morphismes $F_{\{1\}}$ et $F_{\{2\}}$ au-dessus de $\text{Frob}_{X_1} \times \text{Id}_{X_2}$ et $\text{Id}_{X_1} \times \text{Frob}_{X_2}$, commutant entre eux et

dont la composée est Frob_T et on veut montrer que $(T, F_{\{1\}}, F_{\{2\}})$ provient d'une action de $\pi_1(X_1, \bar{z}_1) \times \pi_1(X_2, \bar{z}_2)$ sur un ensemble fini. Comme les équations de T et les morphismes $F_{\{1\}}$ et $F_{\{2\}}$ s'expriment à l'aide d'un nombre fini d'éléments des algèbres de fonctions sur X_1 et X_2 , on peut supposer X_1 et X_2 de type fini, ce qu'on fait désormais.

En appliquant le lemme 8.8 à $X_1 \times \bar{z}_2$ et $\bar{z}_1 \times X_2$ on voit que la fibre $T_{\bar{z}_1 \times \bar{z}_2}$ a un sens (bien que $\bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ ne soit pas un point géométrique de $X_1 \times X_2$) et qu'elle est munie d'actions de $\pi_1(X_1, \bar{z}_1)$ et $\pi_1(X_2, \bar{z}_2)$. On veut montrer qu'elles commutent et que T provient de cette action de $\pi_1(X_1, \bar{z}_1) \times \pi_1(X_2, \bar{z}_2)$ sur $T_{\bar{z}_1 \times \bar{z}_2}$. Si \bar{x} et \bar{y} sont deux points géométriques d'un schéma connexe X on rappelle qu'un chemin de \bar{x} vers \bar{y} est un isomorphisme entre les foncteurs fibres en \bar{x} et \bar{y} de la catégorie des revêtements étales de X vers la catégorie des ensembles finis. Soient, pour $i = 1, 2$, \bar{x}_i et \bar{y}_i des points géométriques de X_i et γ_i un chemin de \bar{x}_i vers \bar{y}_i . On alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_{\bar{x}_1 \times \bar{x}_2} & \xrightarrow{\gamma_1} & T_{\bar{y}_1 \times \bar{x}_2} \\ \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_2 \\ T_{\bar{x}_1 \times \bar{y}_2} & \xrightarrow{\gamma_1} & T_{\bar{y}_1 \times \bar{y}_2} \end{array}$$

où les flèches sont obtenues en appliquant le lemme 8.8 à $X_1 \times \bar{x}_2$, $X_1 \times \bar{y}_2$, $\bar{x}_1 \times X_2$, $\bar{y}_1 \times X_2$. Il reste à montrer que ce diagramme est commutatif. On note X_2^ν le normalisé de X_2 . Comme X_2 est affine, intègre et de type fini, le morphisme de X_2^ν vers X_2 est fini (corollaire 13.13 de [Eis95]) et évidemment surjectif. Il suffit de montrer l'énoncé en supposant de plus que γ_2 se relève en un chemin sur X_2^ν . En effet parmi les chemins de \bar{x}_2 vers \bar{y}_2 (avec la topologie profinie) les chemins pouvant être coupés en chemins qui se relèvent à X_2^ν sont denses. Cela est équivalent au fait que le morphisme $X_2^\nu \rightarrow X_2$ est de descente pour la catégorie fibrée des schémas étales sur des X_2 -schémas, d'après le corollaire 3.3 de l'exposé IX de [SGA1] (en fait la descente est même effective d'après le théorème 4.7 de loc. cit. mais on n'en a pas besoin).

Par conséquent il suffit de montrer la commutativité du diagramme ci-dessus lorsque X_2 est intègre, normal et de type fini. Dans ce cas, en notant $\bar{\eta}_{X_2}$ un point géométrique au-dessus du point générique η_{X_2} , on sait que $\pi_1(X_2, \bar{\eta}_{X_2})$ est un quotient du groupe de Galois du corps de fractions $\pi_1(\eta_{X_2}, \bar{\eta}_{X_2})$. Donc le lemme 8.10 implique que $(T, F_{\{1\}}, F_{\{2\}})$ provient d'une action de $\pi_1(X_1, \bar{z}_1) \times \pi_1(X_2, \bar{z}_2)$ sur un ensemble fini (car un revêtement étale de $X_1 \times X_2$ est déterminé par sa restriction à $X_1 \times \eta_{X_2}$). On voit alors que le diagramme ci-dessus est commutatif. \square

Fin de la démonstration du lemme 8.2. On fixe une bijection $I = \{1, \dots, k\}$ et on applique le lemme précédent avec $X_i = U$ pour tout i . \square

Lemme 8.12 (Drinfeld, proposition 6.1 de [Dri87b] et Eike Lau, lemme 9.2.1 de [Lau04]). *Soit Ω un ouvert dense de X^I et \mathfrak{E} un \mathcal{O}_E -faisceau lisse (constructible) sur Ω muni d'une action des morphismes de Frobenius partiels, c'est-à-dire d'isomorphismes $F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^*(\mathfrak{E})|_{\eta^I} \simeq \mathfrak{E}|_{\eta^I}$ commutant entre eux et dont la composée est l'isomorphisme naturel $\text{Frob}_{\eta^I}^*(\mathfrak{E}) \simeq \mathfrak{E}$. Alors il existe un ouvert dense U de X tel que \mathfrak{E} s'étende en un \mathcal{O}_E -faisceau lisse sur U^I .*

Démonstration. Soit $\widetilde{\Omega}$ le plus grand ouvert de X^I tel que \mathfrak{E} s'étende en un \mathcal{O}_E -faisceau lisse sur $\widetilde{\Omega}$. Alors le complémentaire de $\widetilde{\Omega}$ est un fermé strict de X^I , invariant par l'action des morphismes de Frobenius partiels $\text{Frob}_{\{i\}}$ de X^I . D'après le lemme 9.2.1 de [Lau04] ce fermé strict est inclus dans une réunion finie de diviseurs verticaux (c'est-à-dire des images inverses d'un point fermé par l'une des projections $X^I \rightarrow X$). Pour la commodité du lecteur on rappelle la preuve de ce lemme de Eike Lau. Soit $Z \subset X^I$ un fermé irréductible de dimension $k < \sharp I$. On considère les degrés de ses projections vers X^J où J parcourt l'ensemble des parties de I de cardinal k . Les morphismes de Frobenius partiels multiplient ces degrés par des puissances de q , d'où l'on déduit que si deux au moins sont non nuls alors l'orbite de Z suivant les morphismes de Frobenius partiels est infinie. Mais si un seul de ces degrés est non nul, correspondant à une partie $J \subset I$, alors Z est vertical relativement à toutes les projections vers les coordonnées dans $I \setminus J$. Il existe donc un ouvert dense $U \subset X$ tel que $\widetilde{\Omega} \supset U^I$. \square

Corollaire 8.13. *L'équivalence de catégories du lemme 8.2 fournit un foncteur (dépendant seulement du choix de $\overline{\eta}$)*

- de la catégorie des \mathcal{O}_E -faisceaux constructibles \mathfrak{E} sur η^I , munis d'une action des morphismes de Frobenius partiels, et admettant un prolongement à un certain ouvert dense Ω de X^I ,
- vers la catégorie des représentation continues de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ dans un \mathcal{O}_E -module de type fini, se factorisant par $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ pour un certain ouvert dense U de X ,

et ce foncteur est une équivalence de catégories.

Démonstration. Cela résulte des lemmes 8.2 et 8.12. Plus précisément le lemme 8.12 implique que \mathfrak{E} se prolonge en un faisceau lisse $\widetilde{\mathfrak{E}}$ sur un ouvert de la forme U^I et le lemme 8.2 fournit une action de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ sur $\widetilde{\mathfrak{E}}|_{\Delta(\overline{\eta})}$. \square

Remarque 8.14. Dans les notations de la démonstration précédente, le choix de \mathfrak{sp} fournit un isomorphisme $\widetilde{\mathfrak{E}}|_{\Delta(\overline{\eta})} \xrightarrow{\text{sp}^*} \widetilde{\mathfrak{E}}|_{\eta^I} = \mathfrak{E}|_{\eta^I}$, donc $\mathfrak{E}|_{\eta^I}$ est muni d'une action de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ dépendant du choix de \mathfrak{sp} .

Le lemme suivant sera utilisé ultérieurement (dans la preuve du lemme 10.4).

Lemme 8.15. *Soit $v \in |X|$. Soit I un ensemble fini et $\iota \in I$ un élément. On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. Soit $d \in \mathbb{N}$, et $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$ tel que $\deg(\gamma) = d$. On définit $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ en posant $\gamma_i = \gamma$ et $\gamma_i = 1$ pour $i \neq \iota$. On fixe un point géométrique \overline{v} au-dessus de v et une flèche de spécialisation $\mathfrak{sp}_v : \overline{\eta} \rightarrow \overline{v}$ associés au choix du plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. Plus précisément \overline{v} est le spectre du corps résiduel de l'extension maximale non ramifiée de F_v dans \overline{F}_v et \mathfrak{sp}_v vient de l'inclusion de l'hensélisé strict de F en \overline{v} dans $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. On note encore \mathfrak{sp}_v la flèche de spécialisation de $\Delta(\overline{\eta})$ vers $\Delta(\overline{v})$ égale à l'image par Δ de cette dernière. Soit \mathfrak{E} un faisceau comme dans le lemme 8.2, c'est-à-dire lisse sur un ouvert de la forme U^I et muni d'actions des morphismes de Frobenius partiels.*

On note $j^I : U^I \rightarrow X^I$ l'inclusion. Alors on a la commutativité du diagramme

$$\begin{CD}
 (j^I)_* \mathfrak{E} |_{\Delta(\bar{v})} @>{\mathrm{sp}_v^*}>> \mathfrak{E} |_{\Delta(\bar{\eta})} \\
 @V{F_{\{\iota\}}^{\mathrm{deg}(v)d}}VV @VV{(\gamma_i)_{i \in I}}V \\
 (j^I)_* \mathfrak{E} |_{\Delta(\bar{v})} @>{\mathrm{sp}_v^*}>> \mathfrak{E} |_{\Delta(\bar{\eta})}
 \end{CD}$$

où la flèche verticale de droite est l'action de $\pi_1(U, \bar{\eta})^I$ sur $\mathfrak{E} |_{\Delta(\bar{\eta})}$ donnée par le lemme 8.2.

Remarque 8.16. Dans l'énoncé précédent on ne suppose pas que v appartient à U .

Démonstration. Il suffit de le montrer avec \mathfrak{E} de la forme $\boxtimes_{i \in I} \mathfrak{E}_i$ (comme dans l'énoncé du lemme 8.2). Alors, en notant $j : U \rightarrow X$ l'inclusion, on a $(j^I)_* \mathfrak{E} |_{\Delta(\bar{v})} = \otimes_{i \in I} (j_* \mathfrak{E}_i |_{\bar{v}})$. On est donc ramené à montrer le lemme dans le cas où I est un singleton, et alors cela résulte de la définition de $\mathrm{deg} : \mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v) \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}(v)/k(v))$ par restriction de l'action sur l'extension non ramifiée maximale et sur son corps résiduel. \square

Remarque 8.17. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\bar{\eta}^I}$ induit une équivalence entre la catégorie des \mathcal{O}_E -faisceaux (*resp.* E -faisceaux) constructibles sur η^I et la catégorie des représentations continues de $\pi_1(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ sur des \mathcal{O}_E -modules de type fini (*resp.* E -espaces vectoriels de dimension finie). L'image inverse par $\mathrm{Frob}_{\{i\}}$ est une auto-équivalence de la catégorie des \mathcal{O}_E -faisceaux (*resp.* E -faisceaux) constructibles sur η^I . Si \mathcal{F} est muni d'une action des morphismes de Frobenius partiels, et si $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}_{\bar{\eta}^I}$ est une sous- $\pi_1(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ -représentation, et \mathcal{G} le sous-faisceau de \mathcal{F} sur η^I tel que $\mathcal{M} = \mathcal{G}_{\bar{\eta}^I}$, on dira que \mathcal{M} est stable par les morphismes de Frobenius partiels si c'est le cas de \mathcal{G} .

Remarque 8.18. On va définir un groupe $\mathrm{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ qui

- est une extension de \mathbb{Z}^I par $\mathrm{Ker}(\pi_1(\eta^I, \bar{\eta}^I) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}})$,
- lorsque I est un singleton, s'identifie au groupe de Weil usuel

$$\mathrm{Weil}(\eta, \bar{\eta}) = \pi_1(\eta, \bar{\eta}) \times_{\widehat{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z},$$

- lorsque $\sharp I = 2$, est le groupe noté $\mathrm{FGal}(\bar{K}/K)$ dans le paragraphe 4.1 de [Dri80], \widehat{W}_Λ dans le théorème 7 de [Kaz79] et $ZW_{F^2}^\eta$ dans le lemme VI.13 de [Laf02a].

On définit

$$\mathrm{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I) = \{ \varepsilon \in \mathrm{Aut}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\bar{F}^I), \exists (n_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I, \varepsilon|_{(F^I)^{\mathrm{perf}}} = \prod_{i \in I} (\mathrm{Frob}_{\{i\}})^{n_i} \}.$$

Comme $\bar{\eta} \times_{\mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \times_{\mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q} \bar{\eta}$, muni du morphisme diagonal

$$\Delta(\bar{\eta}) \rightarrow \bar{\eta} \times_{\mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \times_{\mathrm{Spec} \overline{\mathbb{F}}_q} \bar{\eta},$$

est (à la perfectisation près) une limite projective de voisinages étales $\Delta(\bar{\eta})$ -ponctués de $\Delta(\eta)$ dans X^I , sp fournit une inclusion

$$\bar{F} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \bar{F} \subset \bar{F}^I.$$

En effet $\overline{F} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \overline{F}$ est un anneau intègre: si $Y = \text{Spec} A$ est une courbe affine irréductible sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ munie d'un morphisme quasi-fini vers $X_{\overline{\mathbb{F}}_q}$, alors $A \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} A$ est intègre car c'est l'anneau des fonctions sur la variété irréductible $Y \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \times_{\overline{\mathbb{F}}_q} Y$, et $\overline{F} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \cdots \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \overline{F}$ est la limite inductive de tels anneaux.

Par restriction des automorphismes, on obtient donc un morphisme surjectif

$$(8.3) \quad \text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta}^I) \rightarrow (\text{Weil}(\eta, \overline{\eta}))^I$$

(dépendant du choix de \mathfrak{sp}). Il rend plus explicite l'équivalence de catégories du corollaire 8.13: bien que ce morphisme ne soit pas injectif lorsque $\sharp I > 1$, les deux groupes ont le même complété profini $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ (à strictement parler cette assertion est équivalente au corollaire 8.13 pour les faisceaux de torsion ou si on néglige les conditions avec U et Ω).

Soit W une représentation de dimension finie de $(\widehat{G})^I$. On a une action naturelle de $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta}^I)$ sur $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\eta^I}$ qui réunit l'action de $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta}^I)$ et celle des morphismes de Frobenius partiels. Cependant on ne peut pas appliquer le lemme de Drinfeld à cet espace vectoriel parce qu'il est de dimension infinie et d'autre part on ne peut pas appliquer le lemme de Drinfeld à $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ parce que l'action des morphismes de Frobenius partiels augmente μ .

Il y a une équivalence entre

- les sous- \mathcal{O}_E -faisceaux constructibles de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\eta^I}$ stables par l'action des morphismes de Frobenius partiels,
- les sous- \mathcal{O}_E -modules de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\eta^I}$ stabilisés par l'action de $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta}^I)$

et à de tels objets on peut appliquer le lemme de Drinfeld, c'est-à-dire que l'action de $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta}^I)$ se factorise à travers $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$.

Pour pouvoir appliquer le lemme de Drinfeld, on va définir un sous-espace $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ et montrer qu'il est une limite inductive de sous- \mathcal{O}_E -modules de type fini stabilisés par $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta}^I)$. Par le lemme de Drinfeld, l'action de $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta}^I)$ sur $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}$ se factorisera à travers $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$.

Définition 8.19. Soit \overline{x} un point géométrique de $(X \setminus N)^I$. On dit qu'un élément de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\overline{x}}$ est Hecke-fini s'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes

- il appartient à un sous- \mathcal{O}_E -module \mathfrak{M} de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\overline{x}}$ qui est stable par $T(f)$ pour tout $f \in C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$,
- il vérifie la même condition, et en plus \mathfrak{M} est stable par $\pi_1(x, \overline{x})$.

On note $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\overline{x}} \right)^{\text{Hf}}$ l'ensemble de tous les éléments Hecke-finis. C'est un sous- E -espace vectoriel de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\overline{x}}$ qui est stable par $\pi_1(x, \overline{x})$.

Remarque 8.20. En pratique on appliquera cette définition en des points géométriques \overline{x} dont l'image sur chaque copie de $X \setminus N$ est générique, et dans ce cas la définition ne nécessite pas de connaître l'extension des opérateurs de Hecke $T(f)$ à $(X \setminus N)^I$ tout entier construite dans le corollaire 6.5.

On remarque que $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{x}}\right)^{\text{Hf}}$ est stable par $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$.

Comme les morphismes de création et d'annihilation commutent avec les opérateurs de Hecke, ils préservent les sous-espaces Hecke-finis.

Si \bar{x} et \bar{y} sont deux point géométriques de $(X \setminus N)^I$ et $\mathfrak{sp} : \bar{x} \rightarrow \bar{y}$ est une flèche de spécialisation, l'homomorphisme de spécialisation

$$\mathfrak{sp}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{y}} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{x}}$$

envoie $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{y}}\right)^{\text{Hf}}$ dans $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{x}}\right)^{\text{Hf}}$ (parce que les opérateurs de Hecke sont des morphismes de faisceaux donc commutent avec \mathfrak{sp}^*).

Les sous-espaces Hecke-finis sont également stables sous l'action des morphismes de Frobenius partiels: on a

$$F_{\{i\}} \left(\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\text{Frob}_{\{i\}}(\bar{x})} \right)^{\text{Hf}} \right) \subset \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{x}} \right)^{\text{Hf}}.$$

Ainsi, dans le cas particulier où $\bar{x} = \bar{\eta}^I$,

$$\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}} \subset \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{\eta}^I}$$

est une sous-représentation de $\text{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I)$.

On commence par étudier le cas où $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$. D'après la proposition 2.6 d) (extraite de la proposition 2.16 de [Var04]) $\text{Cht}_{N,\emptyset,\mathbf{1}}^{\{\{0\}\}}/\Xi$ est égal au champ constant $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ sur $\eta^\emptyset = \text{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Donc

$$\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\emptyset,\mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\mathbb{F}_q}} = C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E),$$

où la restriction à $\overline{\mathbb{F}_q}$ dans le membre de gauche a un sens car $\mathcal{H}_{N,\emptyset,\mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E}$ est un faisceau (au demeurant trivial) sur $\eta^\emptyset = \mathbb{F}_q$.

Le cas où I est un singleton et $W = \mathbf{1}$ est essentiellement le même car on a un isomorphisme

$$(8.4) \quad \text{Cht}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{\{\{0\}\}}/\Xi = \left(\text{Cht}_{N,\emptyset,\mathbf{1}}^{\{\{0\}\}}/\Xi \right) \times_{\mathbb{F}_q} (X \setminus N)$$

(qui est à l'origine de l'isomorphisme de coalescence associé à $\zeta_\emptyset : \emptyset \rightarrow \{0\}$). Par conséquent

$$\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\bar{\eta}} = C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$$

et le faisceau $\mathcal{H}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E}$ est en fait constant sur $X \setminus N$.

Remarque 8.21. On a une inclusion évidente

$$(8.5) \quad G(F) \backslash G(\mathbb{A})/K_N \Xi \subset \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi$$

dont l'image est formée exactement par les G -torseurs localement triviaux pour la topologie de Zariski. On rappellera dans la section 12 que si G est un groupe réductif général (non nécessairement déployé), $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi$ est une réunion finie, indexée par $\ker^1(F, G)$, de tels quotients adéliques pour certaines formes intérieures de G (ce qui donne un sens à la notion de fonction cuspidale). Quand G est déployé il s'avère que (8.5) est une bijection car d'après Kottwitz [Kot84, Kot86] (et le théorème

2.6.1 de Nguyen Quoc Thang [TNQ11] pour l'adaptation en caractéristique p), $\ker^1(F, G)$ est le dual de $\ker^1(F, Z_{\widehat{G}}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}))$, qui est nul par le théorème de Tchebotarev dès lors que $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ agit trivialement sur $Z_{\widehat{G}}$. Nous utilisons ce fait de façon extrêmement superficielle : cela nous a permis d'écrire $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$ à la place de $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi$ dans le théorème 0.1, et de rendre ainsi l'introduction plus accessible.

Notation 8.22. Une fonction $f \in C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$ est dite cuspidale si pour tout parabolique $P \subsetneq G$, de Levi M et de radical unipotent U , le terme constant $f_P : g \mapsto \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)$ est nul comme fonction sur $U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$. On rappelle que $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$ est un E -espace vectoriel de dimension finie (voir les références après (12.3)) et stable par $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$. Grâce à l'égalité $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi = G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$ on note $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ comme $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$ (plus généralement pour un groupe non déployé, on fera de même en utilisant la somme finie indexée par des formes intérieures de G).

Proposition 8.23. *L'espace des fonctions cuspidales $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ est exactement le sous-espace $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\emptyset,1}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\mathbb{F}_q}\right)^{\text{Hf}}$ des fonctions Hecke-finies de $C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$.*

Démonstration. On montre d'abord que toute fonction cuspidale est Hecke-finie. On pose

$$C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathcal{O}_E) = C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \cap C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathcal{O}_E).$$

Alors $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathcal{O}_E)$ est un sous- \mathcal{O}_E -module de type fini. Il est stable par tous les opérateurs $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$ car c'est le cas de $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ et de $C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathcal{O}_E)$.

Il reste à montrer que toute fonction Hecke-finie est cuspidale. Cela résulte du lemme suivant. \square

Lemme 8.24. *Soit $v \in |X| \setminus |N|$ et H un sous-espace de dimension finie de $C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$, stable par tous les opérateurs de Hecke en v . Alors H est inclus dans $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$.*

Dans ce lemme et le suivant, l'hypothèse de Hecke-finitude (en v) est au sens E -linéaire, ce qui est évidemment plus faible qu'au sens \mathcal{O}_E -linéaire, mais suffit pour entraîner la cuspidalité.

Démonstration. D'après la remarque 8.21 il suffit de montrer le résultat pour le quotient adélique $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$. Le lemme résulte alors du lemme suivant, qui servira de nouveau lorsqu'on étudiera le cas où G n'est pas déployé. En fait il est inutilement compliqué d'invoquer la remarque 8.21 car il suffirait de dire que $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ est une réunion finie de quotients adéliques pour des formes intérieures de G et d'appliquer le lemme suivant à chacun d'entre eux. \square

Lemme 8.25. *Soit G un groupe réductif sur F et soit $K_N = \prod_{v \in |X|} K_{N,v}$ un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$. On note Z_G le centre de G . Soit Ξ un réseau dans $Z_G(\mathbb{A})/Z_G(F)$. Soit v une place où G est déployé et $K_{N,v} = G(\mathcal{O}_v)$. Soit $H \subset C_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que H est stable par tous les opérateurs de Hecke en v . Alors H est inclus dans $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que H n'est pas inclus dans $C_c^{\text{cusps}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$. Il existe alors un parabolique $P \subsetneq G$, de radical unipotent U , tel que le terme constant $f_P : g \mapsto \int_{U(F)\backslash U(\mathbb{A})} f(ug)$ ne s'annule pas identiquement pour $f \in H$. Soit M un sous-groupe de Levi de P . On rappelle que pour tout $f \in H$, f_P est une fonction localement constante sur $U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$. Soit S le tore déployé maximal de la partie connexe du centre Z_M de M . D'après (i) de la proposition 20.6 de [Bor91], M est égal au centralisateur de S dans G et d'après la preuve de cette assertion il existe $\mathbb{G}_m \subset S$ agissant sur $\text{Lie}(U)$ par des caractères strictement positifs. On fixe un élément de F_v^* de norme > 1 et on note $a \in S(F_v)$ son image par l'inclusion ci-dessus. Il en résulte que pour tout caractère $\chi : S \rightarrow \mathbb{G}_m$ apparaissant dans l'action de S sur $\text{Lie}(U)$ la norme de $\chi(a) \in F_v^*$ est > 1 . Par conséquent la conjugaison par a^{-1} contracte $U(F_v)$ (au sens où pour tout compact $\mathfrak{W} \subset U(F_v)$ et tout ouvert $\mathfrak{V} \subset U(F_v)$ contenant 1, on a $a^{-n}\mathfrak{W}a^n \subset \mathfrak{V}$ pour n assez grand). On en déduit que pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $f \in H$ et pour tout $n \geq n_0$, $f_P(a^n g) = f(a^n g)$. En effet on fixe un domaine fondamental compact $\mathfrak{U} = \prod_w \mathfrak{U}_w$ pour l'action de $U(F)$ sur $U(\mathbb{A})$, tel que, pour tout $w \neq v$, \mathfrak{U}_w est un sous-groupe ouvert compact de $U(F_w)$ inclus dans $gK_{N,w}g^{-1}$. Alors pour n assez grand on a $a^{-n}\mathfrak{U}_v a^n \subset gK_{N,v}g^{-1}$, et donc $a^{-n}\mathfrak{U}a^n \subset gK_Ng^{-1}$. En notant du la mesure sur \mathfrak{U} provenant de la mesure de Haar sur $U(F)\backslash U(\mathbb{A})$, on a donc

$$f_P(a^n g) = \int_{u \in \mathfrak{U}} f(ua^n g) du = \int_{u \in \mathfrak{U}} f(a^n g(g^{-1}a^{-n}ua^n g)) du = f(a^n g)$$

où la dernière égalité résulte du fait que f est invariante à droite par K_N .

Comme tout $f \in H$ est à support compact (c'est-à-dire à support fini) sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$ et que H est de dimension finie, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $f \in H$ et pour tout $n \geq n_0$, $f(a^n g) = 0$. En effet quand n tend vers l'infini $a^n g$ sort de toute partie finie de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$. En effet, quitte à augmenter N il suffit de le montrer pour $g = 1$. On fixe un plongement $\iota : G^{\text{ad}} \hookrightarrow SL_r$. Comme $\mathbb{G}_m \subset S$ agit non trivialement par conjugaison il n'est pas inclus dans Z_G , donc, à un quotient près par un μ_m , il se plonge dans SL_r . Par conséquent le point de $\text{Bun}_{SL_r}(\mathbb{F}_q)$ associé à $\iota(a^n)$ sort de toute partie finie quand n tend vers l'infini (car le polygône de Harder-Narasimhan associé sort de tout ensemble fini de polygônes de Harder-Narasimhan).

On déduit des deux faits précédents que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $f \in H$ et pour tout $n \geq n_0$, $f_P(a^n g) = 0$.

On a une action naturelle de $M(\mathbb{A})$ sur $U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K_N$ par translation à gauche. Donc il existe un point $g_1 \in U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K_N$ de stabilisateur K' (sous-groupe ouvert compact de $M(\mathbb{A})$) tel que la restriction f'_P de f_P à la $M(\mathbb{A})$ -orbite passant par ce point, c'est-à-dire à l'image de l'inclusion

$$M(F)\backslash M(\mathbb{A})/K'\Xi \subset U(\mathbb{A})M(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \quad m \mapsto mg_1,$$

soit non identiquement nulle pour au moins un $f \in H$. On a

$$U(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K_N = \prod_w U(F_w)\backslash G(F_w)/K_{N,w}$$

et le facteur en $w = v$ est égal à $M(F_v)/M(\mathcal{O}_v)$, donc quitte à multiplier g_1 à gauche par un élément de $M(F_v)$ on peut supposer que K' contient $M(\mathcal{O}_v)$, ce que l'on fait désormais. On fixe un tel g_1 et on le relève en $g_1 \in G(\mathbb{A})$.

On sait que l'algèbre de Hecke sphérique pour M en v est un module de type fini sur l'algèbre de Hecke sphérique pour G en v (par exemple parce que l'anneau des représentations de \widehat{M} est un module de type fini sur l'anneau des représentations de \widehat{G}). Donc la Hecke-finitude pour G en v implique la Hecke-finitude pour M en v et donc l'espace des f'_P pour $f \in H$ peut être inclus dans un sous-espace de dimension finie de $C(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/K'\Xi, E)$ stable par $C_c(M(\mathcal{O}_v)\backslash M(F_v)/M(\mathcal{O}_v), E)$. Ces opérateurs de Hecke contiennent comme cas particuliers les translations par $Z_M(F_v)/Z_M(\mathcal{O}_v)$, et donc en particulier par $S(F_v)/S(\mathcal{O}_v)$.

Soit $m_1 \in M(\mathbb{A})$ tel qu'il existe $f \in H$ tel que $f'_P(m_1)$ ne soit pas nul. Pour tout $f \in H$, on note f''_P la fonction $n \mapsto f'_P(a^n m_1) = f_P(a^n m_1 g_1)$ qui appartient donc à l'espace $C^-(\mathbb{Z}, E)$ des fonctions $k : \mathbb{Z} \rightarrow E$ telles que $k(n) = 0$ pour n assez grand. Sur $C^-(\mathbb{Z}, E)$ on a l'opérateur de translation T tel que $T(f) : n \mapsto f(n+1)$. L'image de H par $f \mapsto f''_P$ est donc un sous- E -espace non nul de $C^-(\mathbb{Z}, E)$ et on sait qu'il peut être inclus dans un sous- E -espace de dimension finie stable par T . On aboutit à une contradiction car pour tout élément non nul $k \in C^-(\mathbb{Z}, E)$ on montre (en considérant le maximum de son support) que les $T^n(k)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ sont linéairement indépendants et engendrent donc un espace vectoriel de dimension infinie. \square

Remarque 8.26. En fait f_P et f'_P sont supportés sur les composantes indexées par un translaté d'un cône dans le dual du réseau des caractères de M/Z_G , qui s'identifie (après tensorisation par \mathbb{Q}) au réseau des cocaractères de S/Z_G . Ce cône est engendré par les opposées des projections des coracines associées à U sur le réseau des cocaractères de S/Z_G (tensorisé par \mathbb{Q}). Lorsque G est déployé cela est montré dans le lemme 5.3.1 de [Wan17].

La proposition suivante jouera un rôle crucial dans la construction des opérateurs d'excursion qui sera l'objet de la prochaine section.

On a vu que le E -espace vectoriel $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\overline{\eta^I}}\right)^{\text{Hf}}$ est stable sous l'action de $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta^I})$ et des morphismes de Frobenius partiels. Autrement dit il est stable sous l'action de $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta^I})$.

Proposition 8.27. *L'action de $\text{FWeil}(\eta^I, \overline{\eta^I})$ sur $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\overline{\eta^I}}\right)^{\text{Hf}}$ se factorise (de façon unique) à travers $(\pi_1(\eta, \overline{\eta}))^I$.*

De plus tout sous- \mathcal{O}_E -module \mathfrak{M} de type fini de $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\overline{\eta^I}}\right)^{\text{Hf}}$ est inclus dans un sous- \mathcal{O}_E -module $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de type fini stable par $(\pi_1(\eta, \overline{\eta}))^I$ (ou de façon équivalente stable par $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta^I})$ et par les morphismes de Frobenius partiels) et l'action de $(\pi_1(\eta, \overline{\eta}))^I$ sur $\widetilde{\mathfrak{M}}$ se factorise à travers $(\pi_1(U, \overline{\eta}))^I$ pour un ouvert dense $U \subset X$ (dépendant a priori de $\widetilde{\mathfrak{M}}$, donc de \mathfrak{M}).

Remarque 8.28. On peut exprimer cette action de $(\pi_1(\eta, \overline{\eta}))^I$ sur $\widetilde{\mathfrak{M}}$ de façon plus géométrique: il existe

- un objet $(\mathfrak{E}, (F_{\{i\}})_{i \in I})$ de la catégorie $\mathcal{C}(U, I, \mathcal{O}_E)$ définie dans le lemme 8.2,
- un copoids dominant μ_1 , un ouvert dense $\Omega_1 \subset U^I$ sur lequel $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu_1,E}$ est lisse, et une injection $\iota_1 : \mathfrak{E}|_{\Omega_1} \hookrightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu_1,E}|_{\Omega_1}$ de \mathcal{O}_E -faisceaux lisses sur Ω_1 ,

tels que

- $\iota_1|_{\eta^I}$ est compatible avec l'action des morphismes de Frobenius partiels sur $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$,
- $\iota_1|_{\eta^I} : \mathfrak{E}|_{\eta^I} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$ est une injection de \mathcal{O}_E -modules, dont l'image est $\widetilde{\mathfrak{M}}$,
- l'action de $(\pi_1(U, \overline{\eta}))^I$ sur $\mathfrak{E}|_{\eta^I}$ (et donc sur $\widetilde{\mathfrak{M}}$ par l'intermédiaire de $\iota_1|_{\eta^I}$) se déduit de l'équivalence de catégories du corollaire 8.13.

On ne sait pas si l'on peut espérer que ci-dessus on puisse avoir $\Omega_1 = U^I$. Heureusement on n'en a pas besoin.

Remarque 8.29. Dans [Xue17], Cong Xue a montré que $(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I})^{\text{Hf}}$ est de dimension finie, mais la preuve est difficile (et écrite seulement pour G déployé) et on ne l'utilise pas dans cet article.

Démonstration de la proposition 8.27. Il suffit de montrer l'énoncé pour W irréductible. On écrit $W = \boxtimes_{i \in I} W_i$.

On fixe κ assez grand (en fonction de W) pour que l'action des morphismes de Frobenius partiels soit donnée par des morphismes

$$(8.6) \quad F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}) \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu+\kappa,E}$$

de E -faisceaux constructibles sur $(X \setminus N)^I$, pour tout μ .

Soit \mathfrak{M} un sous- \mathcal{O}_E -module de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$, stable par $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta^I})$ et $C_c(K_N \setminus G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$. Comme \mathfrak{M} est de type fini, il existe $\check{\mu}$ tel que \mathfrak{M} est inclus dans l'image de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\check{\mu},E}|_{\eta^I}$ dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$. On choisit $\mu_0 \geq \check{\mu}$ assez grand pour que cette image soit égale à l'image de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\check{\mu},E}|_{\eta^I}$ dans $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\eta^I}$. Alors \mathfrak{M} est canoniquement un sous- \mathcal{O}_E -module de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\eta^I}$. On note \mathfrak{E} le sous- \mathcal{O}_E -faisceau (sur η^I) de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\eta^I}$ tel que $\mathfrak{E}|_{\eta^I} = \mathfrak{M}$. Alors, pour tout $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$,

$$\prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{n_i} \left(\left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i} \right)^*(\mathfrak{E}) \right)$$

est un sous- \mathcal{O}_E -faisceau de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0+(\sum_{i \in I} n_i)\kappa,E}|_{\eta^I}$.

Soit $\widetilde{\mathfrak{M}}$ la somme sur $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ des sous- \mathcal{O}_E -représentations de $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta^I})$ dans le E -espace vectoriel $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$ données par les

$$\left(\prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{n_i} \left(\left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i} \right)^*(\mathfrak{E}) \right) \right)|_{\eta^I}.$$

Lemme 8.30. *Le \mathcal{O}_E -module $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est de type fini et est réalisé comme un sous- \mathcal{O}_E -module de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\tilde{\mu}_0,E}|_{\eta^I}$ pour $\tilde{\mu}_0$ assez grand. De plus le sous- \mathcal{O}_E -faisceau \mathfrak{E} de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\tilde{\mu}_0,E}|_{\eta^I}$ tel que $\mathfrak{E}|_{\eta^I} = \widetilde{\mathfrak{M}}$ est stable par l'action des morphismes de Frobenius partiels dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\eta^I}$, et les $F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^*(\mathfrak{E}) \rightarrow \mathfrak{E}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration du lemme 8.30. Il suffit de montrer que $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est de type fini comme \mathcal{O}_E -module. En effet la stabilité de \mathfrak{E} par les actions des morphismes de Frobenius

partiels vient de la construction même de $\widetilde{\mathfrak{M}}$ et les $F_{\{i\}} : \text{Frob}_{\{i\}}^*(\widetilde{\mathfrak{G}}) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{G}}$ sont alors des isomorphismes car leur produit dans n'importe quel ordre est l'action du morphisme de Frobenius global.

Il reste donc à montrer que $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est de type fini. Soit μ_0 comme ci-dessus, c'est-à-dire tel que \mathfrak{G} se réalise comme un sous- \mathcal{O}_E -faisceau de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\eta^I}$. Soit Ω_0 un ouvert non vide de $(X \setminus N)^I$ sur lequel $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}$ est lisse. On prolonge \mathfrak{G} de manière unique en un sous- \mathcal{O}_E -faisceau de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_0,E}|_{\Omega_0}$, que l'on note encore \mathfrak{G} , et qui est donc un \mathcal{O}_E -faisceau lisse constructible sur Ω_0 tel que $\mathfrak{G}|_{\eta^I} = \mathfrak{M}$.

Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de points fermés de $X \setminus N$, on note $\times_{i \in I} v_i$ leur produit, qui est une réunion finie de points fermés de $(X \setminus N)^I$. Par récurrence sur $\#I$ on montre que tout ouvert dense de X^I contient un tel produit $\times_{i \in I} v_i$. On fixe $(v_i)_{i \in I}$ tel que $\times_{i \in I} v_i$ soit inclus dans Ω_0 .

Soit $i \in I$. D'après la relation d'Eichler-Shimura en v_i (proposition 7.1), on a

$$\sum_{\alpha=0}^{\dim W_i} (-1)^\alpha (F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^\alpha \circ S_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i} = 0 \quad \text{dans} \quad \text{End} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\times_{i \in I} v_i} \right).$$

Par conséquent

$$(8.7) \quad (F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^{\dim W_i} (\mathfrak{G}|_{\times_{i \in I} v_i}) \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i - 1} (F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^\alpha (S_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i} (\mathfrak{G}|_{\times_{i \in I} v_i}))$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\times_{i \in I} v_i}$. On va voir que grâce à la lissité de \mathfrak{G} sur Ω_0 cette inclusion se propage à η^I .

On choisit un point géométrique $\overline{\times_{i \in I} v_i}$ au-dessus d'un des points fermés de $\times_{i \in I} v_i$ et une flèche de spécialisation $\mathfrak{sp}_{v,I}$ de η^I vers $\overline{\times_{i \in I} v_i}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la lissité de \mathfrak{G} sur Ω_0 implique la lissité de $(\text{Frob}_{\{i\}}^n)^* \mathfrak{G}$ sur $(\text{Frob}_{\{i\}}^n)^{-1}(\Omega_0)$ qui contient aussi le produit $\times_{i \in I} v_i$, et donc

$$(8.8) \quad \mathfrak{sp}_{v,I}^* : (\text{Frob}_{\{i\}}^n)^* \mathfrak{G} \Big|_{\overline{\times_{i \in I} v_i}} \rightarrow (\text{Frob}_{\{i\}}^n)^* \mathfrak{G} \Big|_{\eta^I} \quad \text{est bijectif.}$$

En prenant la fibre en $\overline{\times_{i \in I} v_i}$, il résulte de (8.7) que

$$(8.9) \quad (F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^{\dim W_i} ((\text{Frob}_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^{\dim W_i})^* \mathfrak{G} \Big|_{\overline{\times_{i \in I} v_i}} \\ \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i - 1} (F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^\alpha \left((\text{Frob}_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^\alpha \right)^* (S_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i} (\mathfrak{G})) \Big|_{\overline{\times_{i \in I} v_i}} \Big)$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\times_{i \in I} v_i}}$. Comme $F_{\{i\}}$ et $S_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i}$ sont des morphismes de faisceaux, ils commutent avec $\mathfrak{sp}_{v,I}^*$. En appliquant (8.8) à $n = \text{deg}(v_i) \dim(W_i)$ on obtient

$$(F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^{\dim W_i} ((\text{Frob}_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^{\dim W_i})^* \mathfrak{G} \Big|_{\eta^I} \\ \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i - 1} (F_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^\alpha \left((\text{Frob}_{\{i\}}^{\text{deg}(v_i)})^\alpha \right)^* (S_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i} (\mathfrak{G})) \Big|_{\eta^I}$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I}$. Par l'hypothèse et la proposition 6.2, \mathfrak{M} et donc $\mathfrak{G}|_{\eta^I}$ sont stables par les morphismes $S_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i}$, puisque

$$h_{\Lambda^{\dim W_i - \alpha} W_i, v_i} \in C_c(G(\mathcal{O}_{v_i}) \backslash G(F_{v_i}) / G(\mathcal{O}_{v_i}), \mathcal{O}_E) \subset C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, \mathcal{O}_E).$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} & (F_{\{i\}}^{\deg(v_i)})^{\dim W_i} ((\mathrm{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i) \dim W_i})^* \mathfrak{G}|_{\overline{\eta^I}}) \\ & \subset \sum_{\alpha=0}^{\dim W_i - 1} (F_{\{i\}}^{\deg(v_i)})^\alpha ((\mathrm{Frob}_{\{i\}}^{\deg(v_i)\alpha})^* \mathfrak{G}|_{\overline{\eta^I}}) \end{aligned}$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}}$. Il en résulte que

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \sum_{(n_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0, \dots, \deg(v_i) \dim(W_i) - 1\}} \prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{n_i} \left(\prod_{i \in I} (\mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i})^* (\mathfrak{G})|_{\overline{\eta^I}} \right)$$

et donc $\widetilde{\mathfrak{M}}$ est un sous- \mathcal{O}_E -module de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}}$, inclus dans l'image de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0 + (\sum_{i \in I} (\deg(v_i) \dim W_i - 1))\kappa, E}|_{\overline{\eta^I}}$ (et stable par $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$). \square

Fin de la démonstration de la proposition 8.27. D'après le lemme 8.30 il existe $\tilde{\mu}_0$, un ouvert $\tilde{\Omega}_0 \subset X^I$ tel que $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \tilde{\mu}_0, E}|_{\tilde{\Omega}_0}$ soit lisse sur $\tilde{\Omega}_0$, et $\tilde{\mathfrak{G}}$ s'étend en un sous- \mathcal{O}_E -faisceau lisse sur $\tilde{\Omega}_0$ tel que $\tilde{\mathfrak{G}}|_{\overline{\eta^I}} = \widetilde{\mathfrak{M}}$. De plus $\tilde{\mathfrak{G}}$ est muni d'une action des morphismes de Frobenius partiels, plus précisément pour tout i on a un isomorphisme

$$F_{\{i\}}^* : \mathrm{Frob}_{\{i\}}^* (\tilde{\mathfrak{G}})|_{\tilde{\Omega}_0 \cap \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{-1}(\tilde{\Omega}_0)} \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}|_{\tilde{\Omega}_0 \cap \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{-1}(\tilde{\Omega}_0)}$$

compatible avec l'action des morphismes de Frobenius partiels sur $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}}$. Le lemme 8.12 implique qu'il existe un ouvert dense $U \subset X \setminus N$ tel que $(\tilde{\mathfrak{G}}, (F_{\{i\}})_{i \in I})$ s'étende à U^I et fournisse un objet de la catégorie $\mathcal{C}(U, I, \mathcal{O}_E)$. Le corollaire 8.13 fournit alors l'action de $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ sur $\widetilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{G}}|_{\overline{\eta^I}}$. \square

Proposition 8.31. *L'image de l'homomorphisme de spécialisation*

$$(8.10) \quad \mathrm{sp}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\Delta(\overline{\eta})} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}}$$

contient $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}} \right)^{\mathrm{Hf}}$.

Démonstration de la proposition 8.31. D'après la proposition 8.27, $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}} \right)^{\mathrm{Hf}}$ est la réunion de sous- \mathcal{O}_E -modules $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}|_{\overline{\eta^I}}$ où \mathfrak{G} est un sous- \mathcal{O}_E -faisceau constructible de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}|_{\overline{\eta^I}}$ stable sous l'action des morphismes de Frobenius partiels (pour éviter toute confusion on signale que les \mathfrak{M} comme ci-dessus étaient notés $\widetilde{\mathfrak{M}}$ dans l'énoncé de la proposition 8.27). Il suffit donc de montrer qu'un tel \mathfrak{M} est inclus dans l'image de (8.10). Soit μ_0 assez grand pour que \mathfrak{G} soit un sous- \mathcal{O}_E -faisceau de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E}|_{\overline{\eta^I}}$. Soit Ω_0 un ouvert dense de X^I tel que $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E}|_{\Omega_0}$ soit lisse. Alors \mathfrak{G} se prolonge en un sous- \mathcal{O}_E -faisceau lisse de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E}|_{\Omega_0}$. D'après le lemme 9.2.1 de [Lau04] (dont l'argument a été rappelé dans la preuve du lemme 8.12), l'ensemble des $(\prod_{i \in I} \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i})(\Delta(\eta))$ pour $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ est Zariski dense dans X^I . Il existe donc $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ tel que $(\prod_{i \in I} \mathrm{Frob}_{\{i\}}^{n_i})(\Delta(\eta))$ appartienne à Ω_0 .

Alors $\mathfrak{G} \left|_{\left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\overline{\eta^I})}\right.$ est inclus dans l'image de

$$(8.11) \quad \tilde{\mathfrak{sp}}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\Delta(\overline{\eta}))}\right. \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\overline{\eta^I})}\right.$$

pour toute flèche de spécialisation

$$\tilde{\mathfrak{sp}} : \left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\overline{\eta^I}) \rightarrow \left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}\right)(\Delta(\overline{\eta})).$$

On prend pour $\tilde{\mathfrak{sp}}$ l'image de \mathfrak{sp} par $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}$. D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{(\prod \text{Frob})(\Delta(\overline{\eta}))} & \xrightarrow{(8.11)} & \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{(\prod \text{Frob})(\overline{\eta^I})} & \longleftarrow & \mathfrak{G} \left|_{(\prod \text{Frob})(\overline{\eta^I})} \\ \downarrow \prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{n_i} & & \downarrow \prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{n_i} & & \downarrow \wr \\ \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\overline{\eta})} & \xrightarrow{(8.10)} & \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\overline{\eta^I}} & \longleftarrow & \mathfrak{G} \left|_{\overline{\eta^I}} \end{array}$$

où $(\prod \text{Frob})$ est un raccourci pour $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{n_i}$. La bijectivité de la flèche verticale la plus à droite vient du fait que \mathfrak{G} est stable par l'action des morphismes de Frobenius partiels. On conclut que $\mathfrak{M} = \mathfrak{G} \left|_{\overline{\eta^I}}\right.$ est inclus dans l'image de (8.10). \square

Proposition 8.32. *L'homomorphisme de spécialisation*

$$(8.12) \quad \mathfrak{sp}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\overline{\eta})} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\overline{\eta^I}}\right.$$

est injectif.

Démonstration. Soit a dans le noyau de (8.12). On choisit μ_0 et $\tilde{a} \in \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E} \left|_{\Delta(\overline{\eta})}\right.$ tels que a soit l'image de \tilde{a} dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\overline{\eta})}\right.$. Soit Ω_0 un ouvert dense de $X \setminus N$ sur lequel $\Delta^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E})$ est lisse. Soit $v \in |\Omega_0|$. On pose $d = \deg(v)$ pour raccourcir les formules. Soit \bar{v} un point géométrique au-dessus de v . Soit $\mathfrak{sp}_v : \overline{\eta} \rightarrow \bar{v}$ une flèche de spécialisation. On note encore $\mathfrak{sp}_v : \Delta(\overline{\eta}) \rightarrow \Delta(\bar{v})$ la flèche de spécialisation qui s'en déduit. Grâce à la lissité de $\Delta^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E})$ sur Ω_0 on possède un unique élément $\tilde{b} \in \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E} \left|_{\Delta(\bar{v})}\right.$ tel que $\tilde{a} = \mathfrak{sp}_v^*(\tilde{b})$. On note b l'image de \tilde{b} dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\bar{v})}\right.$, de sorte que a est l'image de b par

$$\mathfrak{sp}_v^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\bar{v})} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\overline{\eta})}\right.$$

L'action des morphismes de Frobenius partiels fournit pour tout μ et pour tout $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ un morphisme de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$

$$(8.13) \quad \prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{dn_i} : \left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}\right)^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}) \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu + \kappa(\sum n_i), E}$$

avec κ assez grand en fonction de W et de d . Comme $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}$ agit trivialement sur $\Delta(v)$, $\prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{dn_i}$ agit sur $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\bar{v})}\right.$.

Pour tout $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ on note

$$b_{(n_i)_{i \in I}} = \prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{dn_i}(b) \in \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \left|_{\Delta(\bar{v})}\right.$$

En particulier $b_{(0)_{i \in I}} = b$.

On pose

$$(8.14) \quad a_{(n_i)_{i \in I}} = \mathbf{sp}_v^*(b_{(n_i)_{i \in I}}) \in \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{\eta})},$$

de sorte que $a_{(0)_{i \in I}} = a$.

La suite $a_{(n_i)_{i \in I}}$ vérifie les deux propriétés énoncées dans le lemme suivant. La première affirme que cette suite est “multirécurrenente”, c’est-à-dire récurrente en chaque variable n_i , et la seconde implique qu’elle est “presque partout” nulle. On déduira aisément de la conjonction des deux propriétés que cette suite est partout nulle, et donc en particulier que $a = a_{(0)_{i \in I}}$ est nul.

Pour énoncer la seconde propriété on remarque que $\mathbf{sp}^*(\mathbf{sp}_v^*(b)) = \mathbf{sp}^*(a) = 0$ dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\eta^I}$. Donc il existe $\mu_1 \geq \mu_0$ tel que $\mathbf{sp}^*(\mathbf{sp}_v^*(\hat{b})) \in \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_0, E} |_{\eta^I}$ ait une image nulle dans $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E} |_{\eta^I}$. Autrement dit en notant \hat{b} l’image de \tilde{b} dans $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E} |_{\Delta(\bar{v})}$, on a $\mathbf{sp}^*(\mathbf{sp}_v^*(\hat{b})) = 0$ dans $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E} |_{\eta^I}$. Soit $\Omega_1 \subset (X \setminus N)^I$ un ouvert dense sur lequel $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E}$ est lisse.

Lemme 8.33. a) Pour tout $j \in I$ et pour tout $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$,

$$(8.15) \quad \sum_{\alpha=0}^{\dim W_j} (-1)^\alpha S_{\Lambda^{\dim W_j - \alpha} W_{j,v}}(a_{(n_i + \alpha \delta_{i,j})_{i \in I}}) = 0$$

dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{\eta})}$.

b) Pour tout $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ tel que $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}(\Delta(\bar{\eta})) \in \Omega_1$, on a $a_{(n_i)_{i \in I}} = 0$ dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{\eta})}$.

Démonstration de a). Les $b_{(n_i)_{i \in I}}$ satisfont une relation identique à (8.15) (dans $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{v})}$), à savoir la relation d’Eichler-Shimura en la patte j (proposition 7.1). Alors (8.15) s’obtient en appliquant \mathbf{sp}_v^* à cette relation (ce qui est légitime puisque les $S_{\Lambda^{\dim W_j - \alpha} W_{j,v}}$ sont des morphismes de faisceaux). \square

Démonstration de b). Soit $(n_i)_{i \in I}$ satisfaisant l’hypothèse de b). Comme (8.13) est un morphisme de faisceaux sur $(X \setminus N)^I$, on peut intervertir les homomorphismes de spécialisation et les morphismes de Frobenius partiels. Autrement dit on a un diagramme commutatif

$$\begin{CD} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E} |_{\Delta(\bar{v})} = (\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i})^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E}) |_{\Delta(\bar{v})} @>{\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}}>> \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{v})} \\ @V{\mathbf{sp}_{v, (n_i)_{i \in I}}^*}VV @VV{\mathbf{sp}_v^*}V \\ (\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i})^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E}) |_{\Delta(\bar{\eta})} @>{\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}}>> \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\bar{\eta})} \end{CD}$$

où la notation $\mathbf{sp}_{v, (n_i)_{i \in I}}^*$ indique que l’homomorphisme de spécialisation associé à la flèche $\mathbf{sp}_v : \Delta(\bar{\eta}) \rightarrow \Delta(\bar{v})$ est appliqué au faisceau $(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i})^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu_1, E})$ (et

non pas à $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E}$). Le diagramme précédent donne lieu à

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{b} & \xrightarrow{\prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{dn_i}} & b_{(n_i)_{i \in I}} \\
 \downarrow \mathfrak{sp}_{v,(n_i)_{i \in I}}^* & & \downarrow \mathfrak{sp}_v^* \\
 \mathfrak{sp}_{v,(n_i)_{i \in I}}^*(\widehat{b}) & \xrightarrow{\prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{dn_i}} & a_{(n_i)_{i \in I}}
 \end{array}$$

Donc pour montrer $a_{(n_i)_{i \in I}} = 0$ (et terminer ainsi la preuve de b)) il suffit de montrer que

(8.16)

$$\mathfrak{sp}_{v,(n_i)_{i \in I}}^*(\widehat{b}) \in \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E} \Big|_{(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i})(\Delta(\overline{\eta}))} = \left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i} \right)^* (\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E}) \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}$$

est nul. Or (8.16) peut aussi être considéré comme l'image de \widehat{b} par un homomorphisme de spécialisation pour le faisceau $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E}$ mais associé à une flèche de spécialisation $(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i})(\Delta(\overline{\eta})) \rightarrow \Delta(\overline{v})$. On en déduit que (8.16) est nul car

- $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}(\Delta(\overline{\eta}))$ appartient à Ω_1 par hypothèse,
- pour tout point géométrique \overline{x} de Ω_1 et toute flèche de spécialisation $\mathfrak{sp}_{\overline{x}} : \overline{x} \rightarrow \Delta(\overline{v})$, $\mathfrak{sp}_{\overline{x}}^*(\widehat{b})$ s'annule dans $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E} \Big|_{\overline{x}}$.

Cette dernière assertion résulte du fait que $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E}$ est lisse sur Ω_1 et que l'image de \widehat{b} par tout homomorphisme de spécialisation vers $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu_1,E} \Big|_{\overline{\eta^I}}$ est nulle (puisque c'est le cas de $\mathfrak{sp}_{\overline{x}}^*(\mathfrak{sp}_v^*(\widehat{b}))$ et que $\pi_1(\eta^I, \overline{\eta^I})$ agit transitivement sur les flèches de spécialisation de $\overline{\eta^I}$ vers $\Delta(\overline{v})$). □

Fin de la démonstration de la proposition 8.32. Comme $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}$ est le Frobenius total, $\prod_{i \in I} F_{\{i\}}^{dn}$ agit de façon bijective sur $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}$ et envoie $a_{(n_i)_{i \in I}}$ sur $a_{(n_i+n)_{i \in I}}$. De ceci et du a) du lemme 8.33 on déduit facilement que pour montrer que $a = a_{(0)_{i \in I}}$ est nul (et même que toute la suite $a_{(n_i)_{i \in I}}$ est nulle) il suffit de trouver $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ tel que

$$a_{(n_i+\alpha_i)_{i \in I}} = 0 \text{ pour tout } (\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0, \dots, \dim W_i - 1\}.$$

Or cela est possible d'après le b) du lemme 8.33, car on peut trouver $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$ tel que

$$\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{d(n_i+\alpha_i)}(\Delta(\overline{\eta})) \in \Omega_1 \text{ pour tout } (\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0, \dots, \dim W_i - 1\}.$$

En effet la densité de l'ouvert Ω_1 implique la densité de l'ouvert

$$\bigcap_{(\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \{0, \dots, \dim W_i - 1\}} \left(\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{d\alpha_i} \right)^{-1} (\Omega_1)$$

et les $\prod_{i \in I} \text{Frob}_{\{i\}}^{dn_i}(\Delta(\overline{\eta}))$ sont Zariski-denses lorsque $(n_i)_{i \in I}$ parcourt \mathbb{N}^I . Ceci termine la preuve de la proposition 8.32. □

Les propositions 8.31 et 8.32 entraînent le corollaire suivant.

Corollaire 8.34. *L'homomorphisme de spécialisation*

$$(8.17) \quad \mathbf{sp}^* : \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \rightarrow \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}$$

est une bijection.

Démonstration. L'injectivité résulte de la proposition 8.32. Voici la preuve de la surjectivité. Soit $c \in \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}$. D'après la proposition 8.31 il existe $a \in \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}$ tel que $\mathbf{sp}^*(a) = c$. L'injectivité de \mathbf{sp}^* montrée dans la proposition 8.32 implique que a est Hecke-fini. \square

9. OPÉRATEURS D'EXCURSION

Soit I un ensemble fini et W une représentation de $(\widehat{G})^I$. Soit $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de \widehat{G} . Soit $(\gamma_i)_{i \in I} \in (\pi_1(\eta, \overline{\eta}))^I$. On va rappeler (d'une façon un peu différente) la construction des opérateurs d'excursion

$$S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}} \in \text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)}(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E))$$

qui a déjà été expliquée dans l'introduction.

On rappelle que l'on possède le morphisme de création

$$\mathcal{C}_x^\# : C_c(\text{Bun}_{G,N}^{\leq\mu,E}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \boxtimes E_{X \setminus N} \rightarrow \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(X \setminus N)}$$

qui est un morphisme de E -faisceaux constructibles sur $X \setminus N$. En le restreignant à $\overline{\eta}$ et en passant à la limite inductive sur μ on obtient le morphisme

$$(9.1) \quad \mathcal{C}_x^\# : C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}.$$

On rappelle que ce morphisme est la composée

$$\begin{aligned} C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) &= \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\eta}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{H}(x)} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},W^{\zeta_I}}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\eta}} \xrightarrow{\chi_{\zeta_I}^{-1}} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}, \end{aligned}$$

D'après la proposition 8.23 il envoie $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ dans

$$\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}}.$$

De même on rappelle que l'on possède le morphisme d'annihilation

$$\mathcal{C}_\xi^b : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(X \setminus N)} \rightarrow C_c(\text{Bun}_{G,N}^{\leq\mu}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \boxtimes E_{X \setminus N}$$

qui est un morphisme de E -faisceaux constructibles sur $X \setminus N$. En le restreignant à $\overline{\eta}$ et en passant à la limite inductive sur μ on obtient le morphisme

$$\mathcal{C}_\xi^b : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \rightarrow C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E).$$

On rappelle que ce morphisme est la composée

$$\begin{aligned} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} &\xrightarrow{\chi_{\zeta_I}} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},W^{\zeta_I}}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\eta}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{H}(\xi)} \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\overline{\eta}} = C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E). \end{aligned}$$

Il envoie $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right)^{\text{Hf}}$ sur $C_c^{\text{cusp}}((\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E))$. Enfin, d'après le corollaire 8.34, on a un isomorphisme

$$(9.2) \quad \mathfrak{sp}^* : \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\sim} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I}\right)^{\text{Hf}}.$$

On rappelle que la proposition 8.27 munit le membre de droite de (9.2) d'une action de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ (dépendant du choix de \mathfrak{sp}). Dans le lemme 9.4 ci-dessous on justifiera le fait (déjà expliqué dans l'introduction) que l'action de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ sur le membre de gauche de (9.2) qui s'en déduit ne dépend du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp} . Donc la construction suivante ne dépend pas du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp} .

Définition-Proposition 9.1. *On définit l'opérateur d'excursion $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ comme la composée*

$$(9.3) \quad \begin{aligned} C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) &\xrightarrow{\mathcal{C}_x^\sharp} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right)^{\text{Hf}} \\ &\xrightarrow{\mathfrak{sp}^*} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I}\right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{(\gamma_i)_{i \in I}} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I}\right)^{\text{Hf}} \\ &\xrightarrow{(\mathfrak{sp}^*)^{-1}} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\mathcal{C}_\xi^b} C_c^{\text{cusp}}((\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)). \end{aligned}$$

Alors $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ appartient à

$$(9.4) \quad \text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)}(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)).$$

De plus il existe un ouvert dense $U \subset X \setminus N$ (dépendant seulement de I, W et N) tel que

- $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ dépend seulement de l'image de $(\gamma_i)_{i \in I}$ dans $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$,
- $(\gamma_i)_{i \in I} \mapsto S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ est continu du groupe profini $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ vers la E -algèbre de dimension finie (9.4) munie de la topologie E -adique.

Démonstration. L'opérateur $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ commute avec les opérateurs de Hecke $T(f)$ pour $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$ car c'est le cas de tous les morphismes apparaissant dans sa définition. Enfin $\mathfrak{sp}^*(\mathcal{C}_x^\sharp(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)))$ est un sous- E -espace vectoriel de dimension finie de $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I}\right)^{\text{Hf}}$, donc par la proposition 8.27 il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que la dernière assertion soit vérifiée. \square

On va donner dans la remarque suivante une caractérisation de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ indépendante du fait que \mathfrak{sp}^* est un isomorphisme sur les parties Hecke-finies (par le corollaire 8.34). Dans la version 4 de cet article sur arXiv (où l'on savait seulement que l'image \mathfrak{sp}^* contenait la partie Hecke-finie) cela était vraiment utilisé dans la construction de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$, alors que maintenant ce n'est plus qu'une remarque.

Remarque 9.2. Grâce à la remarque 5.4 on a pour tout μ un morphisme de faisceaux

$$\mathfrak{B}_{N,I,W}^{\Xi,E} : \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \otimes \mathcal{H}_{N,I,W^*,\theta}^{0,\leq\mu,E} \rightarrow E_{(X \setminus N)^I}.$$

En particulier il fournit des formes bilinéaires

$$(9.5) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Delta(\overline{\eta})} : \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W^*,\theta}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right) \otimes \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}\right) \rightarrow E$$

et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\eta^I} : \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W^*,\theta}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I} \right) \otimes \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I} \right) \rightarrow E$$

telles que

$$(9.6) \quad \langle \mathbf{sp}^*(a), \mathbf{sp}^*(b) \rangle_{\eta^I} = \langle a, b \rangle_{\Delta(\bar{\eta})} \text{ pour } a \otimes b \text{ dans le membre de gauche de (9.5).}$$

De la même façon que (9.1), on définit

$$\mathcal{C}_{\xi}^{\sharp} : C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W^*,\theta}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})}.$$

D'après la remarque 5.4, pour tout

$$\delta \in \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \text{ et } \check{h} \in C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E),$$

on a

$$(9.7) \quad \langle \mathcal{C}_{\xi}^{\sharp}(\check{h}), \delta \rangle_{\Delta(\bar{\eta})} = \int_{\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi} \check{h} \mathcal{C}_{\xi}^b(\delta).$$

Soit $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de \widehat{G} ,

$$(\gamma_i)_{i \in I} \in (\pi_1(\eta, \bar{\eta}))^I, h \in C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \text{ et } \check{h} \in C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E).$$

Alors

$$(9.8) \quad \int_{\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi} \check{h} S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}(h)$$

$$\stackrel{(9.3)}{=} \int_{\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi} \check{h} \left(\mathcal{C}_{\xi}^b \left((\mathbf{sp}^*)^{-1} \left((\gamma_i)_{i \in I} \cdot (\mathbf{sp}^*(\mathcal{C}_x^{\sharp}(h))) \right) \right) \right)$$

$$\stackrel{(9.7)}{=} \langle \mathcal{C}_{\xi}^{\sharp}(\check{h}), (\mathbf{sp}^*)^{-1} \left((\gamma_i)_{i \in I} \cdot (\mathbf{sp}^*(\mathcal{C}_x^{\sharp}(h))) \right) \rangle_{\Delta(\bar{\eta})}$$

$$(9.9) \quad \stackrel{(9.6)}{=} \langle \mathbf{sp}^*(\mathcal{C}_{\xi}^{\sharp}(\check{h})), (\gamma_i)_{i \in I} \cdot (\mathbf{sp}^*(\mathcal{C}_x^{\sharp}(h))) \rangle_{\eta^I}.$$

L'égalité entre (9.8) et (9.9) implique que $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ est caractérisé par la forme bilinéaire (9.9) pour $h, \check{h} \in C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$. On remarque de plus que si $(\gamma_i)_{i \in I}$ appartient à $(\text{Weil}(\eta, \bar{\eta}))^I$, et si on le remplace dans (9.9) par un relevé arbitraire dans $\text{FWeil}(\eta^I, \bar{\eta}^I)$ par la surjection (8.3), la caractérisation ci-dessus s'exprime sans même utiliser l'énoncé de la proposition 8.27, ni le lemme 8.2.

On peut résumer la construction de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ sous la forme

$$\star \xrightarrow{\mathcal{C}_x^{\sharp}} \star \xrightarrow{\mathbf{sp}^*} \star \xrightarrow{\gamma} \star \xrightarrow{(\mathbf{sp}^*)^{-1}} \star \xrightarrow{\mathcal{C}_{\xi}^b} \star$$

(avec la notation $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$).

Le reste de cette section est consacré aux propriétés des opérateurs d'excursion, qui sont les mêmes que (0.44), (0.45), (0.46) et (0.47) dans l'introduction.

D'après le corollaire 8.34, la restriction de l'homomorphisme \mathbf{sp}^* aux parties Hecke-finies est un isomorphisme

$$(9.10) \quad \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\mathbf{sp}^*} \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \Big|_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}.$$

Comme dans l'introduction on introduit la notation courte $H_{I,W}$ pour ce E -espace vectoriel (on omet N dans la notation $H_{I,W}$ pour limiter la taille des diagrammes dans la section suivante).

Définition 9.3. On définit $H_{I,W}$ comme le *membre de gauche* de (9.10).

Lemme 9.4. *L'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I = \pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$ sur $H_{I,W}$ fournie par la proposition 8.27 ne dépend pas du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp} .*

Démonstration. En effet on peut reformuler ce qui précède en disant que d'après la proposition 8.27 on peut trouver

- une réunion croissante (indexée par $\lambda \in \mathbb{N}$) de sous- \mathcal{O}_E -faisceaux constructibles $\mathfrak{F}_\lambda \subset \varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\eta^I}$ stables par les morphismes de Frobenius partiels,
- une suite décroissante d'ouverts denses $U_\lambda \subset X \setminus N$ tels que \mathfrak{F}_λ se prolonge en un faisceau lisse sur $(U_\lambda)^I$

de sorte que

$$(9.11) \quad \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\eta^I} = \left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}}.$$

Alors le corollaire 8.34 implique que le morphisme naturel

$$(9.12) \quad H_{I,W} = \left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\Delta(\overline{\eta})}$$

(qui vient de la lissité de \mathfrak{F}_λ sur $(U_\lambda)^I \ni \Delta(\overline{\eta})$) est un isomorphisme. Plus précisément (9.12) est défini comme la composée

$$\left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\mathfrak{sp}^*} \left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\eta^I} \right)^{\text{Hf}} \stackrel{(9.11)}{=} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\eta^I} \xrightarrow{(\mathfrak{sp}^*)^{-1}} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\Delta(\overline{\eta})}$$

où la flèche de gauche est un isomorphisme par le corollaire 8.34 et celle de droite en est un par la lissité de \mathfrak{F}_λ sur $(U_\lambda)^I \ni \Delta(\overline{\eta})$. Comme ces deux flèches sont définies à l'aide du même choix de \mathfrak{sp} , la composée n'en dépend pas.

Or l'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ sur le membre de droite de (9.12), obtenue en appliquant le lemme de Drinfeld (le lemme 8.2) à \mathfrak{F}_λ , ne dépend pas du choix de $\overline{\eta}^I$ et \mathfrak{sp}^* , et donc l'action de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ sur le membre de gauche n'en dépend pas non plus. □

Remarque 9.5. Dans cet article nous montrons seulement que $H_{I,W}$ est une limite inductive de E -espaces vectoriels de dimension finie munis de représentations continues de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$. En fait Cong Xue a montré dans [Xue17] que $H_{I,W}$ est de dimension finie.

Pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, l'isomorphisme de coalescence (0.17) respecte trivialement les parties Hecke-finies et induit donc un isomorphisme

$$(9.13) \quad H_{I,W} = \left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \xrightarrow{\chi_\zeta} \left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,J,W^\zeta}^{0,\leq\mu,E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} = H_{J,W^\zeta}$$

où Δ désigne le morphisme diagonal $X \rightarrow X^I$ ou $X \rightarrow X^J$.

La définition ci-dessous reprend celle déjà donnée dans (0.39) de l'introduction.

Définition 9.6. On définit l’isomorphisme de coalescence

$$\chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta}$$

par (9.13).

L’isomorphisme (9.13) est $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant, où $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ agit sur le membre de gauche par le morphisme diagonal

$$\text{Gal}(\overline{F}/F)^J \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)^I, (\gamma_j)_{j \in J} \mapsto (\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I}.$$

En effet, soit $\Delta_\zeta : X^J \rightarrow X^I$ le morphisme diagonal (0.16). En appliquant le corollaire 8.34 à I et J on voit que, pour toute flèche de spécialisation de $\overline{\eta}^I$ vers $\Delta_\zeta(\overline{\eta}^J)$, le morphisme image inverse $\left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} |_{\Delta_\zeta(\overline{\eta}^J)}\right)^{\text{Hf}} \rightarrow \left(\varinjlim_\mu \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} |_{\overline{\eta}^I}\right)^{\text{Hf}}$ est un isomorphisme. Donc si la suite $(\mathfrak{F}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ est comme ci-dessus relativement à I et W , alors la suite $(\Delta_\zeta^*(\mathfrak{F}_\lambda))_{\lambda \in \mathbb{N}}$ vérifie les mêmes propriétés relativement à J et W^ζ , donc

$$\chi_\zeta : H_{I,W} \stackrel{(9.12)}{\simeq} \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_\lambda |_{\Delta(\overline{\eta})} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} \Delta_\zeta^*(\mathfrak{F}_\lambda) |_{\Delta(\overline{\eta})} \stackrel{(9.12)}{\simeq} H_{J,W^\zeta}$$

est $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant (puisque les actions de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ et $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ sur les termes de gauche et de droite ont été définies en appliquant le lemme de Drinfeld aux termes centraux, et que l’égalité centrale est clairement $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariante).

La proposition suivante est identique à la proposition 0.28.

Proposition 9.7. Les $H_{I,W}$ vérifient les propriétés suivantes :

a) pour tout ensemble fini I ,

$$W \mapsto H_{I,W}, \quad u \mapsto \mathcal{H}(u)$$

est un foncteur E -linéaire de la catégorie des représentations E -linéaires de dimension finie de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des limites inductives de représentations E -linéaires continues de dimension finie de $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$,

b) pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, on possède un isomorphisme

$$\chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta},$$

qui est

– fonctoriel en W , où W est une représentation de $(\widehat{G})^I$ et W^ζ désigne la représentation de $(\widehat{G})^J$ sur W obtenue en composant avec le morphisme diagonal

$$(\widehat{G})^J \rightarrow (\widehat{G})^I, (g_j)_{j \in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i \in I},$$

– $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ -équivariant, où $\text{Gal}(\overline{F}/F)^J$ agit sur le membre de gauche par le morphisme diagonal

$$\text{Gal}(\overline{F}/F)^J \rightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)^I, (\gamma_j)_{j \in J} \mapsto (\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I},$$

– et compatible avec la composition, c’est-à-dire que pour $I \xrightarrow{\zeta} J \xrightarrow{\eta} K$ on a $\chi_{\eta \circ \zeta} = \chi_\eta \circ \chi_\zeta$,

c) pour $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$, on a un isomorphisme

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E).$$

Par ailleurs les $H_{I,W}$ sont des modules sur $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A}) / K_N, E)$, de façon compatible avec les propriétés a), b), c) ci-dessus.

Démonstration de la proposition 9.7. Les propriétés a) et b) ont déjà été expliquées. En appliquant b) à l'application évidente $\zeta_\emptyset : \emptyset \rightarrow \{0\}$, on obtient un isomorphisme

$$(9.14) \quad \chi_{\zeta_\emptyset} : H_{\emptyset, \mathbf{1}} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\}, \mathbf{1}}$$

que l'on connaissait déjà comme conséquence de (8.4). La propriété c) résulte de la proposition 8.23. \square

10. PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS D'EXCURSION

Soit I un ensemble fini et W une représentation E -linéaire de $(\widehat{G})^I$. On note $\zeta_I : I \rightarrow \{0\}$ l'application évidente, si bien que W^{ζ_I} est simplement W muni de l'action diagonale de \widehat{G} . Soit $x : \mathbf{1} \rightarrow W^{\zeta_I}$ et $\xi : W^{\zeta_I} \rightarrow \mathbf{1}$ des morphismes de représentations de \widehat{G} (autrement dit $x \in W$ et $\xi \in W^*$ sont invariants sous l'action diagonale de \widehat{G}). Soit $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$.

Il résulte immédiatement de la définition-proposition 9.1 que l'opérateur d'excursion

$$S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}} \in \text{End}(H_{\{0\}, \mathbf{1}})$$

est égal à la composée

$$(10.1) \quad H_{\{0\}, \mathbf{1}} \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} H_{\{0\}, W^{\zeta_I}} \xrightarrow{\chi_{\zeta_I}^{-1}} H_{I, W} \xrightarrow{(\gamma_i)_{i \in I}} H_{I, W} \xrightarrow{\chi_{\zeta_I}} H_{\{0\}, W^{\zeta_I}} \xrightarrow{\mathcal{H}(\xi)} H_{\{0\}, \mathbf{1}}.$$

C'était la définition qui avait été donnée dans l'introduction. Le lemme 9.4 montre que $S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}}$ ne dépend pas du choix de η^I et \mathfrak{sp}^* .

Le lemme suivant (qui reprend le lemme 0.31 de l'introduction) va résulter des propriétés a) et b) de la proposition 9.7.

Lemme 10.1. *Les opérateurs d'excursion $S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}}$ vérifient les propriétés suivantes :*

$$(10.2) \quad S_{I, W, x, {}^t u(\xi'), (\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I, W', u(x), \xi', (\gamma_i)_{i \in I}}$$

où $u : W \rightarrow W'$ est un morphisme $(\widehat{G})^I$ -équivariant et $x \in W$ et $\xi' \in (W')^*$ sont \widehat{G} -invariants,

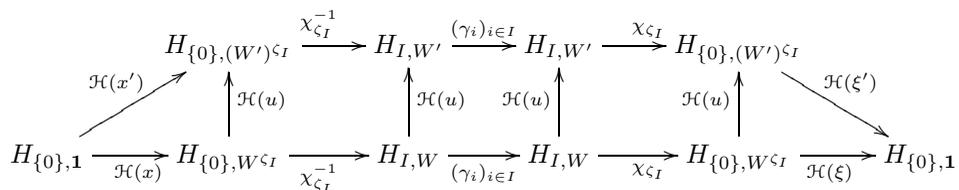
$$(10.3) \quad S_{J, W^\zeta, x, \xi, (\gamma_j)_{j \in J}} = S_{I, W, x, \xi, (\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I}},$$

$$(10.4) \quad S_{I_1 \cup I_2, W_1 \boxtimes W_2, x_1 \boxtimes x_2, \xi_1 \boxtimes \xi_2, (\gamma_i^1)_{i \in I_1} \times (\gamma_i^2)_{i \in I_2}} = S_{I_1, W_1, x_1, \xi_1, (\gamma_i^1)_{i \in I_1}} \circ S_{I_2, W_2, x_2, \xi_2, (\gamma_i^2)_{i \in I_2}},$$

$$(10.5) \quad S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i (\gamma'_i)^{-1} \gamma''_i)_{i \in I}} = S_{I \cup I \cup I, W \boxtimes W^* \boxtimes W, \delta_W \boxtimes x, \xi \boxtimes \text{ev}_W, (\gamma_i)_{i \in I} \times (\gamma'_i)_{i \in I} \times (\gamma''_i)_{i \in I}}$$

où la plupart des notations sont évidentes, $I_1 \cup I_2$ et $I \cup I \cup I$ désignent des réunions disjointes, et $\delta_W : \mathbf{1} \rightarrow W \otimes W^*$ et $\text{ev}_W : W^* \otimes W \rightarrow \mathbf{1}$ sont les morphismes naturels.

Démonstration de (10.2). On pose $x' = u(x) \in W'$ et $\xi = {}^t u(\xi') \in W^*$. Le diagramme



où $\zeta : I \cup I \rightarrow I$ est l'application évidente, et on utilise le fait que $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ agit trivialement sur $H_{I,1} \simeq H_{0,1}$. On prend $\alpha_i = \gamma_i(\gamma'_i)^{-1}$ et $\beta_i = (\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i$. Alors (10.6) est égal à

$$(10.7) \quad S_{I \cup I \cup I, W \boxtimes W^* \boxtimes W, \delta_W \boxtimes x, \xi \otimes \text{ev}_W, (\gamma_i(\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i)_{i \in I} \times (\gamma_i(\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i)_{i \in I} \times (\gamma_i(\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i)_{i \in I}.$$

En appliquant (10.3) à l'application évidente $\zeta : I \cup I \cup I \rightarrow I$, on voit que (10.7) est égal à

$$(10.8) \quad S_{I, W \otimes W^* \otimes W, \delta_W \otimes x, \xi \otimes \text{ev}_W, (\gamma_i(\gamma'_i)^{-1}\gamma''_i)_{i \in I}.$$

Finalement on montre que (10.8) est égal au membre de gauche de (10.5) en appliquant (10.2) à l'injection $(\widehat{G})^I$ -linéaire

$$u : W = \mathbf{1} \otimes W \xrightarrow{\delta_W \otimes \text{Id}_W} W \otimes W^* \otimes W,$$

qui vérifie $\delta_W \otimes x = u(x)$ et ${}^t u(\xi \otimes \text{ev}_W) = \xi$, puisque la composée

$$W \xrightarrow{\delta_W \otimes \text{Id}_W} W \otimes W^* \otimes W \xrightarrow{\text{Id}_W \otimes \text{ev}_W} W$$

est égale à Id_W d'après le lemme de Zorro (6.18). □

Le lemme suivant affirme que les opérateurs de Hecke en les places de $X \setminus N$ sont des cas particuliers d'opérateurs d'excursion. Il sera utilisé pour montrer que la décomposition (0.3) (que nous construirons dans la prochaine section) est compatible avec l'isomorphisme de Satake en les places non ramifiées.

Lemme 10.2. *Soit $v \in |X| \setminus N$. On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. Soit $d \in \mathbb{N}$, et $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$ tel que $\text{deg}(\gamma) = d$. Alors $S_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, 1)}$ dépend seulement de d , et si $d = 1$ il est égal à $T(h_{V,v})$.*

Démonstration. On fixe un point géométrique \overline{v} au-dessus de v et une flèche de spécialisation $\text{sp}_v : \overline{\eta} \rightarrow \overline{v}$, associés au plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$ choisi dans l'énoncé. On note encore sp_v la flèche de spécialisation de $\Delta(\overline{\eta})$ vers $\Delta(\overline{v})$ égale à l'image par Δ de cette dernière. Pour que le diagramme suivant tienne dans la page on pose $I = \{1, 2\}$ et $W = V \boxtimes V^*$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) & & \\
 \downarrow \text{e}_{\delta_V}^{\sharp} \Big|_{\overline{v}} & \searrow \text{e}_{\delta_V}^{\sharp} & \\
 \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{v})} \right)^{\text{Hf}} & \xrightarrow{\text{sp}_v^*} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} = H_{I,W} \\
 \downarrow F_{\{1\}}^{\text{deg}(v)d} & & \downarrow (\gamma, 1) \\
 \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{v})} \right)^{\text{Hf}} & \xrightarrow{\text{sp}_v^*} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} = H_{I,W} \\
 \downarrow \text{e}_{\text{ev}_V}^{\flat} \Big|_{\overline{v}} & \swarrow \text{e}_{\text{ev}_V}^{\flat} & \\
 C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) & &
 \end{array}$$

la commutativité des triangles est évidente, et celle du grand rectangle résulte du lemme suivant appliqué à $\iota = 1$ dans $I = \{1, 2\}$. On en déduit que $S_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, 1)}$ (qui par construction est la composée suivant le chemin

le plus à droite) est égal à la composée donnée par la colonne de gauche. Par conséquent il dépend seulement de d , et par la proposition 6.2 il est égal à $T(h_{V,v})$ si $d = 1$. \square

Remarque 10.3. Par un calcul formel d’algèbre tensorielle, on peut déterminer les opérateurs $S_{\{1,2\},V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, 1)}$ pour des valeurs arbitraires de $\text{deg}(\gamma)$. Ils s’expriment comme des combinaisons des $T(h_{W,v})$ pour W irréductible et ils n’apportent donc aucune information supplémentaire.

Lemme 10.4. *Soit $v \in |X| \setminus N$. Soit I un ensemble fini et $\iota \in I$ un élément. On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. Soit $d \in \mathbb{N}$, et $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$ tel que $\text{deg}(\gamma) = d$. On définit $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ en posant $\gamma_\iota = \gamma$ et $\gamma_i = 1$ pour $i \neq \iota$. On fixe un point géométrique \overline{v} au-dessus de v et une flèche de spécialisation $\text{sp}_v : \overline{\eta} \rightarrow \overline{v}$ associés au choix du plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. On note encore sp_v la flèche de spécialisation de $\Delta(\overline{\eta})$ vers $\Delta(\overline{v})$ égale à l’image par Δ de cette dernière. Alors on a la commutativité du diagramme*

$$\begin{CD}
 \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{v})} \right)^{\text{Hf}} @> \text{sp}_v^* >> \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} @= H_{I,W} \\
 @VV F_{\{\iota\}}^{\text{deg}(v)d} V @. @VV (\gamma_i)_{i \in I} V \\
 \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{v})} \right)^{\text{Hf}} @> \text{sp}_v^* >> \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} @= H_{I,W}
 \end{CD}$$

Démonstration. On va utiliser les deux faits généraux suivants. Soit Ω un ouvert dense d’un schéma Y de type fini sur \mathbb{F}_q . On note $i : \Omega \rightarrow Y$ l’inclusion et on désigne par i_* l’image directe non dérivée.

- 1) Si \mathcal{L} est un système local ℓ -adique sur Y , le morphisme d’adjonction $\mathcal{L} \rightarrow i_* i^*(\mathcal{L}) = i_*(\mathcal{L}|_{\Omega})$ est un isomorphisme de faisceaux sur Y .
- 2) Si $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ sont deux systèmes locaux ℓ -adiques sur Ω et si $\text{sp} : \overline{x} \rightarrow \overline{y}$ est une flèche de spécialisation dans Y d’un point géométrique \overline{x} de Ω vers un point géométrique \overline{y} de Y , alors le morphisme $(i_*(\mathcal{L}_1))_{\overline{y}} \rightarrow (i_*(\mathcal{L}_2))_{\overline{y}}$ est injectif et son image est formée exactement des éléments $a \in (i_*(\mathcal{L}_2))_{\overline{y}}$ tels que $\text{sp}^*(a) \in (\mathcal{L}_2)_{\overline{x}}$ appartienne à $(\mathcal{L}_1)_{\overline{x}}$.

Ces deux assertions se montrent pour des faisceaux de torsion puis, en passant à la limite, pour des faisceaux ℓ -adiques.

On commence maintenant la démonstration. On rappelle que l’on peut trouver une réunion croissante (indexée par $\lambda \in \mathbb{N}$) de sous- \mathcal{O}_E -faisceaux constructibles $\mathfrak{F}_{\lambda} \subset \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\eta^I}$ stables par les morphismes de Frobenius partiels et une suite décroissante d’ouverts denses $U_{\lambda} \subset X \setminus N$ tels que \mathfrak{F}_{λ} se prolonge en un faisceau lisse (encore noté \mathfrak{F}_{λ}) sur $(U_{\lambda})^I$, de sorte que (9.11) et (9.12) soient vrais.

Soit $a \in \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{v})} \right)^{\text{Hf}}$. On fixe λ tel que, via l’isomorphisme (9.12), $\mathcal{F}_{\lambda} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})}$ contienne $\text{sp}_v^*(a)$. On fixe μ tel que \mathfrak{F}_{λ} soit un sous-faisceau lisse de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ sur un ouvert Ω où celui-ci est lisse. Quitte à restreindre Ω on suppose qu’il est inclus dans $(U_{\lambda})^I$.

On note $j^I : U^I \rightarrow X^I$ et $j_{\Omega} : \Omega \rightarrow X^I$ les inclusions ouvertes. On fixe une flèche de spécialisation sp de $\overline{\eta}^I$ vers $\Delta(\overline{\eta})$ et on note sp'_v la flèche de spécialisation de $\overline{\eta}^I$

vers $\Delta(\bar{v})$ égale à la composée de \mathfrak{sp} et de \mathfrak{sp}_v . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (j^I)_*(\mathcal{F}_\lambda)|_{\Delta(\bar{v})} & & \\
 \parallel & \searrow^{(\mathfrak{sp}'_v)^*} & \\
 (j\Omega)_*(\mathcal{F}_\lambda|_\Omega)|_{\Delta(\bar{v})} & \xrightarrow{(\mathfrak{sp}'_v)^*} & \mathcal{F}_\lambda|_{\bar{\eta}^I} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (j\Omega)_*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_\Omega)|_{\Delta(\bar{v})} & \xrightarrow{(\mathfrak{sp}'_v)^*} & \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\bar{\eta}^I}
 \end{array}$$

La flèche verticale en haut à gauche est bien une égalité : en effet en appliquant 1) à $\mathcal{L} = \mathfrak{F}_\lambda$ et à l'inclusion $i : \Omega \rightarrow (U_\lambda)^I$ on obtient l'égalité (de faisceaux sur $(U_\lambda)^I$) $\mathfrak{F}_\lambda = i_*(\mathcal{F}_\lambda|_\Omega)$ et on remarque que $j\Omega = j^I \circ i$. L'injectivité des $(\mathfrak{sp}'_v)^*$ découle du fait que \mathcal{F}_λ et $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}$ sont lisses sur Ω . On a un morphisme d'adjonction

$$(10.9) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E} \rightarrow (j\Omega)_*(j\Omega)^*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}) = (j\Omega)_*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_\Omega).$$

On note encore $a \in (j\Omega)_*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_\Omega)|_{\Delta(\bar{v})}$ l'image de a par la fibre en $\Delta(\bar{v})$ du morphisme (10.9). Par hypothèse $(\mathfrak{sp}'_v)^*(a) \in \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\bar{\eta}^I}$ est l'image d'un élément $b \in \mathcal{F}_\lambda|_{\bar{\eta}^I}$. Comme on l'a rappelé en détails dans la preuve du lemme 9.4, l'action de $(\gamma_i)_{i \in I}$ sur $\mathfrak{sp}_v^*(a) \in H_{I,W}$ (ou sur $(\mathfrak{sp}'_v)^*(a) \in \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_{\bar{\eta}^I}\right)^{\text{Hf}}$ qui est son image par \mathfrak{sp}^*) est donnée par l'application du lemme de Drinfeld à \mathcal{F}_λ . Plus précisément c'est l'action de $(\gamma_i)_{i \in I}$ sur $b \in \mathcal{F}_\lambda|_{\bar{\eta}^I}$. En appliquant 2) à $Y = X^I$, $\bar{x} = \bar{\eta}^I$, $\bar{y} = \Delta(\bar{v})$, $\mathcal{L}_1 = \mathfrak{F}_\lambda|_\Omega$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_\Omega$ on voit qu'il existe un unique $c \in (j\Omega)_*(\mathcal{F}_\lambda|_\Omega)|_{\Delta(\bar{v})}$ dont l'image par $(\mathfrak{sp}'_v)^*$ est b et dont l'image dans $(j\Omega)_*(\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,E}|_\Omega)|_{\Delta(\bar{v})}$ est a . De plus $F_{\{\iota\}}^{\text{deg}(v)d}(a)$ est l'image de $F_{\{\iota\}}^{\text{deg}(v)d}(c)$ (où $F_{\{\iota\}}$ est ici le morphisme de Frobenius partiel pour \mathcal{F}_λ). En appliquant le lemme 8.15 à $\mathcal{E} = \mathcal{F}_\lambda$ et à c on obtient finalement la commutativité du diagramme. \square

Notation 10.5. On note \mathcal{B} la sous- E -algèbre de

$$\text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)}(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E))$$

engendrée par tous les opérateurs d'excursion $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ (elle dépend bien sûr de N, Ξ et E). D'après (10.4), \mathcal{B} est commutative. Elle est évidemment de dimension finie. D'après le lemme 10.2 elle contient tous les opérateurs de Hecke en les places de $X \setminus N$.

Les fonctions

$$(10.10) \quad f : (g_i)_{i \in I} \mapsto \langle \xi, (g_i)_{i \in I} \cdot x \rangle$$

que l'on obtient en faisant varier W, x , et ξ sont exactement les fonctions régulières sur le quotient grossier de $(\widehat{G}_E)^I$ par les actions par translation à gauche et à droite de \widehat{G}_E diagonal, que l'on notera $\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E$.

Le lemme suivant reprend le lemme 0.33 de l'introduction.

Lemme 10.6. *L'opérateur $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ dépend seulement de I, f , et $(\gamma_i)_{i \in I}$, où f est donnée par (10.10).*

Démonstration. Soit W, x, ξ comme précédemment et soit $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$ donnée par (10.10). On note W_f le sous- E -espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{O}((\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$ engendré les translatées à gauche de f par $(\widehat{G}_E)^I$. On pose $x_f = f \in W_f$ et on note ξ_f la forme linéaire sur W_f donnée par l'évaluation en $1 \in (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E$. Alors W_f est un sous-quotient de W : si W_x est la sous- $(\widehat{G}_E)^I$ -représentation de W engendrée par x , W_f est le quotient de W_x par la plus grande sous- $(\widehat{G}_E)^I$ -représentation E -linéaire sur laquelle ξ s'annule. On a alors les diagrammes

$$W \xleftarrow{\alpha} W_x \xrightarrow{\beta} W_f, \quad x \xleftarrow{\alpha} x \xrightarrow{\beta} x_f, \quad \xi \xrightarrow{t_\alpha} \xi|_{W_x} \xleftarrow{t_\beta} \xi_f$$

de $(\widehat{G}_E)^I$ -représentations, de vecteurs \widehat{G}_E -invariants et de formes linéaires \widehat{G}_E -invariantes. En appliquant (10.2) à $u = \alpha$ et $u = \beta$, on obtient

$$S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I, W_x, x, \xi|_{W_x}, (\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I, W_f, x_f, \xi_f, (\gamma_i)_{i \in I}}.$$

Cela montre que $S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}}$ dépend seulement de I, f , et $(\gamma_i)_{i \in I}$. □

Notation 10.7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$ on pose

$$(10.11) \quad S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}} \in \mathcal{B}$$

où W, x, ξ sont tels que f satisfasse (10.10).

Grâce aux notations 10.5 et 10.7, la proposition suivante (qui reprend la proposition 0.36 de l'introduction) reformule de façon plus synthétique toutes les propriétés des opérateurs d'excursion, et servira de référence dans la section suivante.

Proposition 10.8. *Les opérateurs d'excursion $S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}}$ vérifient les propriétés suivantes:*

(i) *Pour tout I et $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^I$,*

$$f \mapsto S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}}$$

est un morphisme d'algèbres commutatives $\mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E) \rightarrow \mathcal{B}$,

(ii) *Pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, tout $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$ et tout $(\gamma_j)_{j \in J} \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^J$, on a*

$$S_{J, f^\zeta, (\gamma_j)_{j \in J}} = S_{I, f, (\gamma_{\zeta(i)})_{i \in I}}$$

où $f^\zeta \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^J / \widehat{G}_E)$ est définie par

$$f^\zeta((g_j)_{j \in J}) = f((g_{\zeta(i)})_{i \in I}),$$

(iii) *Pour tout $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$ et $(\gamma_i)_{i \in I}, (\gamma'_i)_{i \in I}, (\gamma''_i)_{i \in I}$ dans $\text{Gal}(\overline{F}/F)^I$ on a*

$$S_{I \cup I \cup I, \tilde{f}, (\gamma_i)_{i \in I} \times (\gamma'_i)_{i \in I} \times (\gamma''_i)_{i \in I}} = S_{I, f, (\gamma_i (\gamma'_i)^{-1} \gamma''_i)_{i \in I}}$$

où $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^{I \cup I \cup I} / \widehat{G}_E)$ est définie par

$$\tilde{f}((g_i)_{i \in I} \times (g'_i)_{i \in I} \times (g''_i)_{i \in I}) = f((g_i (g'_i)^{-1} g''_i)_{i \in I}).$$

(iv) *Pour tout I et $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$, il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}}$ dépend seulement de l'image de $(\gamma_i)_{i \in I}$ dans $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$, et $(\gamma_i)_{i \in I} \mapsto S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}}$ est continue du groupe profini $\pi_1(U, \overline{\eta})^I$ vers la E -algèbre de dimension finie \mathcal{B} munie de la topologie E -adique.*

(v) Soit $v \in |X| \setminus N$. Soit V une représentation E -linéaire irréductible de \widehat{G} . Soit $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \setminus (\widehat{G}_E)^{\{1,2\}} / \widehat{G}_E)$ la fonction $(g, g') \mapsto \chi_V(gg'^{-1})$, où χ_V désigne le caractère de V . On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$, qui induit donc un plongement $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \hookrightarrow \text{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit $d \in \mathbb{N}$. Soit $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ tel que $\text{deg}(\gamma) = d$. Alors $S_{\{1,2\},f,(\gamma,1)}$ dépend seulement de d , et est égal à $T(h_{V,v})$ si $d = 1$.

Démonstration de la proposition 10.8. On déduit (ii) de (10.3). Pour montrer (i) on remarque d'abord que la linéarité de $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ en f se déduit facilement de la linéarité de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ en x et ξ , et pour la multiplicativité on utilise (10.4) et on applique (ii) à l'application évidente $\zeta : I \cup I \rightarrow I$ en remarquant que

$$\langle \xi_1 \boxtimes \xi_2, ((g_i)_{i \in I} \boxtimes (g_i)_{i \in I}) \cdot (x_1 \boxtimes x_2) \rangle = \langle \xi_1, (g_i)_{i \in I} \cdot x_1 \rangle \langle \xi_2, (g_i)_{i \in I} \cdot x_2 \rangle.$$

L'assertion (iii) découle de (10.5), en remarquant que pour $(g_i)_{i \in I}, (g'_i)_{i \in I}$ et $(g''_i)_{i \in I}$ dans $(\widehat{G}_E)^I$ on a

$$\langle \xi \boxtimes \text{ev}_W, ((g_i)_{i \in I} \boxtimes (g'_i)_{i \in I} \boxtimes (g''_i)_{i \in I}) \cdot (\delta_W \boxtimes x) \rangle = \langle \xi, (g_i (g'_i)^{-1} g''_i)_{i \in I} \cdot x \rangle.$$

L'assertion (iv) est incluse dans la définition-proposition 9.1. Enfin l'assertion (v) est une reformulation du lemme 10.2. \square

Remarque 10.9. Pour tout $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$, on a $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I,f,(\gamma_i \gamma)_{i \in I}}$. On le vérifie très facilement à l'aide de la définition des opérateurs d'excursion, ou bien on applique (iii) avec $\gamma'_i = 1$ et $\gamma''_i = \gamma$, puis on applique (ii) aux applications $I \cup I \cup I \rightarrow I \cup \{0\} \cup \{0\}$ et $I \rightarrow I \cup \{0\} \cup \{0\}$. De même on a $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I,f,(\gamma \gamma_i)_{i \in I}}$.

La proposition suivante améliore (iv) de la proposition précédente. Cet énoncé plus fort (qui donnera une preuve plus limpide que dans les versions antérieures de la non-ramification sur $X \setminus N$ des paramètres de Langlands que nous construirons) a été trouvé par Böckle, Harris, Khare et Thorne et sert dans leur preprint [BHKT16].

Proposition 10.10 (Trouvée par Böckle, Harris, Khare et Thorne). *Pour tout I et $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \setminus (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E)$, $S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ dépend seulement de l'image de $(\gamma_i)_{i \in I}$ dans $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})^I$, et $(\gamma_i)_{i \in I} \mapsto S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}}$ est continue du groupe profini $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})^I$ vers la E -algèbre de dimension finie \mathcal{B} munie de la topologie E -adique.*

Démonstration. La démonstration reprend d'abord celle du lemme 0.38 de l'introduction. Soit v une place de $X \setminus N$. On fixe un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$, d'où une inclusion $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit $I_v = \text{Ker}(\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \rightarrow \text{Gal}(\overline{k(v)}/k(v)))$ le groupe d'inertie en v . Alors pour tous I, W, x, ξ , l'image de la composée

$$(10.12) \quad H_{\{0\},1} \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} H_{\{0\},W \wr I} \xrightarrow{\chi_{\xi_I}^{-1}} H_{I,W}$$

est formée d'éléments invariants par $(I_v)^I$. En effet les opérateurs de création sont des morphismes de faisceaux sur $\Delta(X \setminus N)$ tout entier (et en particulier en $\Delta(v)$). Donc on a un triangle commutatif (que l'on avait déjà utilisé dans le lemme 10.2)

$$\begin{array}{ccc} C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) & & \\ \text{e}_{\delta_v}^{\#} \Big|_{\overline{v}} \downarrow & \searrow \text{e}_{\delta_v}^{\#} & \\ \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{v})} \right)^{\text{Hf}} & \xrightarrow{\text{sp}_v^*} & \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\Delta(\overline{\eta})} \right)^{\text{Hf}} = H_{I,W} \end{array}$$

où \mathfrak{sp}_v est la flèche de spécialisation de $\bar{\eta}$ vers $\bar{v} = \text{Spec}(\overline{k(v)})$ associée à l'inclusion $\bar{F} \subset \bar{F}_v$. On applique alors le lemme 10.4 avec $d = 0$ et on en déduit l'invariance par $(I_v)^I$ de l'image de (10.12).

Donc pour $(\gamma_i)_{i \in I} \in \text{Gal}(\bar{F}/F)^I$ et $(\delta_i)_{i \in I} \in (I_v)^I$ on a

$$(10.13) \quad S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i \delta_i)_{i \in I}}.$$

Cela est vrai pour tout plongement $\bar{F} \subset \bar{F}_v$ (en fait, grâce à la remarque 10.9, (10.13) pour un plongement implique (10.13) pour tous les plongements). Or pour tout ouvert $U \subset X \setminus N$, $\pi_1(X \setminus N, \bar{\eta})$ est le quotient topologique de $\pi_1(U, \bar{\eta})$ par le sous-groupe fermé engendré par les I_v pour $v \in (X \setminus N) \setminus U$ et leurs conjugués. \square

11. DÉCOMPOSITION SUIVANT LES PARAMÈTRES DE LANGLANDS

L'idée se résume ainsi : grâce à (9.14) et au c) de la proposition 0.28, on a

$$H_{\{0\},1} = C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E).$$

Pour obtenir la décomposition (0.3) il est donc équivalent de construire (quitte à augmenter E) une décomposition canonique

$$H_{\{0\},1} = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}.$$

Notation 11.1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E)$ la E -algèbre des fonctions régulières sur $(\widehat{G}_E)^n$ qui sont invariantes par conjugaison diagonale, c'est-à-dire telles que $f(hg_1h^{-1}, \dots, hg_nh^{-1}) = f(g_1, \dots, g_n)$ pour tout $h, g_1, \dots, g_n \in \widehat{G}_E$. Hilbert a montré dans [Hil93] que cette E -algèbre est de type fini (voir [MFK94] I.2). Autrement dit $(\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E = \text{Spec}(\mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E))$ est le quotient grossier de $(\widehat{G}_E)^n$ par la conjugaison diagonale par \widehat{G}_E .

Remarque 11.2. En caractéristique 0 (ce qui est notre cas) ces quotients ont été étudiés notamment dans [Pro76, Ric88, Vin96]. L'idée de considérer ces quotients pour étudier les espaces de modules de représentations de groupes (par exemple de groupes discrets de type fini) à valeurs dans des groupes réductifs complexes est ancienne, voir [LM85] et les références incluses dans la dernière partie, en particulier [CM82] I 1.6E qui contient la référence à Poincaré citée dans l'introduction.

On a un isomorphisme

$$(11.1) \quad \beta : (\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E \xrightarrow{\sim} \widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^{\{0, \dots, n\}} / \widehat{G}_E, (g_1, \dots, g_n) \mapsto (1, g_1, \dots, g_n)$$

dont l'inverse est donné par $(g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_n)$. On va reformuler les propriétés des opérateurs d'excursion récapitulées dans la proposition 10.8 à l'aide de ces quotients $(\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E$ et de nouvelles notations. Le passage de l'indexation des quotients $\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^I / \widehat{G}_E$ par des ensembles finis abstraits à l'indexation des quotients $(\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E$ par des entiers est motivé par les deux raisons suivantes: cela évite toute confusion entre les deux sortes de quotients, et la nouvelle façon d'indexer sera plus commode pour la construction des paramètres de Langlands.

L'identification (11.1) induit l'isomorphisme d'algèbres

$$(11.2) \quad \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash (\widehat{G}_E)^{\{0, \dots, n\}} / \widehat{G}_E), f \mapsto f \circ \beta^{-1}.$$

Pour tout groupe profini Γ , on note $C(\Gamma, \mathcal{B})$ l'algèbre des fonctions continues de Γ vers \mathcal{B} muni de la topologie E -adique.

Définition-Proposition 11.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit*

$$\Theta_n : \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E) \rightarrow C(\text{Gal}(\overline{F}/F)^n, \mathcal{B})$$

par

$$(11.3) \quad \Theta_n(f) : (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto S_{\{0, \dots, n\}, f \circ \beta^{-1}, (1, \gamma_1, \dots, \gamma_n)} \in \mathcal{B}.$$

Ces applications ont les propriétés suivantes:

- a) *pour tout n , Θ_n est un morphisme d'algèbres,*
- b) *pour tout n , Θ_n prend ses valeurs dans $C(\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})^n, \mathcal{B})$, et son image est formée de fonctions invariantes par conjugaison diagonale par $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})$,*
- c) *la suite $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est fonctorielle par rapport à toutes les applications entre les ensembles $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ arbitraire, $f \in \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^m // \widehat{G}_E)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^n$, on a*

$$\Theta_n(f^\zeta)((\gamma_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}) = \Theta_m(f)((\gamma_{\zeta(i)})_{i \in \{1, \dots, m\}})$$

où $f^\zeta \in \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E)$ est définie par

$$f^\zeta((g_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}) = f((g_{\zeta(i)})_{i \in \{1, \dots, m\}}),$$

- d) *pour $n \geq 1$, $f \in \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^{n+1}$ on a*

$$\Theta_{n+1}(\widehat{f})(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) = \Theta_n(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n \gamma_{n+1})$$

où $\widehat{f} \in \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^{n+1} // \widehat{G}_E)$ est définie par

$$\widehat{f}(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_1, \dots, g_n g_{n+1}),$$

- e) *pour toute représentation E -linéaire irréductible V de \widehat{G} , de caractère $\chi_V \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E // \widehat{G}_E)$, pour toute place $v \in |X| \setminus N$, et pour tout élément de Frobenius $\text{Frob}_v \in \pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})$, on a $\Theta_1(\chi_V)(\text{Frob}_v) = T(h_{V,v})$.*

Remarque 11.4. La propriété e) ne dépend pas du choix de l'élément Frob_v car, par b), pour $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E // \widehat{G}_E)$, $\Theta_1(f)$ est une fonction centrale sur $\text{Gal}(\overline{F}/F)$.

Remarque 11.5. La remarque 10.9 implique que tous les opérateurs d'excursion apparaissent dans (11.3) et donc en considérant la suite $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on ne perd pas d'information.

Démonstration de la définition-proposition 11.3. La propriété a) est simplement (i) de la proposition 10.8 et b) résulte de la proposition 10.10 et de la remarque 10.9. Pour démontrer c) on applique (ii) de la proposition 10.8 à $I = \{0, \dots, m\}$, $J = \{0, \dots, n\}$ et $\zeta : I \rightarrow J$ égal à l'extension de $\zeta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ par $\zeta(0) = 0$. Pour justifier d), on applique la propriété (iii) de la proposition 10.8 à

$$I = \{0, \dots, n\}, (\gamma_i)_{i \in I} = (1, \gamma_1, \dots, \gamma_n), (\gamma'_i)_{i \in I} = (1)_{i \in I}, (\gamma''_i)_{i \in I} = (1, \dots, 1, \gamma_{n+1})$$

et on utilise (ii) de la proposition 10.8 pour supprimer tous les 1 sauf le premier dans $(\gamma_i)_{i \in I} \times (\gamma'_i)_{i \in I} \times (\gamma''_i)_{i \in I}$. Enfin e) est une simple reformulation de (v) de la proposition 10.8 dans le cas où $d = 1$ (on ne retient que ce cas car c'est le seul qui sera utilisé). □

On rappelle que \mathcal{B} est de dimension finie. On remplace E par une extension finie telle que tous les caractères $\mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ prennent leurs valeurs dans E . Pour tout caractère $\nu : \mathcal{B} \rightarrow E$ on pose

$$\Theta_n^\nu = \nu \circ \Theta_n : \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E) \rightarrow C(\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})^n, E).$$

Evidemment la donnée des Θ_n^ν est équivalente à celle de

$$\Theta_n^{\text{red}} : \mathcal{O}((\widehat{G}_E)^n // \widehat{G}_E) \rightarrow C(\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})^n, \mathcal{B}^{\text{red}}).$$

Remarque 11.6. On ne sait pas si \mathcal{B} est réduite. La sous-algèbre \mathcal{B}^1 de \mathcal{B} engendrée par les fonctions $\Theta_1(f)$ pour $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E // \widehat{G}_E)$ est en fait engendrée par les opérateurs de Hecke en les places non ramifiées (par la propriété e) et le théorème de Tchebotarev). Par conséquent \mathcal{B}^1 est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et après changement des scalaires à \mathbb{C} c'est une C^* -algèbre commutative (parce que l'adjoint d'un opérateur de Hecke pour la structure hermitienne usuelle sur $C_c^{\text{cusp}}(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \Xi, \mathbb{C})$ est un opérateur de Hecke). Donc \mathcal{B}^1 est réduite (en termes plus élémentaires les éléments de \mathcal{B}^1 sont normaux, donc diagonalisables). Par le même argument, la conjecture 12.12 ci-dessous impliquerait que \mathcal{B} est réduite.

On appliquera la proposition suivante à chacun des Θ_n^ν avec

$$\Gamma = \pi_1(X \setminus N, \overline{\eta}), \quad \text{et} \quad H = H^0 = \widehat{G}_E.$$

Dans la proposition suivante on ne suppose pas H connexe car on l'utilisera de nouveau dans la section 12, avec H égal au L -groupe d'un groupe réductif non nécessairement déployé.

Proposition 11.7. *Soit Γ un groupe profini et H un groupe réductif sur E non nécessairement connexe tel que H^0 est déployé. On se donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un morphisme d'algèbres*

$$\Xi_n : \mathcal{O}((H)^n // H^0) \rightarrow C(\Gamma^n, E)$$

de telle sorte que

- a) *la suite $(\Xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est fonctorielle relativement aux applications entre les ensembles $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire que pour $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ arbitraire, $f \in \mathcal{O}((H)^m // H^0)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$, on a*

$$\Xi_n(f^\zeta)((\gamma_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}) = \Xi_m(f)((\gamma_{\zeta(i)})_{i \in \{1, \dots, m\}}),$$

où $f^\zeta \in \mathcal{O}((H)^n // H^0)$ est définie par

$$f^\zeta((g_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}) = f((g_{\zeta(i)})_{i \in \{1, \dots, m\}}),$$

- b) *pour tout $n \geq 1$, $f \in \mathcal{O}((H)^n // H^0)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \in \Gamma^{n+1}$ on a*

$$\Xi_{n+1}(\widehat{f})(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) = \Xi_n(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n \gamma_{n+1})$$

où $\widehat{f} \in \mathcal{O}((H)^{n+1} // H^0)$ est définie par

$$\widehat{f}(g_1, \dots, g_{n+1}) = f(g_1, \dots, g_n g_{n+1}).$$

Alors il existe un morphisme continu $\sigma : \Gamma \rightarrow H(E')$, où E' est une extension finie de E , tel que l'adhérence de Zariski de son image soit un sous-groupe réductif de $H_{E'}$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{O}((H)^n // H^0)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$, on ait

$$(11.4) \quad f(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n)) = (\Xi_n(f))(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

De plus les morphismes σ ayant ces propriétés forment une unique classe de conjugaison par $H^0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Remarque 11.8. Dans le cas où $H = GL_r$ la proposition précédente est bien connue grâce aux résultats de [Tay91] sur les pseudo-caractères. Plus précisément on note St la représentation standard de GL_r . Alors il résulte de [Pro76] que dans la proposition précédente, $\tau = \Theta_1(\chi_{\text{St}})$ détermine Θ_n pour tout n . Comme la représentation standard engendre (avec l'inverse du déterminant) toutes les représentations (de dimension finie) de GL_r , il suffit de connaître $\Theta_n(f)$ pour f de la forme $(g_1, \dots, g_n) \mapsto \text{Tr}(T \cdot (g_1, \dots, g_n))$ avec $T \in \text{End}(\text{St}^{\otimes n})^{GL_r}$. Or $\text{End}(\text{St}^{\otimes n})^{GL_r}$ est l'image de l'algèbre du groupe \mathfrak{S}_n , et on peut donc supposer que T est l'action d'une permutation σ . On calcule

$$\text{Tr}(\sigma \cdot (g_1, \dots, g_n)) = \prod_{(i_1, \dots, i_k) \text{ cycle de } \sigma} \chi_{\text{St}}(g_{i_k} \cdots g_{i_1})$$

et donc

$$\Theta_n(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \prod_{(i_1, \dots, i_k) \text{ cycle de } \sigma} \tau(\gamma_{i_k} \cdots \gamma_{i_1}).$$

Le fait que $\Lambda^{r+1} \text{St} = 0$ implique l'annulation de la fonction

$$(g_1, \dots, g_{r+1}) \mapsto \text{Tr}_{\text{St}^{\otimes(r+1)}} \left(\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} s(\sigma)\sigma \right) (g_1 \otimes \cdots \otimes g_{r+1}) \right)$$

dans $\mathcal{O}((\widehat{G}_E)^{r+1} // \widehat{G}_E)$. En décomposant σ en un produit de cycles, on obtient que $\tau = \Theta_1(\chi_{\text{St}})$, qui est une fonction centrale sur $\text{Gal}(\overline{F}/F)$, vérifie la relation de pseudo-caractère suivante:

$$(11.5) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+1}} s(\sigma) \left(\prod_{(i_1, \dots, i_k) \text{ cycle de } \sigma} \tau(\gamma_{i_k} \cdots \gamma_{i_1}) \right) = 0$$

comme fonction de $(\gamma_1, \dots, \gamma_{r+1}) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^{r+1}$. La relation (11.5) est due à Frobenius [Fro1896] et elle a été étudiée et généralisée dans de nombreux travaux, notamment [Wil88, Tay91, Rou96, BC09, Che14]. En utilisant des résultats de Procesi [Pro76, Pro87], Taylor a montré dans [Tay91] que tout pseudo-caractère à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique 0 est le caractère d'une représentation semi-simple de dimension r (on renvoie à la proposition 2.3 de [Che13] et à la discussion qui la précède pour un énoncé plus schématique).

Démonstration de la proposition 11.7. Pour tout n -uplet $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$, on note $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ le point de $(H)^n // H^0$ sur E correspondant au caractère

$$\mathcal{O}((H)^n // H^0) \rightarrow E, \quad f \mapsto (\Xi_n(f))(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Suivant [Ric88] on dit qu'un n -uplet (g_1, \dots, g_n) de points de $H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est semi-simple si l'adhérence de Zariski $\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle}$ du sous-groupe $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ de H engendré par g_1, \dots, g_n est réductive.

Lemme 11.9 (Richardson). *Soit $(g_1, \dots, g_n) \in H(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)^n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) (g_1, \dots, g_n) est un n -uplet semi-simple,
- (ii) la classe de conjugaison de (g_1, \dots, g_n) par $H^0_{\mathbb{Q}_\ell}$ est fermée dans $(H_{\mathbb{Q}_\ell})^n$.

De plus les $H^0_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ -orbites fermées dans $(H_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}})^n$ correspondent aux points sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ du quotient grossier $(H)^n // H^0$, c'est-à-dire aux caractères $\mathcal{O}((H)^n // H^0) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

Démonstration. La dernière assertion résulte des propriétés générales des quotients grossiers (cf. 1.3.2 de [Ric88]). Il reste à montrer l'équivalence de (i) et (ii). C'est le théorème 3.6 de [Ric88], à ceci près que l'on quotiente ici par conjugaison par H^0 et non par H . Cependant la preuve du théorème 3.6 de [Ric88] s'adapte sans difficultés:

- dans (ii) \Rightarrow (i) il n'y a rien à changer puisque la contradiction est amenée par un cocaractère, qui prend donc ses valeurs dans H^0 ,
- dans (i) \Rightarrow (ii) on applique le théorème de Hilbert-Mumford (théorème 2.1 de [Ric88]) à l'action de H^0 (au lieu de H) sur $(H)^n$.

□

Suite de la démonstration de la proposition 11.7. D'après le lemme précédent on a une bijection entre

- les points sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ du quotient grossier $(H)^n // H^0$,
- les classes de conjugaison par $H^0(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ de n -uplets semi-simples de points de $H(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

On note $\xi_n^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ la classe de conjugaison par $H^0(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ de n -uplets semi-simples dans $H(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ qui est associée à $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in ((H)^n // H^0)(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Autrement dit $\xi_n^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est, au choix

- l'ensemble des points sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ de l'unique orbite fermée au-dessus de $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$,
- l'ensemble des n -uplets semi-simples (g_1, \dots, g_n) de $H(\overline{\mathbb{Q}_\ell})^n$ satisfaisant

$$(11.6) \quad \forall f \in \mathcal{O}((H)^n // H^0), \quad f(g_1, \dots, g_n) = \Xi_n(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Soit $(g_1, \dots, g_n) \in \xi_n^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. On note $C(g_1, \dots, g_n)$ le centralisateur de (g_1, \dots, g_n) dans $H^0_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ (c'est-à-dire le centralisateur dans $H^0_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ du sous-groupe réductif $\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle}$ de $H_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$). On note $D(g_1, \dots, g_n)$ le centralisateur de $C(g_1, \dots, g_n)$ dans $H_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$. Comme le centralisateur d'un sous-groupe réductif dans un groupe réductif est réductif, $C(g_1, \dots, g_n)$ et $D(g_1, \dots, g_n)$ sont réductifs. On note \mathfrak{N} l'ensemble de $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Gamma^n$. Pour $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \in \mathfrak{N}$, on choisit $(g_1, \dots, g_n) \in \xi_n^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ (on rappelle que (g_1, \dots, g_n) , et donc $C(g_1, \dots, g_n)$, sont déterminés de façon unique à conjugaison près par $H^0_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$). On note

- \mathfrak{N}^1 le sous-ensemble de \mathfrak{N} formé des $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))$ tels que $\dim(\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle})$ soit maximal,
- \mathfrak{N}^2 le sous-ensemble de \mathfrak{N}^1 formé des $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))$ tels que $\dim(C(g_1, \dots, g_n))$ soit minimal,
- \mathfrak{N}^3 le sous-ensemble de \mathfrak{N}^2 formé des $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))$ tels que le nombre de composantes connexes de $C(g_1, \dots, g_n)$ soit minimal.

Il est clair que pour $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \in \mathfrak{N}^3$, $C(g_1, \dots, g_n)$ est minimal (à conjugaison près) parmi tous les sous-groupes de $H^0_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ construits de cette façon lorsque $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))$ parcourt \mathfrak{N}^1 .

On choisit $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \in \mathfrak{N}^3$ et on fixe $(g_1, \dots, g_n) \in \xi_n^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$.

Lemme 11.10. *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique $g \in G$ tel que (g_1, \dots, g_n, g) appartienne à $\xi_{n+1}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$. De plus $C(g_1, \dots, g_n, g) = C(g_1, \dots, g_n)$ et g appartient à $D(g_1, \dots, g_n)$.*

Démonstration. Soit $(h_1, \dots, h_n, h) \in \xi_{n+1}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$. On ne sait pas *a priori* que (h_1, \dots, h_n) est semi-simple mais, grâce à la condition a) appliquée à l'inclusion $\zeta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n+1\}$, (h_1, \dots, h_n) est au-dessus de $\xi_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Le théorème 5.2 de [Ric88] implique donc que $\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle}$ est conjugué à un sous-groupe de Levi de $\overline{\langle h_1, \dots, h_n \rangle}$ et donc que

$$(11.7) \quad \dim(\overline{\langle g_1, \dots, g_n \rangle}) \leq \dim(\overline{\langle h_1, \dots, h_n \rangle}).$$

Par définition de \mathfrak{N}^1 , et comme $\dim(\overline{\langle h_1, \dots, h_n \rangle}) \leq \dim(\overline{\langle h_1, \dots, h_n, h \rangle})$, l'égalité a lieu dans (11.7) et donc (h_1, \dots, h_n) est semi-simple et conjugué à (g_1, \dots, g_n) (de plus on en déduit que $(n+1, (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)) \in \mathfrak{N}^1$). Quitte à conjuguer (h_1, \dots, h_n, h) , on suppose que $(h_1, \dots, h_n) = (g_1, \dots, g_n)$. On pose alors $g = h$, si bien que $(g_1, \dots, g_n, g) \in \xi_{n+1}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$. On a évidemment $C(g_1, \dots, g_n, g) \subset C(g_1, \dots, g_n)$, et comme $(n, (\gamma_1, \dots, \gamma_n)) \in \mathfrak{N}^3$ et $(n+1, (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)) \in \mathfrak{N}^1$, cette inclusion est une égalité, donc g appartient à $D(g_1, \dots, g_n)$ et il est déterminé de manière unique (en effet il était déterminé à conjugaison près par $C(g_1, \dots, g_n)$ mais on vient de montrer qu'il appartient au centralisateur de $C(g_1, \dots, g_n)$). \square

Fin de la preuve de la proposition 11.7. On note $\sigma : \Gamma \rightarrow H(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ l'application $\gamma \mapsto g$ que l'on a construite dans le lemme précédent. Il reste à montrer que

- σ prend ses valeurs dans $H(E')$ où E' est une extension finie de E ,
- σ est un morphisme de groupes,
- σ est continue.

Le premier point est clair: si E' est une extension finie de E telle que g_1, \dots, g_n appartiennent à $H(E')$ alors pour tout γ, g appartient à $H(E')$ (en effet $g \in D(g_1, \dots, g_n)$ est déterminé de manière unique par l'image de (g_1, \dots, g_n, g) dans $(H)^{n+1} // H^0$, qui est définie sur $E \subset E'$).

Pour montrer le deuxième point soit $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Une variante immédiate du lemme 11.10 montre qu'il existe $g, g' \in H$ uniques tels que (g_1, \dots, g_n, g, g') appartienne à $\xi_{n+2}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma, \gamma')$. Par les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 11.10, les $(n+1)$ -uplets (g_1, \dots, g_n, g) , (g_1, \dots, g_n, g') et (g_1, \dots, g_n, gg') sont semi-simples. La condition a) implique que les deux premiers appartiennent à $\xi_{n+1}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)$ et $\xi_{n+1}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma')$. La condition b) implique que le troisième appartient à $\xi_{n+1}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma\gamma')$. Par conséquent $\sigma(\gamma) = g$, $\sigma(\gamma') = g'$ et $\sigma(\gamma\gamma') = gg'$. Finalement on a montré que $\sigma(\gamma\gamma') = \sigma(\gamma)\sigma(\gamma')$.

Pour le troisième point on commence par rappeler que $C(g_1, \dots, g_n)$ et $D(g_1, \dots, g_n)$ sont des groupes réductifs définis sur E' . Comme σ prend ses valeurs dans $D(g_1, \dots, g_n)$, on doit montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$, $f \circ \sigma$ appartient à l'algèbre $C(\Gamma, E')$ des fonctions continues de Γ dans E' . Or

$$q : \mathcal{O}((H_{E'})^{n+1} // H_{E'}^0) \rightarrow \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$$

$$f \mapsto [g \mapsto f(g_1, \dots, g_n, g)]$$

est un morphisme surjectif puisqu'il est la composée de deux morphismes surjectifs:

- le morphisme évident

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((H_{E'})^{n+1} // H_{E'}^0) &\rightarrow \mathcal{O}(H_{E'} // C(g_1, \dots, g_n)) = \mathcal{O}(H_{E'})^{C(g_1, \dots, g_n)} \\ f &\mapsto [g \mapsto f(g_1, \dots, g_n, g)] \end{aligned}$$

(où $C(g_1, \dots, g_n)$ agit par conjugaison sur $H_{E'}$) est surjectif car l'orbite de (g_1, \dots, g_n) par conjugaison par $H_{E'}^0$ est une sous-variété affine fermée de $(H_{E'})^n$ qui s'identifie au quotient $H_{E'}^0 / C(g_1, \dots, g_n)$ (on rappelle que le quotient d'un groupe réductif par un sous-groupe réductif est affine),

- la restriction $\mathcal{O}(H_{E'})^{C(g_1, \dots, g_n)} \rightarrow \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$ est surjective parce que la restriction $\mathcal{O}(H_{E'}) \rightarrow \mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$ est évidemment surjective, $C(g_1, \dots, g_n)$ agit trivialement sur $\mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n))$ et toute représentation du groupe réductif $C(g_1, \dots, g_n)$ est complètement réductible (voir la discussion au sujet de l'opérateur de Reynolds dans le paragraphe I.1 de [MFK94]).

Le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((H_{E'})^{n+1} // H_{E'}^0) &\rightarrow C(\Gamma, E') \\ f &\mapsto [\gamma \mapsto \Xi_{n+1}(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma)] \end{aligned}$$

se factorise par q car, dans les notations précédentes, $\Xi_{n+1}(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma) = f(g_1, \dots, g_n, g)$ et on a vu que $g \in D(g_1, \dots, g_n)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Comme q est surjectif, $f \mapsto f \circ \sigma$ est un morphisme d'algèbres $\mathcal{O}(D(g_1, \dots, g_n)) \rightarrow C(\Gamma, E')$ bien défini. Le troisième point est démontré.

On montre maintenant que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{O}((H)^m // H^0)$ et $(\delta_1, \dots, \delta_m) \in \Gamma^m$, on a

$$(11.8) \quad f(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_m)) = (\Xi_m(f))(\delta_1, \dots, \delta_m).$$

Par les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 11.10 il existe $h_1, \dots, h_m \in D(g_1, \dots, g_n)$ tels que $(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m) \in \xi_{n+m}^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n, \delta_1, \dots, \delta_m)$ et de plus on a $h_j = \sigma(\delta_j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. En appliquant la condition a) à l'injection $\{n+1, \dots, n+m\} \subset \{1, \dots, n+m\}$ on voit que $(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_m)) = (h_1, \dots, h_m)$ est au-dessus de $\xi_m(\delta_1, \dots, \delta_m)$ et l'égalité (11.8) en résulte.

Le fait que pour $m, \delta_1, \dots, \delta_m$ comme ci-dessus, le $(n+m)$ -uplet $(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n), \sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_m))$ soit semi-simple implique que l'adhérence de l'image de σ est un sous-groupe réductif de H . La construction précédente de $\sigma(\gamma)$ était entièrement nécessaire, et dépendait seulement du choix de (g_1, \dots, g_n) dans la classe de conjugaison semi-simple associée à $\xi_n^{ss}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Donc σ est unique à conjugaison près par $H^0(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. □

L'action de \mathcal{B} sur $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) / \Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ induit évidemment une action de \mathcal{B}^{red} , d'où une décomposition

$$(11.9) \quad C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) / \Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_{\nu} \mathfrak{H}_{\nu}$$

où ν parcourt les caractères de \mathcal{B}^{red} (c'est-à-dire aussi de \mathcal{B}). C'est ce que nous appelons "décomposition spectrale" dans le théorème 0.1. Par la définition-proposition

11.3 et la proposition 11.7 (appliquée à $H = H^0 = \widehat{G}_E$) on associe à chaque caractère ν un morphisme $\sigma : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tel que

- (C1) σ prend ses valeurs dans $\widehat{G}(E')$, où E' est une extension finie de E (donc de \mathbb{Q}_ℓ), et il est continu,
- (C2) l'adhérence de Zariski de son image est réductive,
- (C3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(11.10) \quad f(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n)) = (\Theta_n^\nu(f))(\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

- (C4) σ se factorise à travers $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})$.

De plus ν et la classe de conjugaison de σ par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ se déterminent mutuellement de façon unique grâce à la condition (C3). Le théorème suivant est le théorème 0.1 de l'introduction (avec un énoncé plus précis du lien avec les opérateurs d'excursion, qui sont maintenant construits).

Théorème 11.11. *On a une décomposition de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ -modules*

$$(11.11) \quad C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$$

où la somme est indexée par les classes de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de morphismes

$$\sigma : \pi_1(X \setminus N, \overline{\eta}) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

vérifiant les conditions (C1) et (C2). Cette décomposition est déterminée de manière unique par la décomposition (11.9) grâce à la condition (C3). Elle est compatible avec l'isomorphisme de Satake en les places non ramifiées: pour tout σ tel que $\mathfrak{H}_\sigma \neq 0$, pour toute représentation irréductible V de \widehat{G} et toute place $v \in |X| \setminus |N|$, $T(h_{V,v})$ agit sur \mathfrak{H}_σ par le scalaire $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$, où $\text{Frob}_v \in \pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})$ est un élément de Frobenius en v .

Démonstration. Il reste seulement à montrer la compatibilité avec Satake. Soit V une représentation irréductible de \widehat{G} . On sait que $T(h_{V,v})$ respecte \mathfrak{H}_σ et d'après le e) de la définition-proposition 11.3 et la condition (C3), $T(h_{V,v})$ agit sur \mathfrak{H}_σ avec l'unique valeur propre généralisée $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$. Mais, comme on l'a déjà dit dans la remarque 11.6, les opérateurs de Hecke en les places non ramifiées sont diagonalisables (car ils sont normaux pour la structure hermitienne standard sur $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathbb{C})$). Donc $T(h_{V,v})$ agit sur \mathfrak{H}_σ par multiplication par le scalaire $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$ et on a montré que σ est compatible en v avec l'isomorphisme de Satake. □

12. CAS DES GROUPES NON NÉCESSAIREMENT DÉPLOYÉS

12.1. Énoncé du théorème principal. Soit G un groupe réductif lisse et géométriquement connexe sur F . On note U l'ouvert maximal de X tel que G se prolonge en un schéma en groupes lisse et réductif sur U . D'après les paragraphes 5.1.9 et 4.6 de [BT84] (qui m'ont été indiqués par Jochen Heinloth), on peut choisir un modèle entier parahorique de G en tous les points de $X \setminus U$. En recollant ces modèles entiers sur U et sur les voisinages formels des points de $X \setminus U$, on obtient un schéma en groupes lisse sur X que l'on note encore G . Ainsi G est un schéma en groupes lisse sur X , réductif sur U , de type parahorique en les points de $X \setminus U$, et dont toutes les fibres sont géométriquement connexes.

D'après la proposition 1 de [Hei10], le champ Bun_G , dont les points sur un schéma S classifient les G -torseurs sur $X \times S$, est un champ algébrique lisse, localement de type fini. Une autre preuve de ce résultat apparaît dans [ARH]. On rappelle les énoncés dans le lemme suivant.

Lemme 12.1 ([Beh91], [Hei10] exemple (1) page 504, et [ARH], proposition 2.2 et théorème 2.5). *Soit G comme ci-dessus. Il existe un fibré vectoriel \mathcal{V} de rang r sur X muni d'une trivialisatation de $\det(\mathcal{V})$ et une représentation fidèle $\rho : G \rightarrow SL(\mathcal{V})$ telle que les quotients $SL(\mathcal{V})/G$ (et donc $GL(\mathcal{V})/G$) soient quasi-affines. Alors le morphisme $\rho_* : \text{Bun}_G \rightarrow \text{Bun}_{GL_r}^0$ est représentable, quasi-affine et de présentation finie (on a noté $\text{Bun}_{GL_r}^0$ la composante connexe de Bun_{GL_r} classifiant les fibrés de degré 0).*

Pour tout copoids dominant μ pour GL_r , $\text{Bun}_{GL_r}^{0, \leq \mu}$ est de type fini (voir [Wan11] pour une preuve et les références) et donc $\rho_^{-1}(\text{Bun}_{GL_r}^{0, \leq \mu})$ est un ouvert de type fini de Bun_G . Pour deux choix différents de \mathcal{V} et ρ les systèmes inductifs d'ouverts de Bun_G sont comparables.*

Seule la dernière phrase n'apparaît pas dans les références, mais elle résulte immédiatement du fait que ces ouverts sont de type fini.

Pour définir des troncatures $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$ il serait inutilement compliqué de chercher à comprendre les troncatures de Harder-Narasimhan dans un cadre non déployé et on préfère utiliser un plongement dans SL_r comme dans le lemme précédent. De plus on va définir ces troncatures à l'aide de G^{ad} au lieu de G pour que les troncatures qui s'en déduisent dans les champs de chtoucas soient invariantes par l'action de Ξ .

On applique le lemme précédent à G^{ad} , et on choisit donc un fibré vectoriel \mathcal{V} de rang r sur X muni d'une trivialisatation de $\det(\mathcal{V})$ et un plongement $\rho : G^{\text{ad}} \rightarrow SL(\mathcal{V})$. Pour tout copoids dominant μ pour GL_r on définit l'ouvert de type fini $\text{Bun}_{G^{\text{ad}}}^{\leq \mu}$ comme $(\rho_*)^{-1}(\text{Bun}_{GL_r}^{0, \leq \mu})$. On définit $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$ comme l'image inverse de $\text{Bun}_{G^{\text{ad}}}^{\leq \mu}$. C'est un ouvert de Bun_G qui n'est de type fini que si G est semi-simple. Des choix différents de \mathcal{V} et ρ conduiraient à des systèmes inductifs comparables.

De plus, en anticipant sur les notations du paragraphe 12.3.1, pour toute représentation W de ${}^L G$ il existe κ tel que pour tout μ et tout point $(\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1)$ de $\text{Hecke}_{\{0\}, W}^{(0)}$, si \mathcal{G}_0 appartient à $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$ alors \mathcal{G}_1 appartient à $\text{Bun}_G^{\leq \mu + \kappa}$.

Soit $N \subset X$ un sous-schéma fini. On note K_N le noyau de $G(\mathbb{O}) \rightarrow G(\mathcal{O}_N)$. On note $\text{Bun}_{G, N}$ le champ dont les points sur un schéma S classifient la donnée d'un G -torseur \mathcal{G} sur $X \times S$ et d'une trivialisatation de $\mathcal{G}|_{N \times S}$. Comme les fibres de G sont géométriquement connexes, la restriction à la Weil G_N de G de N à $\text{Spec } \mathbb{F}_q$ est connexe. On peut donc appliquer le théorème de Lang à G_N . Par conséquent $\text{Bun}_{G, N}(\mathbb{F}_q)$ est un $G(\mathcal{O}_N)$ -torseur sur le groupoïde $\text{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$.

On note $\widehat{N} = |N| \cup (X \setminus U)$, de sorte que $X \setminus \widehat{N}$ est l'ouvert non ramifié.

Le L -groupe ${}^L G$ est un produit semi-direct $\widehat{G} \rtimes \text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ où \widetilde{F} est l'extension finie galoisienne de F telle que $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ soit l'image de $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ dans le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de G . Le produit semi-direct est pris pour l'action de $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ sur \widehat{G} qui préserve un épingleage, voir [Bor79].

Pour tout $v \in |U|$, $G(\mathcal{O}_v)$ est hyperspécial, donc $G(\widetilde{F}_v)$ est quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée de F_v . Donc \widetilde{F}/F est non ramifié sur U . On note \widetilde{U} le revêtement galoisien de U , dont le corps des fonctions est \widetilde{F} . On considère ${}^L G$ comme un groupe algébrique sur \mathbb{Q}_ℓ et pour toute extension

$E \supset \mathbb{Q}_\ell$ on note ${}^L G_E$ le groupe obtenu par extension des scalaires à E et on note ${}^L G(E) = \widehat{G}(E) \rtimes \text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ le groupe de ses points à valeurs dans E .

Pour toute place $v \in |X|$, on note \widetilde{F}_v l'extension galoisienne finie de F_v telle que $\text{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v)$ soit l'image de $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ dans le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de G . On note ${}^L G_v = \widehat{G} \rtimes \text{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v)$ le L -groupe local. On a un plongement

$$\text{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v) \subset \text{Gal}(\widetilde{F}/F) \quad \text{et} \quad {}^L G_v \subset {}^L G$$

bien défini à conjugaison près et déterminé de façon unique par le choix d'un plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$. Si $v \in |U|$, \widetilde{F}_v/F_v est non ramifié et donc $\text{Gal}(\widetilde{F}_v/F_v)$ est cyclique, avec Frob_v comme générateur canonique.

Remarque 12.2. On a une inclusion évidente

$$(12.1) \quad G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_N \subset \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$$

dont l'image est formée des G -torseurs localement triviaux pour la topologie de Zariski. En général, comme on l'a déjà mentionné dans la remarque 8.21,

$$(12.2) \quad \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) = \bigcup_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F) \backslash G_\alpha(\mathbb{A}) / K_N$$

où la réunion est disjointe, $\ker^1(F,G)$ est fini et G_α est la forme intérieure pure de G obtenue par torsion par α . On rappelle que

$$\ker^1(F,G) = \text{Ker}(H^1(F,G) \rightarrow \prod_v H^1(F_v,G)).$$

Pour tout $\alpha \in \ker^1(F,G)$ on fixe un G -torseur sur F ayant α comme classe d'isomorphisme, on l'étend à $X \setminus \widehat{N}$, et on le munit d'une trivialisations sur chaque corps local F_v (venant en presque toute place v de $X \setminus \widehat{N}$ d'une trivialisations sur \mathcal{O}_v). On note G_α le groupe d'automorphismes de ce G -torseur. On possède donc un isomorphisme $G_\alpha(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})$, qui donne un sens au quotient par K_N dans le membre de droite de (12.2). L'égalité (12.2) résulte facilement du fait que, pour tout $v \in |X|$, $H^1(\mathcal{O}_v, G) = 0$ (grâce au théorème de Lang, comme on l'a montré plus haut). Pour plus de détails on renvoie au lemme 1.1 de [NBC06b].

D'après Kottwitz [Kot84, Kot86] et Nguyen Quoc Thang [TNQ11] théorème 2.6.1 pour l'extension en caractéristique p , $\ker^1(F,G)$ est le dual de $\ker^1(F, Z_{\widehat{G}}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}))$.

On fixe un réseau $\Xi \subset Z(\mathbb{A})/Z(F)$. On définit $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ comme le sous-espace de $C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ formé des éléments dont l'image par la correspondance

$$\begin{array}{ccc} \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi & \longleftarrow & (\text{Bun}_{P,N}(\mathbb{F}_q) \times_{P(\mathcal{O}_N)} G(\mathcal{O}_N))/\Xi \\ & & \downarrow \\ & & (\text{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q) \times_{P(\mathcal{O}_N)} G(\mathcal{O}_N))/\Xi \end{array}$$

s'annule dans $C(\text{Bun}_{M,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$ pour tout sous-groupe parabolique P de G de Levi M (on renvoie à [Xue17] pour un cadre général, où de telles correspondances sont étudiées). Grâce à la remarque précédente on a la définition équivalente

$$(12.3) \quad C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) = \bigoplus_{\alpha \in \ker^1(F,G)} C_c^{\text{cusp}}(G_\alpha(F) \backslash G_\alpha(\mathbb{A}) / K_N \Xi, E).$$

C'est un E -espace vectoriel muni d'une action de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)$. Il est de dimension finie par [Har74] et la proposition 5.2 de [BJ79]: l'idée est que la cuspidalité implique l'annulation sur les G -torseurs avec niveau N très instables (c'est-à-dire possédant, pour un certain sous-groupe parabolique propre une réduction au sous-groupe de Levi associé admettant un unique relèvement au sous-groupe parabolique), donc il existe μ tel que toute fonction cuspidale soit supportée sur $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}(\mathbb{F}_q)/\Xi$ qui est fini.

Soit $v \in |U|$ (en fait on n'utilisera ce qui va suivre que pour $v \in |X| \setminus \widehat{N} \subset |U|$). L'isomorphisme de Satake (voir [Sat63, Car79, Bor79, BR94]) est un isomorphisme d'anneaux

$$(12.4) \quad \mathcal{S} : \mathcal{O}(\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v // \widehat{G}_E) \rightarrow C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$$

où le membre de gauche est l'anneau des fonctions régulières sur la classe à gauche (ou à droite) par \widehat{G}_E égale à $\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v \subset {}^L G_{v,E}$, qui sont invariantes par conjugaison par \widehat{G}_E . Pour toute représentation E -linéaire V de ${}^L G_v$, on note $h_{V,v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$ l'image par l'isomorphisme de Satake \mathcal{S} de $\chi_V|_{\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v}$. Ces fonctions $\chi_V|_{\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v}$ engendrent $\mathcal{O}(\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v // \widehat{G}_E)$ quand V varie. En effet les χ_V engendrent le terme de gauche dans

$$\mathcal{O}({}^L G_{v,E} // {}^L G_{v,E}) \rightarrow \mathcal{O}(\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v // {}^L G_{v,E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v // \widehat{G}_E),$$

où le premier morphisme est simplement la restriction. Le deuxième est un isomorphisme car les classes de conjugaison par \widehat{G}_E et par ${}^L G_{v,E}$ d'un élément de la forme $g \rtimes \text{Frob}_v$ sont égales (puisque $g \rtimes \text{Frob}_v$ commute avec lui-même), donc ${}^L G_{v,E}/\widehat{G}_E$ agit trivialement sur $\widehat{G}_E \rtimes \text{Frob}_v // \widehat{G}_E$. Par conséquent $[V] \mapsto h_{V,v}$ est un homomorphisme surjectif d'anneaux $\text{Rep}_E({}^L G_v) \rightarrow C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), E)$. La fonction $h_{V,v}$ appartient à $C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), \mathcal{O}_E)$ lorsque V est défini sur \mathcal{O}_E .

Dans le paragraphe 12.3.4 nous définirons une famille commutative d'opérateurs d'excursion

$$S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}} \in \text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)} \left(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \right)$$

où I est un ensemble fini, W est une représentation E -linéaire de $({}^L G)^I$, $x \in W$ et $\xi \in W^*$ sont invariants sous l'action diagonale de \widehat{G} , et $(\gamma_i)_{i \in I} \in (\text{Gal}(\overline{F}/F))^I$.

Théorème 12.3. *On a une décomposition canonique de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ -modules*

$$(12.5) \quad C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}$$

indexée par les paramètres de Langlands, c'est-à-dire les classes de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ de morphismes

$$\sigma : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

tels que

(C'1) σ prend ses valeurs dans ${}^L G(E')$, où E' est une extension finie de E (donc de \mathbb{Q}_ℓ), et il est continu et non ramifié en dehors de \widehat{N} (c'est-à-dire qu'il se factorise à travers $\pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta})$),

(C'2) l'adhérence de Zariski de son image est réductive,

(C'5) on a la commutativité du diagramme

$$(12.6) \quad \begin{array}{ccc} \text{Gal}(\overline{F}/F) & \xrightarrow{\sigma} & {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Gal}(\tilde{F}/F) & \end{array}$$

Cette décomposition découle de la décomposition spectrale de la famille commutative des opérateurs d'excursion, au sens suivant: \mathfrak{H}_σ est l'espace propre généralisé correspondant au système de valeurs propres $\langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i \in I} \cdot x \rangle$ pour $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ quand I, W, x, ξ et $(\gamma_i)_{i \in I}$ varient. Il est compatible avec l'isomorphisme de Satake: pour tout σ , toute place $v \in |X| \setminus \widehat{N}$, et pour toute représentation irréductible V de ${}^L G_v$, $h_{V,v}$ agit sur \mathfrak{H}_σ par multiplication par le scalaire $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$. Enfin la décomposition (12.5) est compatible avec la limite sur N .

Remarque 12.4. En passant à la limite sur N , on obtient une décomposition canonique, indexée par les paramètres de Langlands, de la représentation de $G(\mathbb{A})$

$$\varinjlim_N C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha \in \ker^1(F,G)} C_c^{\text{cusp}}(G_\alpha(F) \backslash G_\alpha(\mathbb{A})/\Xi, E).$$

Autrement dit pour toute représentation lisse irréductible π de $G(\mathbb{A})$, le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension finie

$$\text{Hom}_{G(\mathbb{A})} \left(\pi, \varinjlim_N C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \right)$$

admet une décomposition canonique indexée par les paramètres de Langlands qui sont compatibles par l'isomorphisme de Satake avec π en toutes les places où π est non ramifié. La conjecture 12.12 ci-dessous affirme que (si π est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$) cette décomposition est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, indexée par des paramètres de Langlands motiviques et ne dépend pas de ℓ ni du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

12.2. Compléments, remarques et conjectures.

12.2.1. *Compatibilité avec la functorialité.* La proposition suivante (dont l'énoncé a émergé après des discussions avec Vladimir Drinfeld et Erez Lapid) affirme que la décomposition (12.5) est compatible avec les cas triviaux de functorialité. Bien sûr on espère aussi qu'elle est compatible avec les cas non triviaux, comme la correspondance theta, et d'ailleurs grâce au lien entre notre construction et [BV06] (expliqué dans la section 15) cela devrait résulter de la géométrisation du noyau theta par Sergey Lysenko [Lys06, Lys11].

Soit G' un autre groupe réductif sur F et $\Upsilon : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes sur F dont l'image est un sous-groupe distingué de G' . La functorialité "triviale" pour les L -groupes expliquée dans le paragraphe 2.5 de [Bor79] fournit un morphisme ${}^L \Upsilon : {}^L G' \rightarrow {}^L G$ (en supposant les L -groupes construits à l'aide d'une même extension galoisienne finie \tilde{F} déployant à la fois G et G').

Soit Ξ et Ξ' des réseaux dans $Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$ et $Z'(F) \backslash Z'(\mathbb{A})$ (où Z' désigne le centre de G') tels que $\Upsilon(\Xi) \subset \Xi'$. Alors Υ induit

$$\beta_\Upsilon : \varinjlim_N \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi \rightarrow \varinjlim_N \text{Bun}_{G',N}(\mathbb{F}_q)/\Xi'$$

et donc

$$(12.7) \quad \beta_{\Upsilon}^* : \varinjlim_N C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G',N}(\mathbb{F}_q)/\Xi', E) \rightarrow \varinjlim_N C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$$

défini par $\beta_{\Upsilon}^*(h) = h \circ \beta_{\Upsilon}$. On considère la décomposition (12.5) (après être passé à la limite sur N) et la décomposition analogue

$$(12.8) \quad \varinjlim_N C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G',N}(\mathbb{F}_q)/\Xi', E) = \bigoplus_{\sigma'} \mathfrak{H}'_{\sigma'}.$$

Proposition 12.5. *Pour tout paramètre de Langlands σ' pour G' , on a $\beta_{\Upsilon}^*(\mathfrak{H}'_{\sigma'}) \subset \mathfrak{H}_{\sigma}$ avec $\sigma = {}^L\Upsilon \circ \sigma'$.*

La preuve sera donnée juste après la preuve du théorème 12.3.

12.2.2. *Paramètres d'Arthur.* Bien sûr on aimerait montrer que les paramètres de Langlands σ qui apparaissent dans la décomposition (12.5) proviennent de paramètres d'Arthur elliptiques. On rappelle qu'un paramètre d'Arthur est une classe de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ de morphisme

$$\psi : \text{Gal}(\overline{F}/F) \times SL_2(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}) \text{ (algébrique sur } SL_2(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})\text{),}$$

dont la restriction à $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ est non ramifiée sur un ouvert dense et prend ses valeurs dans une extension finie de \mathbb{Q}_{ℓ} , et qui est continu, fait commuter le diagramme (12.6) et est tel que

(A1) la restriction de ψ à $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ est pure de poids 0 (c'est-à-dire que son image par toute représentation de ${}^L G$ est pure de poids 0).

De plus ψ est dit elliptique si

(A2) le centralisateur de ψ dans $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ est fini modulo $(Z(\widehat{G})(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}))^{\text{Gal}(\overline{F}/F)}$.

Le paramètre de Langlands associé à ψ est $\sigma_{\psi} : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ défini par

$$\sigma_{\psi}(\gamma) = \psi \left(\gamma, \begin{pmatrix} |\gamma|^{1/2} & 0 \\ 0 & |\gamma|^{-1/2} \end{pmatrix} \right)$$

où $|\gamma|^{1/2}$ est bien défini grâce au choix d'une racine carrée de q .

Le paramètre d'Arthur, c'est-à-dire la classe de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ de ψ , est déterminé de manière unique par la classe de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ de σ_{ψ} (Malcev, cf. le corollaire 4.2 de [Kos59]).

Remarque 12.6. Soit ψ un paramètre d'Arthur tel que σ_{ψ} apparaisse dans (12.5). Par la théorie du corps de classe on sait que pour tout caractère ν de ${}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$, $\nu \circ \sigma_{\psi}$ est pure de poids 0. Par conséquent la condition (A2) implique la condition (A1). En effet si on fixe $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_{\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ et si la restriction de ψ à $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ n'est pas ι -pure de poids 0, alors le ι -poids fournit un cocaractère non trivial à valeurs dans le centralisateur de ψ , dont la composée avec tout caractère ν de ${}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$ est trivial, et cela contredit la condition (A2).

Conjecture 12.7. *Tout paramètre de Langlands σ apparaissant dans la décomposition (12.5) est de la forme σ_{ψ} avec ψ un paramètre d'Arthur elliptique (bien défini à conjugaison près par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$).*

Remarque 12.8. Pour montrer la conjecture précédente on peut espérer utiliser les actions du SL_2 de Lefschetz sur la cohomologie de compactifications des champs de chtoucas (il faudrait évidemment considérer la cohomologie en tous degrés et

non pas seulement en degré moitié comme dans cet article). Cela était discuté dans la remarque 10.8 et la section 11 de la version 3 de cet article sur arXiv mais on signale que le lemme 11.5 était erroné car l'action des morphismes de Frobenius partiels manquait dans les hypothèses (et il n'est pas évident de définir une telle action sur la cohomologie d'une compactification).

Remarque 12.9. On aimerait en fait obtenir une décomposition comme (12.5) pour toute la partie discrète (et non pas seulement la partie cuspidale). Cette décomposition devrait être indexée par les paramètres d'Arthur elliptiques.

12.2.3. *Lien avec les formules de multiplicités d'Arthur.* Il est tentant de conjecturer une formule de multiplicités pour les espaces \mathfrak{H}_σ apparaissant dans la décomposition (12.5). Comme la décomposition (12.5) n'est construite que pour la partie cuspidale, et pas encore pour la partie discrète (cf. la remarque 12.9), il est préférable pour le moment de ne discuter les formules de multiplicités que pour les paramètres d'Arthur elliptiques pour lesquels l'action de SL_2 est triviale, car dans ce cas le paquet global d'Arthur est conjecturalement inclus dans la partie cuspidale.

La formule de multiplicités que nous conjecturons pour \mathfrak{H}_σ est exactement le terme correspondant à σ dans la formule de multiplicités d'Arthur usuelle. La raison est la "compensation" suivante. On rappelle que dans (12.1) la somme est indexée par $\ker^1(F, G)$ et comme les formules de multiplicités d'Arthur concernent le quotient adélique $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi$, on a l'impression que l'on doit multiplier toutes les multiplicités par $\#\ker^1(F, G)$. Mais les formules de multiplicités d'Arthur sont écrites pour une relation d'équivalence \mathcal{R} sur l'ensemble des paramètres d'Arthur elliptiques, qui est plus faible que la conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et fait intervenir en plus la torsion par un cocycle localement trivial à valeurs dans $Z_{\widehat{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, c'est-à-dire un élément de $\ker^1(F, Z_{\widehat{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$. Or $\ker^1(F, G)$ est le dual de $\ker^1(F, Z_{\widehat{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ donc ils ont le même cardinal.

Remarque 12.10. Pour des groupes autres que GL_r , des multiplicités > 1 peuvent apparaître dans chaque \mathfrak{H}_σ . Cela est indépendant du fait que différents \mathfrak{H}_σ peuvent correspondre au même système de valeurs propres de Hecke (comme on l'a expliqué dans le paragraphe 0.7).

Lorsque G est un tore, les sous-espaces \mathfrak{H}_σ ont pour dimension 1, et la décomposition (12.5) est simplement la bijection entre caractères de $\varprojlim_N \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ et paramètres de Langlands modulo conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Remarque 12.11. Il est clair que la décomposition (12.5) implique une décomposition plus grossière de $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ indexée par les paramètres de Langlands modulo la relation d'équivalence plus faible \mathcal{R} mentionnée ci-dessus. Cependant on ne sait pas si cette relation d'équivalence plus faible est compatible avec l'inclusion $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subset C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui vient de (12.1). On ne sait donc pas construire en général une décomposition canonique de $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ indexée par les paramètres de Langlands pour la relation d'équivalence plus faible \mathcal{R} .

12.2.4. *Indépendance par rapport à ℓ .* La philosophie des motifs indique qu'il doit exister une notion de "paramètre de Langlands motivique" définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Si l'on admet les conjectures standard, un paramètre de Langlands motivique est défini

comme une classe d'isomorphisme de couples (T, κ) , où

- T est un foncteur tensoriel de la catégorie de représentations $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéaires de dimension finie de ${}^L G$ vers la catégorie $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéaire des motifs purs sur F ,
- κ est un isomorphisme entre la restriction de T aux représentations de ${}^L G/\widehat{G} = \text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ et le foncteur naturel des représentations de $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ vers les motifs d'Artin sur F .

Dans un article récent [Dri15], Drinfeld a donné un sens inconditionnel à la notion de paramètre de Langlands motivique.

Conjecture 12.12. *La décomposition (12.5) est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et indexée par des paramètres de Langlands motiviques. De plus la décomposition est indépendante de ℓ et du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.*

Remarque 12.13. Bien sûr dans le cas où $G = GL_r$, il est évident que la décomposition (12.5) est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et indépendante de ℓ et du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, puisque les espaces \mathfrak{H}_σ sont obtenus par diagonalisation des opérateurs de Hecke en les places non ramifiées. En effet, grâce au théorème de Tchebotarev, une représentation linéaire semi-simple σ est déterminée par son caractère. On pourrait aussi invoquer le théorème de multiplicité un fort [PS75, Sha74, JS81a, JS81b]. Grâce aux explications de Erez Lapid, nous savons que pour $G = SL_r$ la décomposition (12.5) est aussi définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et indépendante de ℓ et du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. En effet la proposition 12.5 appliquée à l'inclusion $\Upsilon : SL_r \hookrightarrow GL_r$ montre que la décomposition (12.5) pour SL_r est déterminée par la décomposition pour GL_r , puisque β_Υ^* est surjective [HS12, LL79]. D'après [Lar94, Lar96] et des variantes de l'argument précédent on peut obtenir un résultat analogue pour d'autres groupes.

Remarque 12.14. Si on admet la conjecture de Tate en plus des conjectures standard, on pourrait espérer démontrer la conjecture précédente en rendant motiviques toutes les constructions de cet article. Cependant cela serait très difficile car on a utilisé la cohomologie à support compact du faisceau d'intersection de champs de Deligne-Mumford qui ne sont pas propres. La conjecture de Tate permettrait d'obtenir à l'aide du lemme de Drinfeld (le corollaire 8.13) des représentations $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéaires de $G_{\text{mot}}^W(F)^I$, où $G_{\text{mot}}(F)$ est le groupe de Galois motivique de F (associé au choix d'un foncteur fibre sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont l'existence résulte de [Del90]), et $G_{\text{mot}}^W(F) = G_{\text{mot}}(F) \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ pourrait être appelé "groupe de Weil motivique". On utiliserait alors la variante évidente de la proposition 11.7 où l'on remplace Γ par $G_{\text{mot}}^W(F)$.

Remarque 12.15. La conjecture 12.12 impliquerait l'existence d'une algèbre $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ telle que $\mathcal{B} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ pour tout plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Grâce à la remarque 5.4 et à l'égalité entre (9.8) et (9.9), le transposé d'un opérateur d'excursion est un opérateur d'excursion, par conséquent $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ serait alors une C^* -algèbre commutative et l'algèbre $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ serait donc réduite.

12.2.5. *Digression sur le cas des corps de nombres.* Il paraît totalement hors d'atteinte d'appliquer les méthodes de cet article aux corps de nombres. Cependant on peut se demander s'il est raisonnable d'espérer une décomposition analogue à la décomposition canonique (12.5), une formule de multiplicités d'Arthur pour chacun des espaces \mathfrak{H}_σ , et une conjecture analogue à la conjecture 12.12.

Quand F est un corps de fonctions comme dans cet article, la limite $\varprojlim_N \text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ est égale à $(G(\overline{F}) \backslash G(\mathbb{A} \otimes_F \overline{F}))^{\text{Gal}(\overline{F}/F)}$. Or cette dernière expression garde un sens pour les corps de nombres et pour éviter des problèmes topologiques on peut remarquer qu'elle est aussi égale à $(G(\check{F}) \backslash G(\mathbb{A} \otimes_F \check{F}))^{\text{Gal}(\check{F}/F)}$ où \check{F} est une extension finie galoisienne de F sur laquelle G est déployé.

On peut donc espérer que si F est un corps de nombres et si Ξ est un réseau dans $Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$, la partie discrète de $L^2\left((G(\overline{F}) \backslash G(\mathbb{A} \otimes_F \overline{F}))^{\text{Gal}(\overline{F}/F)} / \Xi, \mathbb{C}\right)$ admet une décomposition *canonique* indexée par les classes de conjugaison par $\widehat{G}(\mathbb{C})$ de paramètres d'Arthur elliptiques. Comme dans le cas des corps de fonctions, on a

$$(G(\overline{F}) \backslash G(\mathbb{A} \otimes_F \overline{F}))^{\text{Gal}(\overline{F}/F)} = \bigcup_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F) \backslash G_\alpha(\mathbb{A})$$

où $\ker^1(F,G)$ est fini et G_α est une forme intérieure de G . Le cas particulier qui ressemble le plus au cas des corps de fonctions est celui des formes automorphes cohomologiques. En effet la partie cohomologique de $L^2_{\text{disc}}\left((G(\overline{F}) \backslash G(\mathbb{A} \otimes_F \overline{F}))^{\text{Gal}(\overline{F}/F)} / \Xi, \mathbb{C}\right)$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et on peut se demander si elle admet une décomposition *canonique* sur $\overline{\mathbb{Q}}$ indexée par les classes d'équivalence de paramètres d'Arthur elliptiques (pour rendre cela précis il faut utiliser [BG14]).

12.3. Démonstration du théorème 12.3. On va expliquer les ingrédients nouveaux nécessaires pour la preuve du théorème 12.3 comparée à la preuve du théorème 11.11 qui a fait l'objet des sections 1 à 11 de cet article.

Si ${}^L G = \widehat{G}$, les modifications sont très limitées. Mais pour traiter le cas où ${}^L G \neq \widehat{G}$ on aura besoin d'une variante tordue sur la courbe de l'équivalence de Satake géométrique. On suppose E assez grand pour que toutes les représentations irréductibles de ${}^L G$ soient définies sur E .

12.3.1. *Rappels sur les grassmanniennes affines et l'équivalence de Satake géométrique.* De la même façon que dans la section 1, on définit l'ind-schéma $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur U^I (on rappelle que G est réductif sur U). On a $X \setminus \widehat{N} \subset U$ et en fait dans la suite on utilisera uniquement la restriction de $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ à $(X \setminus \widehat{N})^I$, que l'on notera de la même façon. Soit \widehat{U} un revêtement de U (et même de \widetilde{U}) tel que l'image inverse de G à \widehat{U} soit déployée. Soit W une représentation E -linéaire de $({}^L G)^I$. Alors $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est défini comme le sous-schéma fermé de $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ formé des points dont l'image inverse à $(\widehat{U})^I$ appartient à $\text{Gr}_{\widehat{U}, I, W}^{(I_1, \dots, I_k)}|_{(\widehat{G})^I}$.

La définition des grassmanniennes affines de Beilinson-Drinfeld garde un sens pour les courbes ouvertes et la notation précédente signifie que l'on a appliqué cette définition à la courbe \widehat{U} . On a pu restreindre W à $(\widehat{G})^I$ parce que l'image inverse de G sur \widehat{U} est déployée. On rappelle que par définition ce schéma est la réunion des schémas $\text{Gr}_{\widehat{U}, I, V}^{(I_1, \dots, I_k)}$ pour tous les constituants irréductibles V de $W|_{(\widehat{G})^I}$. On définit alors $\text{Hecke}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ comme l'image inverse de $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum \infty x_i}$ par le morphisme naturel $\text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum \infty x_i}$. Toutes les propriétés restent vraies, et en particulier on possède l'extension suivante du théorème 1.17 au cas non déployé (la structure du L -groupe comme produit semi-direct pour l'action respectant un

épinglage vient du fait qu'un épinglage de \widehat{G} apparaît naturellement dans la preuve de l'équivalence de Satake géométrique, voir [BD99]).

Contrairement au cas déployé, les faisceaux pervers que nous allons considérer ne sont pas forcément des faisceaux intersection complète, mais sont issus du théorème suivant, où $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ joue simplement le rôle de support. C'est pourquoi nous avons supposé ci-dessus que W est une représentation de $({}^L G)^I$ (et non pas seulement de $(\widehat{G})^I$) et n'avons pas cherché à introduire de corps réflex.

Théorème 12.16 (Variante tordue de l'équivalence de Satake géométrique [Zhu15, Ric14]). *On a un foncteur canonique*

$$W \mapsto \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

de la catégorie des représentations E -linéaires de dimension finie de $({}^L G)^I$ vers la catégorie des E -faisceaux pervers $G_{\sum \infty x_i}^{\text{ad}}$ -équivariants sur $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$. De plus $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est supporté par $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ et on peut donc le considérer comme un faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$ (où les entiers n_i sont assez grands et le décalage est déterminé par la condition que l'image inverse sur $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est perverse relativement à $(X \setminus \widehat{N})^I$). Les E -faisceaux pervers (à un décalage près) $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sont universellement localement acycliques relativement au morphisme vers $(X \setminus \widehat{N})^I$. Ils vérifient les mêmes propriétés b), c), d) que dans le théorème 1.17. Si W se factorise à travers $({}^L G / \widehat{G})^I = \text{Gal}(\widetilde{F}/F)^I$, $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est supporté sur la section évidente $(X \setminus \widehat{N})^I \rightarrow \text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ (dont l'image est le sous-schéma où tous les ϕ_j sont des isomorphismes) et elle provient du E -faisceau lisse sur $(X \setminus \widehat{N})^I$ correspondant à W (et dont la fibre en $\Delta(\overline{\eta})$ est canoniquement égale à W).

Remarque 12.17. Dans le théorème précédent on peut remplacer E par \mathcal{O}_E (on a toujours $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ de type fini mais on n'en donne plus de description explicite en fonction en W). Il en va de même dans la discussion qui suit.

En fait nous aurons besoin d'une petite généralisation du théorème précédent, où certains x_i restent des points variables sur $X \setminus \widehat{N}$ mais les autres sont fixés en des places dans $|X| \setminus \widehat{N}$, et en contrepartie on demande seulement que W soit une représentation du L -groupe local (au lieu de ${}^L G$) pour ces indices.

Soit I un ensemble fini, et

$$(12.9) \quad \alpha : I \rightarrow (|X| \setminus \widehat{N}) \cup \{\star\}$$

une application (l'idée est que, pour $i \in I$, le point x_i restera un point variable sur $X \setminus \widehat{N}$ si $\alpha(i) = \star$ et sera fixé en la place v si $\alpha(i) = v$). On pose $X(\star) = X \setminus \widehat{N}$, et pour $v \in |X| \setminus \widehat{N}$ on écrit $X(v) = v$, considéré comme un sous-schéma fermé de X . Soit W une représentation E -linéaire de dimension finie de $\prod_{i \in I} {}^L G_{\alpha(i)}$, où ${}^L G_{\star} = {}^L G$. Soit (I_1, \dots, I_k) une partition de I telle que α soit constant sur chaque I_j . Alors on définit naturellement le sous-schéma fermé $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \alpha}$ de $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k), \alpha} = \text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{\prod_{i \in I} X(\alpha(i))}$ sur $\prod_{i \in I} X(\alpha(i))$ et le faisceau pervers (à un décalage près)

$$(12.10) \quad \mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k), \alpha} \quad \text{sur} \quad \text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \alpha} / G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$$

qui est fonctoriel en W et vérifie les mêmes propriétés que dans le théorème ci-dessus, donc en particulier les propriétés analogues à b), c), d) du théorème 1.17. On peut le vérifier facilement en plongeant W dans une représentation de $\prod_{i \in I} {}^L G_{\alpha(i)}$ qui admet un prolongement à $({}^L G)^I$.

Le lien avec l'isomorphisme de Satake classique (12.4) est le suivant. Soit v une place dans $|X| \setminus \widehat{N}$. On prend $I = \{1\}$ un singleton et α défini par $\alpha(1) = v$. On écrit Gr_v pour $\text{Gr}_{\{1\}}^{\{1\}}|_v$ qui est la fibre de la grassmannienne affine sur v . L'ensemble des \mathbb{F}_q -points de cet ind-schéma s'identifie à $G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$. Alors, pour toute représentation irréductible V de ${}^L G_v$, la trace de $\text{Frob}_{\text{Gr}_v/k(v)}$ sur le faisceau pervers $\mathcal{S}_{\{1\},V,E}^{\{1\},\alpha}$ est égale à $(-1)^{\langle 2\rho, \omega \rangle} h_{V,v}$, où $h_{V,v} \in C_c(G(\mathcal{O}_v) \backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_v), \mathcal{O}_E)$ a été introduite juste après (12.4) et ω est le plus haut poids de n'importe quel constituant irréductible de $V|_{\widehat{G}}$ (de sorte que $\langle 2\rho, \omega \rangle$ est la dimension de la $G(\mathcal{O})$ -orbite correspondante dans Gr_v).

12.3.2. *Chtoucas.* On construit maintenant le champ classifiant des chtoucas dans le cas des groupes non nécessairement déployés. Cela est facile et parallèle au cas déployé parce que les pattes restent dans $X \setminus \widehat{N} \subset U$ sur lequel G est réductif. Une construction sans cette hypothèse est proposée dans [ARH], mais n'est pas nécessaire ici. Soit I un ensemble fini, $k \in \mathbb{N}$ et (I_1, \dots, I_k) une partition de I . On note

$$\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \text{ (resp. } \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}, \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})$$

le champ sur $(X \setminus \widehat{N})^I$ dont les points sur un schéma S classifient un S -point

$$(12.11) \quad ((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0, \psi_0) \xrightarrow{\phi_1} (\mathcal{G}_1, \psi_1) \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{k-1}} (\mathcal{G}_{k-1}, \psi_{k-1}) \xrightarrow{\phi_k} (\mathcal{G}_k, \psi_k))$$

dans

$$\text{Hecke}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \text{ (resp. } \text{Hecke}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}, \text{Hecke}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})$$

plus un isomorphisme $\sigma : {}^\tau \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k$, préservant les structures de niveau, c'est-à-dire vérifiant $\psi_k \circ \sigma|_{N \times S} = {}^\tau \psi_0$.

Comme les fibres de G sont géométriquement connexes, on peut appliquer le théorème de Lang à la restriction à la Weil de G de n'importe quel sous-schéma fini de X à \mathbb{F}_q . Donc pour tout niveau $N' \supset N$, $\text{Cht}_{N',I,V}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}$ est un revêtement fini étale du champ $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu}|_{(X \setminus \widehat{N}')^I}$ de groupe de Galois $K_N/K_{N'}$.

Remarque 12.18. On peut montrer que, comme les pattes varient dans $X \setminus \widehat{N}$, $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I_1, \dots, I_k)}$ ne dépend en fait que de la donnée de G groupe réductif sur $X \setminus \widehat{N}$ et du sous-groupe compact ouvert $\text{Ker}(\prod_{v \in \widehat{N}} G(\mathcal{O}_v) \rightarrow G(\mathcal{O}_N))$ de $\prod_{v \in \widehat{N}} G(F_v)$.

La lemme suivant a bénéficié de discussions avec Alain Genestier, Urs Hartl et Jochen Heinloth. On renvoie au théorème 3.14 et à la remarque 3.18 de [ARH] pour plus de détails.

Lemme 12.19. *Le quotient $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi$ est un champ de Deligne-Mumford de type fini.*

Démonstration. On rappelle que μ est un copoids dominant de G^{ad} . Il suffit de montrer l'énoncé pour $(I_1, \dots, I_k) = (I)$, ce qu'on suppose désormais. Par ailleurs il suffit de montrer le résultat avec N assez grand (en fonction de μ).

a) Cas où G est adjoint. On a rappelé au paragraphe 12.1 que, d'après [ARH], $\text{Bun}_G^{\leq \mu}$ est un champ d'Artin de type fini, et pour N assez grand $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}$, $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu + \kappa}$ et $\text{Hecke}_{N,I,V}^{(I), \leq \mu}$ sont des schémas de type fini, donc $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I), \leq \mu}$ est un sous-schéma fermé de $\text{Hecke}_{N,I,V}^{(I), \leq \mu}$ (image inverse du graphe de Frobenius de $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu + \kappa}$) et il est donc un schéma de type fini.

b) Cas où G est un tore T . Alors il existe un revêtement fini Y de $X \setminus \widehat{N}$ tel que $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I)} \times_{(X \setminus \widehat{N})^I} Y^I$ soit une réunion finie de $\text{Bun}_{T,N}(\mathbb{F}_q)$ -torseurs (cette réunion finie a pour cardinal le nombre de caractères différents de \widehat{T} dans la restriction de V à $\widehat{T} \subset {}^L T$). Or le morphisme naturel $\Xi \rightarrow \text{Bun}_{T,N}(\mathbb{F}_q)$ a un noyau fini et une image d'indice fini, donc (en supposant, quitte à diminuer Ξ , que le noyau soit nul), $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I)} / \Xi$ est un revêtement fini de $(X \setminus \widehat{N})^I$. Plus précisément on montre qu'il existe $U \subset \text{Cht}_{N,I,V}^{(I)}$ ouvert fermé de type fini tel que la réunion de ses translatés par Ξ recouvre $\text{Cht}_{N,I,V}^{(I)}$.

c) Cas général. On considère le tore $G^{\text{ab}} = G/G^{\text{der}}$ abélianisé de G . Alors le morphisme $(\beta^{\text{ad}}, \beta^{\text{ab}}) : G \rightarrow G^{\text{ad}} \times G^{\text{ab}}$ est surjectif sur \overline{F} et a pour noyau un groupe abélien fini K .

On choisit les modèles parahoriques lisses de G , G^{ad} et G^{ab} pour que le morphisme $G \rightarrow G^{\text{ad}} \times G^{\text{ab}}$ s'étende à X tout entier.

On note encore V la représentation de ${}^L G^{\text{ad}} \times {}^L G^{\text{ab}}$ (et donc de chacun des deux facteurs) qui se déduit de V en composant par $({}^L \beta^{\text{ad}}, {}^L \beta^{\text{ab}}) : {}^L G^{\text{ad}} \times {}^L G^{\text{ad}} \rightarrow {}^L G$. D'où un morphisme

$$(\beta_*^{\text{ad}}, \beta_*^{\text{ab}}) : \text{Cht}_{G,N,I,V}^{(I)} \rightarrow \text{Cht}_{G^{\text{ad}},N,I,V}^{(I)} \times \text{Cht}_{G^{\text{ab}},N,I,V}^{(I)}.$$

On applique b) à G^{ab} et on note U un ouvert fermé de type fini de $\text{Cht}_{G^{\text{ab}},N,I,V}^{(I)}$ tel que la réunion de ses translatés par Ξ recouvre $\text{Cht}_{G^{\text{ab}},N,I,V}^{(I)}$. La réunion des translatés de $(\beta_*^{\text{ab}})^{-1}(U)$ par Ξ recouvre $\text{Cht}_{G,N,I,V}^{(I)}$. Il suffit donc de montrer que $(\beta_*^{\text{ab}})^{-1}(U)$ est de type fini.

Soit, comme dans le lemme 12.1, un fibré vectoriel \mathcal{V} de rang r sur X muni d'une trivialisatation de $\det(\mathcal{V})$ et une représentation fidèle $\rho : G \rightarrow SL(\mathcal{V})$ telle que les quotients $SL(\mathcal{V})/G$ (et donc $GL(\mathcal{V})/G$) soient quasi-affines. En prenant $n = \sharp K$ on voit que la représentation $\rho^{\otimes n}$ de G sur $\mathcal{V}^{\otimes n}$ se factorise par $(\beta^{\text{ad}}, \beta^{\text{ab}})$ au point générique de X . On en déduit facilement que $(\rho^{\otimes n})_*((\beta_*^{\text{ab}})^{-1}(U))$ est inclus dans $\text{Bun}_{GL_r, n}^{0, \leq \nu}$ pour ν assez grand. Par conséquent $\rho_*((\beta_*^{\text{ab}})^{-1}(U))$ est inclus dans $\text{Bun}_{GL_r}^{0, \leq \nu}$ pour ν assez grand. Le même argument que dans a) montre alors que $(\beta_*^{\text{ab}})^{-1}(U)$ est de type fini. \square

Le champ discret $\text{Cht}_{N,\emptyset,1}^{(\emptyset), \leq \mu}$ est constant sur \mathbb{F}_q et égal à $\text{Bun}_{G,N}^{\leq \mu}(\mathbb{F}_q)$. L'argument pour le démontrer est le même que dans la preuve de la proposition 2.16 c): on applique le lemme 3.3 b) de [Var04] à $\text{Bun}_{G,N'}^{\leq \mu}$, où $N' \supset N$ est assez grand (en fonction de μ) pour que toute composante connexe de $\text{Bun}_{G,N'}^{\leq \mu}$ soit un schéma.

Si les entiers n_i sont assez grands, le morphisme naturel

$$\epsilon_{N,(I),W,\underline{n}}^{(I_1, \dots, I_k), \Xi} : \text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi \rightarrow \text{Gr}_{I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} n_i x_i}^{\text{ad}}$$

est lisse.

Comme dans la définition 4.5 on définit $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)}$ comme le faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k)}/\Xi$ égal à

$$(12.12) \quad \mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} = (\epsilon_{N,(I),W,\underline{n}}^{(I_1,\dots,I_k),\Xi})^* (\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k)}).$$

On définit

$$(12.13) \quad \mathcal{H}_{N,I,W}^{\leq \mu,E} = R(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k),\leq \mu})_! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k)} \Big|_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\leq \mu}/\Xi} \right)$$

qui appartient à $D_c^b((X \setminus \widehat{N})^I, E)$ (grâce au lemme précédent) et ne dépend pas du choix de la partition (I_1, \dots, I_k) . Il dépend bien sûr de Ξ , que l'on omet pour raccourcir les formules. En particulier on possède le faisceau constructible $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E}$ sur $(X \setminus \widehat{N})^I$.

12.3.3. *Une petite généralisation, et les opérateurs $S_{V,v}$.* Pour construire les opérateurs analogues aux $S_{V,v}$, on a besoin d'une petite généralisation des champs de chtoucas, associée à la donnée d'une application α comme dans (12.9). Soit (I_1, \dots, I_k) une partition de I telle que α soit constant sur chaque I_j .

Soit W une représentation E -linéaire de $\prod_{i \in I} {}^L G_{\alpha(i)}$. On définit $\text{Hecke}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ de la même façon que $\text{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ introduit ci-dessus. On note $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ le champ sur $\prod_{i \in I} X(\alpha(i))$ classifiant un point (12.11) dans $\text{Hecke}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ plus un isomorphisme $\sigma : {}^\tau \mathcal{G}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k$, préservant les structures de niveau, c'est-à-dire vérifiant $\psi_k \circ \sigma|_{N \times S} = {}^\tau \psi_0$. Si les entiers n_i sont assez grands on a un morphisme naturel $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}/\Xi \rightarrow \text{Gr}_{I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}/G_{\sum n_i x_i}^{\text{ad}}$ qui est lisse.

Comme dans (12.12) on définit $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ comme le faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}/\Xi$ égal à l'image inverse du faisceau pervers $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ introduit dans (12.10). Comme dans (12.13) on pose

$$(12.14) \quad \mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{\leq \mu,E} = R(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha,\leq \mu})_! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha} \Big|_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha,\leq \mu}/\Xi} \right)$$

dans $D_c^b(\prod_{i \in I} X(\alpha(i)), E)$. Le fait que (12.14) est indépendant du choix de la partition (I_1, \dots, I_k) vient de ce que $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1,\dots,I_k),\alpha}$ défini dans (12.10) vérifie l'analogie de b) du théorème 1.17

Soit de plus $v \in |X| \setminus \widehat{N}$ et V une représentation de ${}^L G_v$. On prolonge α en $\alpha' : I \cup \{1, 2\} \rightarrow (|X| \setminus \widehat{N}) \cup \{\star\}$ en posant $\alpha'(1) = \alpha'(2) = v$. On définit alors

$$S_{V,v} \in \text{Hom}_{D_c^b(\prod_{i \in I} X(\alpha(i)), E)} \left(\mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{\leq \mu,E}, \mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{\leq \mu+\kappa,E} \right)$$

comme la composée

$$(12.15) \quad \mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{\leq \mu,E} \boxtimes E_v \xrightarrow{\mathcal{C}_{\delta_V,v}^\sharp} \mathcal{H}_{N,I \cup \{1,2\},\alpha',W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\leq \mu,E} \Big|_{\prod_{i \in I} X(\alpha(i)) \times \Delta(v)} \\ \xrightarrow{(F_{\{1\}})^{\text{deg}(v)}} \mathcal{H}_{N,I \cup \{1,2\},\alpha',W \boxtimes V \boxtimes V^*}^{\leq \mu+\kappa,E} \Big|_{\prod_{i \in I} X(\alpha(i)) \times \Delta(v)} \xrightarrow{\mathcal{C}_{\text{ev}V,v}^b} \mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{\leq \mu+\kappa,E} \boxtimes E_v,$$

où les morphismes de création et d'annihilation $\mathcal{C}_{\delta_V,v}^\sharp$ et $\mathcal{C}_{\text{ev}V,v}^b$ sont évidents (la notation $(F_{\{1\}})^{\text{deg}(v)}$ ci-dessus est un peu abusive dans la mesure où $F_{\{1\}}$ n'existe pas dans ce cadre). Plus précisément la composée (12.15) commute avec l'action du morphisme de Frobenius partiel sur E_v , et par descente on obtient $S_{V,v}$.

La même preuve que celle de la proposition 6.2 donne l'égalité

$$(12.16) \quad T(h_{V,v}) = S_{V,v} \Big|_{\prod_{i \in I} (X(\alpha(i)) \cap (X \setminus v))}.$$

Comme dans le corollaire 6.5, on utilise les morphismes $S_{V,v}$ pour prolonger l'action de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N)$ sur $\mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{\leq \mu,E}$ à $\prod_{i \in I} X(\alpha(i))$ tout entier. De la même façon que dans la section 7 on montre les relations d'Eichler-Shimura (elles existent en toutes les places de $X \setminus \widehat{N}$ mais on n'en aura besoin qu'aux places où G est déployé, et dans ce cas il n'y a aucune différence avec la section 7).

12.3.4. *Opérateurs d'excursion.* Pour tout point géométrique \bar{x} dans $(X \setminus \widehat{N})^I$, on définit le E -espace vectoriel des éléments Hecke-finis

$$\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\bar{x}} \right)^{\text{Hf}} \subset \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\bar{x}}$$

de la même façon que dans la définition 8.19.

Dans le cas où I est vide,

$$\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\bar{\eta}} = \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\emptyset,\mathbf{1}}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\mathbb{F}_q} = C_c(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$$

et la proposition 8.23 implique que

$$(12.17) \quad \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\{0\},\mathbf{1}}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\bar{\eta}} \right)^{\text{Hf}} = \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,\emptyset,\mathbf{1}}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\mathbb{F}_q} \right)^{\text{Hf}} = C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E).$$

On choisit une flèche de spécialisation \mathfrak{sp} de $\bar{\eta}^I$ vers $\Delta(\bar{\eta})$. Les mêmes arguments que dans la proposition 8.27 et le corollaire 8.34 montrent que

$$\mathfrak{sp}^* : \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \rightarrow \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{\bar{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}$$

est une bijection et que cet espace est muni d'une action de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})^I = \text{Gal}(\bar{F}/F)^I$. Pour la partie de l'argument qui utilise les relations d'Eichler-Shimura, on peut choisir (si on le souhaite) les places v_i telles que G y soit déployé.

Pour alléger les notations, nous ne définirons les morphismes de création et d'annihilation que sur les faisceaux $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E}$ (au lieu du cadre plus général des faisceaux $\mathcal{H}_{N,I,\alpha,W}^{0,\leq \mu,E}$ qui contiendrait comme cas particulier les morphismes $\mathcal{C}_{\delta_{V,v}}^{\sharp}$ et $\mathcal{C}_{\text{ev}_{V,v}}^{\flat}$ de (12.15)). Soit J un ensemble fini et U une représentation de $({}^L G)^J$. On rappelle la notation $\zeta_J : J \rightarrow \{0\}$, de sorte que U^{ζ_J} est la représentation diagonale de ${}^L G$. Le sous-espace $(U^{\zeta_J})^{\widehat{G}}$, formé des vecteurs de U qui sont invariants sous l'action diagonale de \widehat{G} , est une représentation de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ (par l'action diagonale). On note ι l'inclusion $(U^{\zeta_J})^{\widehat{G}} \subset U^{\zeta_J}$. On note $(U^{\zeta_J})^{\widehat{G}} \Big|_{X \setminus \widehat{N}}$ le E -faisceau lisse sur $X \setminus \widehat{N}$ qui est associé à la représentation de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ sur $(U^{\zeta_J})^{\widehat{G}}$, et dont la fibre en $\bar{\eta}$ est canoniquement égale à $(U^{\zeta_J})^{\widehat{G}}$. Le morphisme de création est la composée

$$(12.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu,E} \boxtimes (U^{\zeta_J})^{\widehat{G}} \Big|_{X \setminus \widehat{N}} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\},W \boxtimes (U^{\zeta_J})^{\widehat{G}}}^{0,\leq \mu,E} \\ \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes \iota)} \mathcal{H}_{N,I \cup \{0\},W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{0,\leq \mu,E} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{N,I \cup J,W \boxtimes U}^{0,\leq \mu,E} \Big|_{(X \setminus \widehat{N})^I \times \Delta(X \setminus \widehat{N})}. \end{aligned}$$

On remarque que le vecteur x , qui apparaissait dans la notation \mathcal{C}_x^\sharp dans le cas déployé, ne peut être introduit ici puisque le faisceau $(U^{\zeta_J})^{\widehat{G}}|_{X \setminus \widehat{N}}$ n'est pas nécessairement constant. Il réapparaîtra dans (12.20) quand on restreindra ce faisceau à $\overline{\eta}$.

De la même façon, en notant $\nu : U^{\zeta_J} \rightarrow (U^{\zeta_J})_{\widehat{G}}$ le quotient maximal sur lequel l'action diagonale de \widehat{G} est triviale, on définit le morphisme d'annihilation comme la composée

$$(12.19) \quad \mathcal{H}_{N,I \cup J, W \boxtimes U}^{0, \leq \mu, E} |_{(X \setminus \widehat{N})^I \times \Delta(X \setminus \widehat{N})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes U^{\zeta_J}}^{0, \leq \mu, E} \\ \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{Id}_W \boxtimes \nu)} \mathcal{H}_{N, I \cup \{0\}, W \boxtimes (U^{\zeta_J})_{\widehat{G}}}^{0, \leq \mu, E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{N, I, W}^{0, \leq \mu, E} \boxtimes (U^{\zeta_J})_{\widehat{G}} |_{X \setminus \widehat{N}}.$$

On prend maintenant $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$ et on restreint à $\overline{\eta}$ les morphismes (12.18) et (12.19). En remplaçant les lettres (J, U) par (I, W) (qui ne sont plus utilisées), on obtient

- pour tout $x \in W$ invariant par l'action diagonale de \widehat{G} , le morphisme de création

$$(12.20) \quad \mathcal{H}_{N, \emptyset, \mathbf{1}}^{0, \leq \mu, E} |_{\overline{\mathbb{F}}_q} \rightarrow \mathcal{H}_{N, I, W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\overline{\eta})},$$

- et pour tout $\xi \in W^*$ qui est invariant par l'action diagonale de \widehat{G} le morphisme d'annihilation

$$\mathcal{H}_{N, I, W}^{0, \leq \mu, E} |_{\Delta(\overline{\eta})} \rightarrow \mathcal{H}_{N, \emptyset, \mathbf{1}}^{0, \leq \mu, E} |_{\overline{\mathbb{F}}_q}.$$

Grâce à (12.17), on construit les opérateurs d'excursion exactement comme dans la définition-proposition 9.1. Soit I un ensemble fini, W une représentation E -linéaire de dimension finie de $({}^L G)^I$, $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants sous l'action diagonale de \widehat{G} , et $(\gamma_i)_{i \in I} \in \pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$. Alors

$$S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}} \in \text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)} \left(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G, N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \right)$$

est défini comme la composée (9.3).

Ces opérateurs d'excursion engendrent une sous-algèbre commutative

$$\mathcal{B} \subset \text{End}_{C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, E)} \left(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G, N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E) \right).$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash ({}^L G_E)^I / \widehat{G}_E)$, on pose

$$S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}} = S_{I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}}$$

où W, x, ξ sont tels que $f((g_i)_{i \in I}) = \langle \xi, (g_i)_{i \in I} \cdot x \rangle$. Ces opérateurs vérifient des propriétés similaires à (i), (ii), (iii) et (iv) de la proposition 10.8, et à la proposition 10.10. L'analogie de (v) de la proposition 10.8 sera considéré dans la propriété e') ci-dessous.

On a une nouvelle propriété

(vi') Si f provient d'une fonction sur $(\text{Gal}(\widetilde{F}/F))^I$ (grâce à l'égalité ${}^L G/\widehat{G} = \text{Gal}(\widetilde{F}/F)$), $S_{I, f, (\gamma_i)_{i \in I}}$ est le scalaire $f((\gamma_i)_{i \in I})$ (où les γ_i désignent ici par abus leurs images dans $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$). Plus généralement si J est un sous-ensemble de I et f provient d'une fonction sur

$$\widehat{G}_E \backslash ({}^L G_E)^J / \widehat{G}_E \times (\text{Gal}(\widetilde{F}/F))^{I \setminus J},$$

alors

$$S_{I,f,(\gamma_i)_{i \in I}} = S_{J,\tilde{f},(\gamma_j)_{j \in J}} \text{ où } \tilde{f}((g_j)_{j \in J}) = f((g_j)_{j \in J}, (\gamma_i)_{i \in I \setminus J}).$$

12.3.5. *Construction des paramètres de Langlands.* Pour tout entier n on note $\mathcal{O}(({}^L G_E)^n // \widehat{G}_E)$ la E -algèbre de type fini formée par les fonctions régulières sur $({}^L G_E)^n$ qui sont invariantes par conjugaison diagonale par \widehat{G}_E , c'est-à-dire telles que $f(hg_1h^{-1}, \dots, hg_nh^{-1}) = f(g_1, \dots, g_n)$ pour tout $h \in \widehat{G}_E$ et $g_1, \dots, g_n \in {}^L G_E$.

Comme dans la définition-proposition 11.3 on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ un morphisme d'algèbres

$$\Theta_n : \mathcal{O}(({}^L G_E)^n // \widehat{G}_E) \rightarrow C(\pi_1(X \setminus \widehat{N}, \bar{\eta})^n, \mathcal{B})$$

tel que, si on pose $I = \{0, \dots, n\}$,

$$\Theta_n(f)(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = S_{I,\tilde{f},(1,\gamma_1,\dots,\gamma_n)}$$

où $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash ({}^L G_E)^I / \widehat{G}_E)$ est définie par $\tilde{f}(g_0, g_1, \dots, g_n) = f(g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_n)$.

Remarque 12.20. A l'aide de (vi') on peut montrer que les opérateurs $S_{I,\tilde{f},(1,\gamma_1,\dots,\gamma_n)}$ ci-dessus engendrent la E -algèbre \mathcal{B} quand n, f et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ varient. En effet $\mathcal{O}({}^L G_E \backslash ({}^L G_E)^I / \widehat{G}_E)$ et $\mathcal{O}(({}^L G_E / \widehat{G}_E)^I)$ engendrent $\mathcal{O}(\widehat{G}_E \backslash ({}^L G_E)^I / \widehat{G}_E)$, car l'action de ${}^L G_E / \widehat{G}_E$ par translation à gauche sur $({}^L G_E / \widehat{G}_E)^I = \pi_0(\widehat{G}_E \backslash ({}^L G_E)^I / \widehat{G}_E)$ est libre. Donc en considérant la suite Θ_n on ne perd aucune information.

La suite Θ_n vérifie des propriétés similaires à a), b), c) et d) de la définition-proposition 11.3 ainsi qu'une variante e') de la propriété e) et une nouvelle propriété f'):

e') pour toute place $v \in |X| \setminus \widehat{N}$, pour tout plongement $\overline{F} \subset \overline{F}_v$ (includant des plongements $\text{Gal}(\overline{F}_v / F_v) \hookrightarrow \text{Gal}(\overline{F} / F)$ et ${}^L G_{v,E} \subset {}^L G_E$), et pour toute représentation irréductible V de ${}^L G_{v,E}$, de caractère $\chi_V \in \mathcal{O}({}^L G_{v,E} // {}^L G_{v,E})$, pour toute fonction $f \in \mathcal{O}({}^L G_E // {}^L G_{v,E})$ prolongeant χ_V , et pour tout $\gamma \in \text{Gal}(\overline{F}_v / F_v)$ avec $\text{deg}(\gamma) = 1$, $\Theta_1(f)(\gamma) = T(h_{V,v})$.

f') si f est une fonction sur le groupe fini $\text{Gal}(\tilde{F} / F)^n$ et que l'on considère f comme un élément de $\mathcal{O}(({}^L G_E)^n // \widehat{G}_E)$ alors $\Theta_n(f)$ est la composée

$$\text{Gal}(\overline{F} / F)^n \rightarrow \text{Gal}(\tilde{F} / F)^n \xrightarrow{f} E \subset \mathcal{B}.$$

La propriété f') est une reformulation de la première partie de (vi') ci-dessus. La propriété e') résulte de (12.16), grâce à une compatibilité évidente entre les morphismes de création et d'annihilation $\mathcal{O}_{\delta_V,v}^\#$ et $\mathcal{O}_{\text{ev}_V,v}^\flat$ de (12.15) et les restrictions à v des morphismes (12.18) et (12.19) (associés à $J = \{1, 2\}$ et à une représentation U de $({}^L G_E)^2$ dont la restriction à $({}^L G_{v,E})^2$ contient $V \boxtimes V^*$). En effet, par un argument similaire au lemme 10.2, $\Theta_1(f)(\gamma)$ dépend seulement de la restriction de f à ${}^L G_{v,E} // {}^L G_{v,E}$ et toute fonction dans $\mathcal{O}({}^L G_{v,E} // {}^L G_{v,E})$ est une combinaison de caractères de représentations irréductibles de ${}^L G_{v,E}$.

On a une décomposition spectrale (en espaces propres généralisés)

$$(12.21) \quad C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) / \Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\nu} \mathfrak{H}_\nu$$

où ν parcourt les caractères de \mathcal{B} .

On applique la proposition 11.7 à $H = {}^L G_E$ (et $H^0 = \widehat{G}_E$). Ainsi pour tout caractère ν de \mathcal{B} , on obtient un morphisme $\sigma : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ bien défini à conjugaison près par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et tel que

- (C'1) σ prend ses valeurs dans ${}^L G(E')$, où E' est une extension finie de E (et donc de \mathbb{Q}_ℓ), et il est continu,
- (C'2) l'adhérence de Zariski de son image est réductrice,
- (C'3) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{O}(({}^L G_E)^n // \widehat{G}_E)$ et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \text{Gal}(\overline{F}/F)^n$ on a

$$(12.22) \quad f(\sigma(\gamma_1), \dots, \sigma(\gamma_n)) = (\nu \circ \Theta_n(f))(\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

- (C'4) σ se factorise à travers $\pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta})$.

La condition f') ci-dessus implique:

- (C'5) le diagramme (12.6) est commutatif.

De plus ν et la classe de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de σ se déterminent mutuellement. La propriété e') ci-dessus montre la compatibilité à l'isomorphisme de Satake en toutes les places de $X \setminus \widehat{N}$, par le même argument que dans la preuve du théorème 11.11.

Cela termine la preuve du théorème 12.3. □

Remarque 12.21. Si G est anisotrope, la démonstration du théorème 12.3 pourrait être simplifiée car il n'y a plus besoin de troncatures par μ , la cohomologie Hecke-finie est égale à la cohomologie totale et le lemme de Drinfeld peut être appliqué directement. En effet tous les champs $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi$ sont de type fini. L'argument le plus simple pour le démontrer semble être de choisir un revêtement galoisien $\widehat{U} \rightarrow U$ tel que l'image inverse de G soit déployée, noter \widehat{X} la courbe projective lisse contenant \widehat{U} comme ouvert dense, puis appliquer à l'image inverse d'un chtouca à \widehat{X} (qui aura donc des pattes supplémentaires en les points de $\widehat{X} \setminus \widehat{U}$, contrôlées par des copoids dominants ne dépendant que de G, X et \widehat{X}) la théorie de la filtration de Harder-Narasimhan dans le cas déployé [Beh91, Var04, Sch15] et utiliser les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 2.25 de [Var04] pour montrer que des pentes trop importantes entraîneraient l'existence d'un sous-groupe parabolique propre dans G (cet argument apparaît déjà dans [LRS93, Laf97, Lau04] pour les algèbres à division). Donc la limite inductive $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ est un E -faisceau constructible sur $(X \setminus \widehat{N})^I$, muni d'une action des morphismes de Frobenius partiels (qui respectent de plus une \mathcal{O}_E -structure naturelle). Ce faisceau est donc lisse sur \mathfrak{U}^I pour un certain ouvert dense $\mathfrak{U} \subset X$ et on peut appliquer directement le lemme de Drinfeld. Sa fibre en $\Delta(\overline{\eta})$ vérifie les propriétés a), b), c) de la proposition 0.28.

Démonstration de la proposition 12.5. Soit W une représentation de $({}^L G)^I$, $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants sous l'action diagonale de \widehat{G} , et $(\gamma_i)_{i \in I} \in \pi_1(\eta, \overline{\eta})^I$. On note $W_{L\Upsilon}$ la représentation de $({}^L G')^I$ obtenue en composant W avec $L\Upsilon : {}^L G' \rightarrow {}^L G$. Alors le morphisme de restriction β_{Υ}^* de (12.7) entrelace les opérateurs $S_{W_{L\Upsilon}, x, \xi, (\gamma_i)}$ et $S_{W, x, \xi, (\gamma_i)}$. En effet, grâce à une "fonctorialité triviale" de l'équivalence de Satake géométrique vis à vis de Υ (qui est laissée au lecteur), on définit naturellement un morphisme de faisceaux

$$\beta_{\Upsilon}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W_{L\Upsilon}}^{0, \leq \mu, E} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$$

(où le premier faisceau est relatif à G' et Ξ' et le second à G et Ξ). Ces morphismes entrelacent les opérateurs de création et d'annihilation, ainsi que les actions de Galois sur les parties Hecke-finies des fibres en $\Delta(\overline{\eta})$. La proposition 12.5 en résulte. \square

13. RÉSULTATS À COEFFICIENTS DANS $\overline{\mathbb{F}}_\ell$

Je remercie Jean-Pierre Serre pour un commentaire qui m'a amené à réfléchir au problème considéré dans cette section. Dans le cas où G est déployé, le théorème ci-dessous fournit une décomposition canonique de $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ indexée par les classes de conjugaison de représentations complètement réductibles $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta}) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$. La notion de complète réductibilité est expliquée par Serre dans [Ser05].

Soit G un groupe réductif comme dans la section précédente.

Proposition 13.1. *Le \mathcal{O}_E -réseau*

$$C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \mathcal{O}_E) \subset C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, E)$$

est préservé par tous les opérateurs d'excursion $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ lorsque I et $(\gamma_i)_{i \in I}$ sont arbitraires, et W, x, ξ sont définis sur \mathcal{O}_E .

Démonstration. Cela résulte du fait que l'équivalence de Satake géométrique a été construite à coefficients dans \mathcal{O}_E par Mirkovic et Vilonen [MV07] (voir aussi [Gai07]). On commence par le cas où G est déployé. Comme on l'a rappelé dans le théorème 1.17 et la remarque 1.20, on a un foncteur canonique $W \mapsto \mathcal{S}_{I,W,\mathcal{O}_E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ de la catégorie des représentations de $(\widehat{G})^I$ dans des \mathcal{O}_E -modules de type fini vers la catégorie des faisceaux pervers (à un décalage près) $G_{\sum \infty x_i}^{\text{ad}}$ -équivariants à coefficients dans \mathcal{O}_E sur $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$. Mirkovic et Vilonen utilisent la t-structure perverse standard dans la catégorie dérivée des \mathcal{O}_E -faisceaux. Le fait qu'elle n'est pas préservée par la dualité de Verdier ne pose pas de problème car celle-ci n'est pas utilisée dans l'argument. En fait on n'utilisera ce foncteur $W \mapsto \mathcal{S}_{I,W,\mathcal{O}_E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ que lorsque W est sans torsion. Avec les notations de la définition 4.5 on obtient le \mathcal{O}_E -faisceau pervers $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,\mathcal{O}_E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi$ défini comme l'image inverse de $\mathcal{S}_{I,W,\mathcal{O}_E}^{(I_1, \dots, I_k)}$. On définit alors $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, \mathcal{O}_E}$ comme le sous- \mathcal{O}_E -faisceau de $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E}$ égal à l'image de

$$R^0(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})_! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,\mathcal{O}_E}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi} \right)$$

dans

$$\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} = R^0(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})_! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi} \right)$$

(autrement dit on tue la torsion éventuelle). Ces sous- \mathcal{O}_E -faisceaux $\mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, \mathcal{O}_E}$ sont préservés par les morphismes de création et d'annihilation et, avec augmentation de μ , par l'action des opérateurs de Hecke à coefficients dans \mathcal{O}_E et des morphismes de Frobenius partiels.

Pour tout point géométrique \overline{x} de $(X \setminus N)^I$ on définit

$$\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, \mathcal{O}_E} \Big|_{\overline{x}} \right)^{\text{Hf}} = \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\overline{x}} \right)^{\text{Hf}} \cap \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0, \leq \mu, \mathcal{O}_E} \Big|_{\overline{x}} \right).$$

On vérifie facilement qu'un élément de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\bar{x}}$ est Hecke-fini si et seulement si il vérifie les conditions équivalentes suivantes:

- il appartient à un sous- \mathcal{O}_E -module \mathfrak{M} de type fini de $\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\bar{x}}$ qui est stable par $T(f)$ pour tout $f \in C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathcal{O}_E)$,
- il vérifie la même condition, et en plus \mathfrak{M} est stable par $\pi_1(x, \bar{x})$.

Le même argument que dans la proposition 8.31 montre que l'image de l'homomorphisme de spécialisation

$$(13.1) \quad \mathfrak{sp}^* : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \rightarrow \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\bar{\eta}^I}$$

contient $\left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\bar{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}$. Grâce à la proposition 8.32 on en déduit que

$$(13.2) \quad \mathfrak{sp}^* : \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\Delta(\bar{\eta})} \right)^{\text{Hf}} \rightarrow \left(\varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq\mu,\mathcal{O}_E} \Big|_{\bar{\eta}^I} \right)^{\text{Hf}}$$

est un isomorphisme. Par conséquent on peut remplacer E par \mathcal{O}_E partout dans la définition (9.3) des opérateurs d'excursion. Lorsque G n'est pas nécessairement déployé, les arguments sont les mêmes, avec les adaptations de la section précédente. \square

Les fonctions sur $({}^L G)^n // \widehat{G}$ de la forme $(g_1, \dots, g_n) \mapsto \langle \xi, (1, g_1, \dots, g_n).x \rangle$ où $I = \{0, \dots, n\}$ et W, x, ξ sont définis sur \mathcal{O}_E sont exactement les fonctions régulières sur $({}^L G)^n // \widehat{G}$ définies sur \mathcal{O}_E . Le même énoncé est vrai à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\ell}$ et $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$.

On note $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{F}}_{\ell}} \in \text{End}(C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{F}}_{\ell}))$ la sous-algèbre commutative engendrée par les réductions modulo l'idéal maximal de \mathcal{O}_E des opérateurs $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ quand I et $(\gamma_i)_{i \in I}$ sont arbitraires, et W, x, ξ sont définis sur \mathcal{O}_E .

Les propriétés de la définition-proposition 11.3 satisfaites par les opérateurs d'excursion sont préservées par la réduction modulo l'idéal maximal de \mathcal{O}_E .

Pour construire les représentations galoisiennes σ à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_{\ell}$ à partir des caractères de $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{F}}_{\ell}}$, on utilise, lorsque G est déployé, le théorème 3.1 de Bate, Martin et Röhrle [BMR05], qui complète, en caractéristique $\ell \neq 0$, les résultats de Richardson [Ric88] (la combinaison des deux est récapitulée dans le théorème 3.7 de [Ser05]). Pour plus de détails on renvoie à la preuve du théorème 4.5 de [BHKT16].

Quand G n'est pas déployé, les propriétés satisfaites par les opérateurs d'excursion (à savoir les analogues de a), b), c), d) de la définition-proposition 11.3 ainsi que e') et f') du paragraphe 12.3.5) sont également préservées par la réduction modulo l'idéal maximal de \mathcal{O}_E . Pour construire les morphismes σ on a besoin de l'extension de la notion de complète réductibilité aux groupes réductifs non nécessairement connexes, qui est donnée dans le paragraphe 6 de [BMR05]. En particulier l'image d'un morphisme

$$\sigma : \pi_1(X \setminus \widehat{N}, \bar{\eta}) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{F}}_{\ell})$$

tel que le diagramme

$$(13.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{Gal}(\overline{F}/F) & \xrightarrow{\sigma} & {}^L G(\overline{\mathbb{F}}_{\ell}) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Gal}(\tilde{F}/F) & \end{array}$$

est commutatif est complètement réductible au sens de [BMR05] si et seulement si tout sous-groupe parabolique P de ${}^L G(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ contenant cette image admet un sous-groupe de Levi la contenant. En effet tous les sous-groupes paraboliques P de ${}^L G$ se surjectant sur ${}^L G/\widehat{G}$ sont de type de Richardson dans le sens de [BMR05] (dans le paragraphe I.3 de [Bor79] Borel étudie ces sous-groupes dans le cadre des L -groupes complexes, mais la description qu'il en donne s'étend à notre situation : leurs classes de conjugaison par \widehat{G} sont en bijection avec les parties $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ -invariantes de l'ensemble des racines simples et par la preuve du lemme 3.5 de [Bor79] ils sont de Richardson).

On démontre donc le théorème suivant.

Théorème 13.2. *On a une décomposition canonique de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ -modules*

$$(13.4) \quad C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{F}}_\ell) = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}^{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$$

indexée par les classes de conjugaison par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ de morphismes

$$\sigma : \pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta}) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

tels que

- σ prend ses valeurs dans ${}^L G(\mathbb{F}')$, où \mathbb{F}' est une extension finie de \mathbb{F}_ℓ , et il est continu,
- le diagramme (13.3) est commutatif,
- σ est complètement réductible dans le sens précédent.

Cette décomposition est obtenue par la décomposition spectrale de la famille commutative des opérateurs d'excursion au sens suivant: $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$ est l'espace propre généralisé correspondant au système de valeurs propres $(\xi, (\sigma(\gamma_i))_{i \in I, x})$ pour les opérateurs obtenus à partir de $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}$ par réduction modulo l'idéal maximal de \mathcal{O}_E , lorsque I et $(\gamma_i)_{i \in I}$ sont arbitraires et W, x, ξ sont définis sur \mathcal{O}_E .

Cette décomposition est compatible avec l'isomorphisme de Satake au sens suivant: pour tout σ , toute place $v \in |X| \setminus \widehat{N}$ et toute représentation V de ${}^L G_v$ définie sur \mathcal{O}_E , \mathfrak{H}_{σ} est inclus dans l'espace propre généralisé de $h_{V,v}$ pour la valeur propre $\chi_V(\sigma(\text{Frob}_v))$.

Remarque 13.3. Contrairement à la situation du théorème 11.11, il n'est sans doute pas vrai en général que \mathfrak{H}_{σ} soit inclus dans l'espace propre de $h_{V,v}$, car les opérateurs de Hecke non ramifiés modulo ℓ ne sont sans doute pas toujours diagonalisables.

Le lien entre les décompositions du théorème précédent et du théorème 11.11 est le suivant. Soit $\sigma : \pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta}) \rightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ tel que

$$\sigma^{\text{rat}} : \pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta}) \xrightarrow{\sigma} {}^L G(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \hookrightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

satisfasse les conditions du théorème 11.11. Soit $\overline{\sigma}^{\text{ss}}$ la semi-simplification de

$$\overline{\sigma} : \pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta}) \xrightarrow{\sigma} {}^L G(\overline{\mathbb{Z}}_\ell) \twoheadrightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{F}}_\ell),$$

c'est-à-dire que l'on prend un sous-groupe parabolique le plus petit possible de ${}^L G$ contenant l'image de $\overline{\sigma}$ et alors $\overline{\sigma}^{\text{ss}}$ est la projection de $\overline{\sigma}$ sur le Levi. Le théorème 13.2 implique alors que l'image de $\mathfrak{H}_{\sigma^{\text{rat}}} \cap C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ dans $C_c^{\text{cusp}}(\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{F}}_\ell)$ est incluse dans $\mathfrak{H}_{\overline{\sigma}^{\text{ss}}}^{\overline{\mathbb{F}}_\ell}$.

14. INDICATIONS SUR LE CAS DES GROUPES MÉTAPLECTIQUES

Cette section indique sommairement comment les résultats de cet article s’étendent au cas des groupes métaplectiques.

Les constructions ci-dessous sont inspirées de [Lys06] et utilisent de façon essentielle l’extension au cas métaplectique de l’équivalence de Satake géométrique due à Finkelberg et Lysenko [FL10], généralisée par Reich [Rei12] et étendue par Lysenko au cas réductif [Lys14], puis traitée dans le cas le plus général possible par Gaitsgory et Lysenko [GL16]. La littérature sur les groupes métaplectiques est très vaste et on renvoie à [GG14, Wei14, Wei15] pour des références récentes. Ces références considèrent des extensions métaplectiques très générales, associées à la donnée d’une extension de G par K_2 sur le corps de fonctions, et d’un entier N divisant $q - 1$. On va se contenter d’un cadre plus modeste, où N est comme ci-dessus et l’extension métaplectique provient des racines N -ièmes de fibrés en droites de degré pair avec de bonnes propriétés de factorisation (ces fibrés sont notés \mathcal{A} , \mathcal{B} et $\mathcal{B}_I^{(I)}$ ci-dessous). Ce cadre contient le cas de l’extension métaplectique usuelle de Sp_{2n} . Pour traiter le cas le plus général, il faudrait sans doute considérer des gerbes de factorisation (au sens de [GL16]) définies sur \mathbb{F}_q (la remarque 14.1 ci-dessous décrit la gerbe de factorisation dans le cas traité ici).

Soient $G, U, \tilde{U}, \tilde{F}, N$ et \tilde{N} comme dans la section 12. Les champs $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ et $\text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ sont définis au-dessus de U^I . Soit \mathcal{A} un fibré en droite sur Bun_G et \mathcal{B} un fibré $G(\mathcal{O})$ -équivariant sur la grassmannienne affine muni d’une donnée de factorisation. Autrement dit on se donne, pour tout ensemble fini I un fibré en droites $\mathcal{B}_I^{(I)}$ sur $\text{Gr}_I^{(I)}/G_{\sum \infty x_i}$, qui soit

- compatible à la fusion, c’est-à-dire que pour toute application $\zeta : I \rightarrow J$, on a un isomorphisme canonique

$$\Delta_\zeta^*(\mathcal{B}_I^{(I)}) \simeq \mathcal{B}_J^{(J)}$$

où Δ_ζ désigne (le quotient par $G_{\sum \infty x_i}$ de) l’inclusion

$$\text{Gr}_J^{(J)} = \text{Gr}_I^{(I)} \times_{X^I} X^J \hookrightarrow \text{Gr}_I^{(I)},$$

- compatible à la convolution c’est-à-dire que pour toute partition (I_1, \dots, I_k) de I , on ait un isomorphisme canonique entre

$$\mathcal{B}_I^{(I_1, \dots, I_k)} := \left(\pi_{(I)}^{(I_1, \dots, I_k)} \right)^* \left(\mathcal{B}_I^{(I)} \right),$$

et l’image inverse de $\prod_{j=1}^k \mathcal{B}_{I_j}^{(I_j)}$ par le morphisme évident

$$\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}/G_{\sum \infty x_i} \rightarrow \prod_{j=1}^k \text{Gr}_{I_j}^{(I_j)}/G_{\sum_{i \in I_j} \infty x_i},$$

et que $\mathcal{B}_I^{(I)}$ soit égal à \mathcal{B} lorsque I est un singleton. On suppose de plus que pour tout ensemble fini I et toute partition (I_1, \dots, I_k) de I , on a un isomorphisme entre

- le fibré sur $\text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ dont la fibre en $((x_i)_{i \in I}, (\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{G}_1 \dots \xrightarrow{\phi_k} \mathcal{G}_k))$ est $\mathcal{A}_{\mathcal{G}_0} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{G}_k}^{-1}$,
- l’image inverse de $\mathcal{B}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ par le morphisme évident $\text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)}/G_{\sum \infty x_i}$.

De plus on demande que ce dernier isomorphisme soit compatible à la fusion (c'est-à-dire fonctoriel en I) et à la convolution.

Par exemple si G est déployé de tore maximal T , on obtient un tel couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ pour toute représentation W de G (éventuellement virtuelle) telle que

$$(14.1) \quad \sum_{\alpha} \alpha \otimes \alpha \in 2X^*(T) \otimes X^*(T)$$

(où la somme porte sur les poids de W , comptés avec multiplicités). En effet on pose $\mathcal{A}_{\mathcal{G}} = \det(R\Gamma(X, W_{\mathcal{G}}))$ pour $\mathcal{G} \in \text{Bun}_G$, et $\mathcal{B}_{(x, \mathcal{G} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}')}$ égal au déterminant relatif des réseaux associés aux restrictions de $W_{\mathcal{G}}$ et $W_{\mathcal{G}'}$ au voisinage formel de x (grâce à la condition (14.1) ces fibrés sont pairs et donc les règles de Koszul ne font pas apparaître de signe négatif, cf. [Rei12] Proposition II.6.8).

On se donne un entier N divisant $q - 1$. On note μ_N le groupe fini des racines N -ièmes de l'unité dans \mathbb{F}_q^* . On se donne un caractère primitif $\zeta : \mu_N \rightarrow E^*$. On note $\widetilde{\text{Bun}}_G$ la μ_N -gerbe sur Bun_G associée au fibré en droites \mathcal{A} . Autrement dit les S -points de $\widetilde{\text{Bun}}_G$ classifient la donnée d'un morphisme $u : S \rightarrow \text{Bun}_G$, d'un fibré en droites \mathfrak{A} sur S et d'un isomorphisme $\mathfrak{A}^N \simeq u^*(\mathcal{A})$. De même on introduit la μ_N -gerbe $\widetilde{\text{Gr}}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ sur $\text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ associée au fibré en droite $\mathcal{B}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$. Son image inverse $\widetilde{\text{Hecke}}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ sur $\text{Hecke}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ est également associée au fibré en droites $\mathcal{A}_{\mathcal{G}_0} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{G}_k}^{-1}$.

Remarque 14.1. La μ_N -gerbe ci-dessus est une gerbe de factorisation au sens de [GL16]. Grâce à l'hypothèse que N divise $q - 1$, elle est définie sur \mathbb{F}_q .

Les groupes duaux des groupes métaplectiques ont été introduits par Savin après des travaux de Kazhdan et Patterson. On renvoie à [FL10, Rei12, Lys14, McN12, Wei14, Wei15, GL16] pour la définition de ces groupes (dans le cadre très général de [GL16] la notion de donnée de Langlands duale métaplectique est introduite, mais nous ne la considérons pas ici).

On suppose donc qu'il existe un groupe ${}^L\widetilde{G}$ extension de $\text{Gal}(\widetilde{F}/F)$ par ${}^L\widetilde{G}^0$, tel que l'analogie du théorème 12.16 soit vraie. Plus précisément on suppose que l'on a un foncteur canonique

$$W \mapsto \mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$$

de la catégorie des représentations E -linéaires de dimension finie de $({}^L\widetilde{G})^I$ vers la catégorie de E -faisceaux pervers (à un décalage près) sur $\widetilde{\text{Gr}}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ sur lesquels μ_N agit par ζ (et où le décalage est déterminé par la condition que l'image inverse sur $\widetilde{\text{Gr}}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ est perverse relativement à $(X \setminus \widehat{N})^I$). Les E -faisceaux pervers (à un décalage près) $\mathcal{S}_{I, W, E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ doivent être universellement localement acycliques relativement au morphisme vers $(X \setminus \widehat{N})^I$. Ils doivent vérifier les mêmes propriétés b), c), d) que dans le théorème 12.16.

L'existence d'un tel groupe est justifiée dans [FL10, Rei12, Lys14, GL16] lorsque G est déployé.

Soit I un ensemble fini, (I_1, \dots, I_k) une partition de I et W une représentation irréductible de $({}^L G)^I$.

Le morphisme évident $\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \text{Gr}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ se relève en un morphisme

$$(14.2) \quad \text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)} \rightarrow \widetilde{\text{Gr}}_I^{(I_1, \dots, I_k)} / G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}.$$

En effet la restriction de la μ_N -gerbe $\widetilde{\text{Hecke}}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ à $\text{Cht}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k)}$ est trivialisée par

$$\mathcal{A}_{\mathcal{G}_0} \otimes \mathcal{A}_{\tau \mathcal{G}_0}^{-1} = (\mathcal{A}_{\mathcal{G}_0})^{1-q} = ((\mathcal{A}_{\mathcal{G}_0})^{-\frac{q-1}{N}})^N.$$

On note $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)}$ le support de l'image inverse de $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ par (14.2).

Contrairement au cas non métaplectique, il n'est pas vrai en général que l'action de $G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ sur $\widetilde{\text{Gr}}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ se factorise par $G_{\sum_{i \in I} \infty x_i}^{\text{rad}}$, c'est-à-dire soit triviale sur $Z_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$. En revanche, en faisant comme [Lys15] 5.2.3 (qui traite le cas des tores) on montre qu'il existe une isogénie $Z^\# \rightarrow Z$ telle que

- l'action de $Z^\#_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ sur $\widetilde{\text{Gr}}_I^{(I_1, \dots, I_k)}$ soit trivialisée,
- $\text{Bun}_{Z^\#,N}$ agisse sur $\widetilde{\text{Bun}}_{G,N}$ de façon compatible avec la trivialisaton précédente.

On suppose que l'équivalence de Satake géométrique admise plus haut est telle que $Z^\#_{\sum_{i \in I} \infty x_i}$ agit naturellement sur les faisceaux $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$.

On choisit alors un réseau Ξ dans $\text{Bun}_{Z^\#,N}(\mathbb{F}_q)$ tel qu'il s'injecte dans $\text{Bun}_{Z,N}(\mathbb{F}_q)$, et on note encore Ξ son image.

Alors l'image inverse de $\mathcal{S}_{I,W,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ par (14.2) est naturellement Ξ -équivariante et on note $\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)}$ le faisceau pervers (à un décalage près) sur $\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k)} / \Xi$ qui en résulte.

On pose alors

$$(14.3) \quad \widetilde{\mathcal{H}}_{N,I,W}^{\leq \mu, E} = R(\mathfrak{p}_{N,I}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu})_! \left(\mathcal{F}_{N,I,W,\Xi,E}^{(I_1, \dots, I_k)} \Big|_{\text{Cht}_{N,I,W}^{(I_1, \dots, I_k), \leq \mu} / \Xi} \right).$$

qui ne dépend pas du choix de la partition (I_1, \dots, I_k) . On a en particulier le faisceau constructible $\widetilde{\mathcal{H}}_{N,I,V}^{0, \leq \mu, \mathbb{Q}_\ell}$ sur $(X \setminus \widehat{N})^I$.

Dans le cas où I est vide, $\widetilde{\mathcal{H}}_{N,\emptyset,1}^{0, \leq \mu, E}$ est un faisceau constructible (trivial) sur \mathbb{F}_q et on a

$$(14.4) \quad \lim_{\mu} \widetilde{\mathcal{H}}_{N,\emptyset,1}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\mathbb{F}_q} = C_\zeta(\widetilde{\text{Bun}}_{G,N}(\mathbb{F}_q) / \Xi, E)$$

où $\widetilde{\text{Bun}}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ est le μ_N -torseur sur $\text{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ dont la fibre en \mathcal{G} est l'image par le morphisme surjectif $\mathbb{F}_q^* \rightarrow \mu_N, a \mapsto a^{-\frac{q-1}{N}}$ du \mathbb{F}_q^* -torseur des trivialisations de la \mathbb{F}_q -droite $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, et où le membre de droite de (14.4) désigne l'espace des fonctions à support compact qui sont ζ -équivariantes.

La notion de cuspidalité s'étend sans modification au cas métaplectique et permet de définir un sous-espace de dimension finie $C_\zeta^{\text{cusp}}(\widetilde{\text{Bun}}_{G,N}(\mathbb{F}_q) / \Xi, E)$. Les mêmes arguments que dans la section 12 fournissent alors une décomposition de $C_\zeta^{\text{cusp}}(\widetilde{\text{Bun}}_{G,N}(\mathbb{F}_q) / \Xi, E)$ suivant des paramètres de Langlands, c'est-à-dire des classes de conjugaison par ${}^L \widetilde{G}^0(\mathbb{Q}_\ell)$ de morphismes $\sigma : \pi_1(X \setminus \widehat{N}, \overline{\eta}) \rightarrow {}^L \widetilde{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ définis sur une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ , continus et tels que l'adhérence de Zariski de l'image soit réductive. Cette décomposition est compatible avec l'isomorphisme

de Satake (dont une définition possible consiste à prendre les traces de Frobenius dans l'équivalence de Satake géométrique discutée ci-dessus) et réalise donc la correspondance de Langlands dans le sens "automorphe vers Galois". On renvoie à [McN12, GG14, Wei15] pour l'énoncé de l'isomorphisme de Satake classique et le lien avec [FL10, Lys14, GL16] lorsque G est déployé. Avec les notations de (12.2) on a

$$(14.5) \quad \widetilde{\text{Bun}}_{G,N}(\mathbb{F}_q) = \bigcup_{\alpha \in \ker^1(F,G)} G_\alpha(F) \backslash \widetilde{G}_\alpha(\mathbb{A}) / K_N$$

où $\widetilde{G}_\alpha(\mathbb{A})$ est une extension de $G_\alpha(\mathbb{A})$ par μ_N .

Remarque 14.2. On peut espérer que les résultats à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}_\ell}$ de la section 13 s'étendent au cas métaplectique mais on ne peut pas le montrer pour le moment parce que [FL10] et [Lys14] ne traitent pas les coefficients dans \mathcal{O}_E .

15. LIEN AVEC LE PROGRAMME DE LANGLANDS GÉOMÉTRIQUE

Il est évident que la coalescence et la permutation des pattes sont reliées aux structures de factorisation introduites par Beilinson et Drinfeld [BD04] et en effet notre article utilise de façon essentielle le produit de fusion sur la grassmannienne affine de Beilinson-Drinfeld dans l'équivalence de Satake géométrique [MV07, Gai07]. Par ailleurs l'idée de décomposition spectrale est familière dans le programme de Langlands géométrique, cf. [Bei06] et surtout le corollaire 4.5.5 de [Gai15] qui affirme, dans le cadre du programme de Langlands géométrique pour les D -modules (où la courbe X est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0) que la DG-catégorie des D -modules sur Bun_G est "au-dessus" du champ des systèmes locaux pour \widehat{G} . On notera curieusement que l'on ne sait pas formuler d'énoncé analogue avec les faisceaux ℓ -adiques lorsque X est sur \mathbb{F}_q (même si la conjecture d'annulation montrée par Gaitsgory [Gai04] va dans ce sens), et cependant notre article peut être considéré comme une version "classique" ou plutôt "arithmétique" d'un tel énoncé.

En fait le lien est bien plus direct qu'une simple analogie: nous allons voir que les conjectures du programme de Langlands géométrique ℓ -adique permettent de comprendre les opérateurs d'excursion et fournissent une explication très éclairante de notre approche grâce à une construction de Braverman et Varshavsky [BV06] qui généralise le fait qu'un faisceau sur Bun_G donne par les traces de Frobenius une fonction sur $\text{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$. On prend ici G déployé et N vide, c'est-à-dire $K_N = G(\mathbb{O})$ mais les considérations qui suivent resteraient valables pour tout niveau N (et même pour les groupes réductifs non déployés).

Les conjectures du programme de Langlands géométrique sont formulées à l'aide des foncteurs de Hecke: pour toute représentation W de $(\widehat{G})^I$ le foncteur de Hecke

$$\phi_{I,W} : D_c^b(\text{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \rightarrow D_c^b(\text{Bun}_G \times X^I, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

est donné par

$$\phi_{I,W}(\mathcal{F}) = q_{1,!}(q_0^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{F}_{I,W})$$

où $\text{Bun}_G \xleftarrow{q_0} \text{Hecke}_{I,W}^{(I)} \xrightarrow{q_1} \text{Bun}_G \times X^I$ est la correspondance de Hecke et

- quand W est irréductible, $\mathcal{F}_{I,W}$ est égal, à un décalage près, au faisceau d'intersection de Hecke $\text{Hecke}_{I,W}^{(I)}$,

- en général il est défini, de façon fonctorielle en W , comme l'image inverse de $\mathcal{S}_{I,W,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(I)}$ par le morphisme lisse naturel $\text{Hecke}_{I,W}^{(I)} \rightarrow \text{Gr}_{I,W}^{(I)}/G_{\sum n_i x_i}$ (où les n_i sont assez grands).

Soit \mathcal{E} un \widehat{G} -système local sur X . Alors $\mathcal{F} \in D_c^b(\text{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est dit propre pour \mathcal{E} si l'on possède, pour tout ensemble fini I et toute représentation W de $(\widehat{G})^I$, un isomorphisme $\phi_{I,W}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \boxtimes W_\mathcal{E}$, fonctoriel en W , et compatible aux produits extérieurs et à la fusion (c'est-à-dire à l'image inverse par le morphisme diagonal $X^J \rightarrow X^I$ associé à n'importe quelle application $I \rightarrow J$). Les conjectures du programme de Langlands géométrique impliquent l'existence d'un objet \mathcal{F} propre pour \mathcal{E} (et vérifiant une condition de normalisation de Whittaker qui l'empêche en particulier d'être nul). Dans le programme de Langlands géométrique X et Bun_G sont habituellement définis sur un corps algébriquement clos, mais ici nous les prenons définis sur \mathbb{F}_q .

Soit \mathcal{F} propre pour \mathcal{E} . On note $f \in C(\text{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la fonction associée à \mathcal{F} par le dictionnaire faisceaux-fonctions, c'est-à-dire que pour $x \in \text{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$, $f(x) = \text{Tr}(\text{Frob}_x, \mathcal{F}|_x)$. Soit $\Xi \subset Z(F) \backslash Z(\mathbb{A})$ un réseau. On suppose que \mathcal{F} est Ξ -équivariant, si bien que $f \in C(\text{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (quitte à diminuer Ξ cela est impliqué par une condition sur \mathcal{E} , en fait sur son image par le morphisme de \widehat{G} vers son abélianisé). Il est bien connu que f est un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke: pour toute place v et toute représentation irréductible V de \widehat{G} , $T(h_{V,v})(f) = \text{Tr}(\text{Frob}_v, V_\mathcal{E}|_v)f$, où Frob_v est un élément de Frobenius en v .

La proposition suivante (reposant sur un résultat non encore rédigé) exprime la compatibilité entre le programme de Langlands géométrique et la décomposition (0.3).

Proposition 15.1 (Conditionnelle à un résultat non encore rédigé). *Etant donné \mathcal{F} propre pour \mathcal{E} et Ξ -équivariant tel que la fonction f associée à \mathcal{F} soit cuspidale, alors f appartient à \mathcal{H}_σ où $\sigma : \pi_1(X, \overline{\eta}) \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la représentation galoisienne correspondant au système local \mathcal{E} .*

Démonstration. Dans [BV06], Braverman et Varshavsky utilisent un morphisme de trace très général, et le fait que $\text{Cht}_{I,W}^{(I)}$ est l'intersection de la correspondance de Hecke avec le graphe de l'endomorphisme de Frobenius de Bun_G , pour construire un morphisme de faisceaux sur X^I

$$(15.1) \quad \pi_{I,W}^{\mathcal{F},\mathcal{E}} : \varinjlim_{\mu} \mathcal{H}_{N,I,W}^{0,\leq \mu, \overline{\mathbb{Q}}_\ell} \rightarrow W_\mathcal{E}.$$

Ces morphismes sont fonctoriels et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -linéaires en W , et compatibles avec la coalescence des pattes et avec l'action des morphismes de Frobenius partiels (ce dernier point n'a pas encore été rédigé). De plus $\pi_{\emptyset,1}^{\mathcal{F},\mathcal{E}} : C_c(\text{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ n'est autre que $h \mapsto \int_{\text{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi} fh$. Alors on déduit des propriétés de ces morphismes $\pi_{I,W}^{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ que pour tout $I, W, x, \xi, (\gamma_i)_{i \in I}$, on a

$$S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i \in I}}(f) = \langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i \in I}.x \rangle f.$$

Ceci termine la preuve de la proposition 15.1. □

16. CAS DE GL_r

La correspondance de Langlands pour GL_r sur les corps de fonctions est établie dans [Laf02a] (après [Dri88] pour GL_2) à l'aide du principe de récurrence de Piatetski-Shapiro et Deligne. Dans cette section, qui n'apporte aucun résultat nouveau, on montre comment le théorème 0.1 fournit une nouvelle preuve de l'ingrédient de récurrence ((16.4) ci-dessous), et donc une nouvelle preuve de la correspondance de Langlands pour GL_r , si on ajoute aux arguments ci-dessous le paragraphe 6.1 et l'appendice B de [Laf02a], qui expliquent la récurrence.

Remarque 16.1. Certaines parties de la preuve du théorème 0.1 se simplifient dans le cas de GL_r . D'abord il suffit d'établir la proposition 6.2 dans le cas où $V = \Lambda^k \text{St}$ pour $k = 1, \dots, r$ (car ces représentations engendrent tout l'anneau des représentations de GL_r). Dans ce cas V est minuscule, mais comme $\text{deg}(v)$ n'est pas nécessairement égal à 1, la preuve est un petit peu plus compliquée que celle donnée dans l'introduction mais quand même beaucoup plus simple que la preuve de la proposition 6.2. D'autre part, comme on l'a dit dans la remarque 11.8, dans le cas particulier où $G = GL_r$, la proposition 11.7 (c'est-à-dire la proposition 0.37 de l'introduction) avait déjà été montrée par Taylor [Tay91] grâce à la théorie des pseudo-caractères.

La suite de cette section fournit les quelques arguments nécessaires pour donner une nouvelle preuve de l'ingrédient de récurrence de [Laf02a] à l'aide du théorème 0.1, en faisant attention à ne pas utiliser les résultats connus comme conséquences de [Laf02a] pour éviter toute circularité. C'est pour éviter une telle circularité que l'on ajoute la dernière assertion du lemme 16.2 ci-dessous (qui résulte *a posteriori* de [Laf02a] par la remarque 16.3) et qu'on montre le lemme 16.4 ci-dessous (qui lui aussi résulte *a posteriori* de [Laf02a]).

Bien que l'on soit intéressé ici par $G = GL_r$ on énonce le lemme suivant pour G quelconque (déployé pour simplifier).

Lemme 16.2. *Soit σ apparaissant dans la décomposition (11.11) du théorème 11.11. Soit V une représentation irréductible de \widehat{G} et $V_\sigma = \bigoplus_\tau \tau \otimes \mathfrak{V}_\tau$ la décomposition de la représentation semi-simple V_σ indexée par les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles τ de $\pi_1(\eta, \overline{\eta})$. Alors si $\mathfrak{V}_\tau \neq 0$, $\tau \boxtimes \tau^*$ apparaît comme un sous-quotient de la représentation*

$$(16.1) \quad H_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*} = \left(\lim_{\mu} \mathcal{H}_{N, \{1,2\}, V \boxtimes V^*}^{0, \leq \mu, E} \Big|_{\eta^{\{1,2\}}} \right)^{\text{Hf}}$$

de $(\pi_1(\eta, \overline{\eta}))^2$. Plus précisément pour tout $h \in \mathfrak{H}_\sigma$ non nul, il existe un isomorphisme entre $\tau \boxtimes \tau^*$ et un quotient de la sous-représentation de dimension finie de (16.1) engendrée par $f = \mathfrak{sp}^*(\mathcal{C}_{\delta_V}^{\mathbb{F}}(h))$, qui envoie $\text{Id}_\tau \in \tau \boxtimes \tau^*$ sur l'image de f dans ce quotient.

De plus τ est ι -pure pour tout isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

Remarque 16.3. Bien sûr la dernière assertion n'est pas un résultat nouveau car d'après le théorème VII.6 de [Laf02a] toute représentation irréductible (définie sur une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ et continue) de $\pi_1(X \setminus N, \overline{\eta})$ est ι -pure pour tout ι .

Démonstration. Quitte à augmenter E on suppose σ et \mathfrak{H}_σ définis sur E . Soit $h \neq 0$ dans \mathfrak{H}_σ . On rappelle qu'on ne sait pas si \mathcal{B} est réduite, mais comme \mathcal{B} est commutative, le sous- \mathcal{B} -module $\mathcal{B}.h$ de \mathfrak{H}_σ engendré par h admet un quotient de

dimension 1, sur lequel \mathcal{B} agit forcément par le caractère ν associé à σ par (C3). Il existe donc une forme linéaire λ sur $\mathcal{B}.h$ telle que

$$(16.2) \quad \lambda(bh) = \nu(b) \text{ pour tout } b \in \mathcal{B}.$$

Soit $\check{h} \in C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$ tel que la forme linéaire sur $C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$ donnée par

$$(16.3) \quad k \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi} \check{h} k$$

prolonge λ .

L'élément $f = \mathfrak{sp}^*(\mathcal{C}_{\delta_V}^\sharp(h))$ est aussi l'élément de (16.1) image de h par la composée

$$C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E) = H_{\{0\}, \mathbf{1}} \xrightarrow{\mathcal{H}(\delta_V)} H_{\{0\}, V \otimes V^*} \xrightarrow{\sim \chi_{\zeta_{\{1,2\}}^{-1}}} H_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*}$$

On note \check{f} la forme linéaire sur (16.1) égale à la composée de

$$H_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*} \xrightarrow{\sim \chi_{\zeta_{\{1,2\}}}} H_{\{0\}, V \otimes V^*} \xrightarrow{\mathcal{H}(\text{ev}_V)} H_{\{0\}, \mathbf{1}} = C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E)$$

et de la forme linéaire

$$C_c^{\text{cusp}}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi, E) \rightarrow E, \quad g \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi} \check{h} g.$$

Alors f et \check{f} sont invariants par l'action diagonale de $\pi_1(\eta, \bar{\eta})$ (cf. remarque 10.9). Pour tout $(\gamma, \gamma') \in (\pi_1(\eta, \bar{\eta}))^2$ on a

$$\begin{aligned} \langle \check{f}, (\gamma, \gamma') \cdot f \rangle &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N\Xi} \check{h} S_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, \gamma')} (h) \\ &= \nu(S_{\{1,2\}, V \boxtimes V^*, \delta_V, \text{ev}_V, (\gamma, \gamma')}) = \chi_V(\sigma(\gamma\gamma'^{-1})) = \chi_{V_\sigma}(\gamma\gamma'^{-1}), \end{aligned}$$

où

- la première égalité vient de la définition (10.1) des opérateurs d'excursion,
- la deuxième égalité résulte de l'hypothèse que (16.3) prolonge λ , et de (16.2),
- la troisième égalité vient du fait que ν correspond à σ par (C3).

Le quotient de la représentation de $(\pi_1(\eta, \bar{\eta}))^2$ engendrée par f par la plus grande sous-représentation sur laquelle \check{f} s'annule est alors isomorphe à la sous-représentation engendrée par χ_{V_σ} dans $C(\pi_1(\eta, \bar{\eta}), E)$ muni de l'action par translations à gauche et à droite de $(\pi_1(\eta, \bar{\eta}))^2$. D'après [Bou12] chapitre 20.5 théorème 1, cette dernière représentation est isomorphe à $\bigoplus_{\tau, \mathfrak{A}_\tau \neq 0} \tau \boxtimes \tau^*$ et on peut normaliser cet isomorphisme de telle sorte qu'il envoie χ_{V_σ} sur $\sum_{\tau, \mathfrak{A}_\tau \neq 0} \text{Id}_\tau$. On a donc montré que si $\mathfrak{A}_\tau \neq 0$, $\tau \boxtimes \tau^*$ est un quotient d'une sous-représentation de (16.1) contenant f , de telle sorte que l'image de f soit Id_τ .

On en déduit maintenant que τ est ι -pure. Comme $\tau \boxtimes \tau^*$ est un sous-quotient de (16.1), il résulte de Weil II [Del80] que $\tau \boxtimes \tau^*$ est ι -pure de poids ≤ 0 comme représentation de $\pi_1((X \setminus N)^2, \Delta(\bar{\eta}))$. Donc pour presque toute place v les valeurs propres de $\tau(\text{Frob}_v)$ ont des ι -poids égaux, dont la valeur est déterminée par le ι -poids de $\det(\tau)$. □

On rappelle que dans [Laf02a] la correspondance de Langlands est obtenue par récurrence sur r , à l'aide du principe de récurrence de Deligne, qui combine

- les équations fonctionnelles de fonctions L de Grothendieck [SGA5],
- la formule du produit de Laumon [Lau87],
- les théorèmes de multiplicité 1 [PS75, Sha74] et les théorèmes réciproques de Hecke, Weil, Piatetski-Shapiro et Cogdell [CPS94].

La récurrence est expliquée dans le paragraphe 6.1 et l'appendice B de [Laf02a] et admet comme ingrédient

(16.4) l'hypothèse de la proposition VI.11 (ii) de [Laf02a]

à savoir qu'à toute représentation automorphe cuspidale π pour GL_r de niveau N on peut associer $\sigma : \pi_1(X \setminus N, \bar{\eta}) \rightarrow GL_r(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ défini sur une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ , continu, pur de poids 0 et correspondant à π au sens de Satake en toutes les places de $X \setminus N$. Le théorème 0.1 (plus précisément le théorème 11.11) fournit une nouvelle démonstration de (16.4), grâce au lemme suivant.

Lemme 16.4. *On prend $G = GL_r$. On suppose la correspondance de Langlands connue pour $GL_{r'}$ pour tout $r' < r$. Alors tout σ apparaissant dans la décomposition (0.3) est irréductible et pur de poids 0.*

Démonstration (extraite de [Laf02a]). Soit (H_π, π) une représentation automorphe cuspidale pour GL_r telle que $(H_\pi)^{K_N}$ soit non nul et apparaisse dans \mathfrak{H}_σ . On note

$$(16.5) \quad \sigma = \bigoplus_{\tau} \tau \otimes \mathfrak{V}_\tau$$

la décomposition de la représentation semi-simple σ suivant les classes d'équivalence de représentations irréductibles τ de $\pi_1(X \setminus N, \bar{\eta})$. On suppose par l'absurde que σ n'est pas irréductible. Toute représentation τ telle que $\mathfrak{V}_\tau \neq 0$ est alors de rang $r_\tau < r$ et, par l'hypothèse de récurrence incluse dans l'énoncé, il existe une représentation automorphe cuspidale π_τ pour GL_{r_τ} associée à τ par la correspondance de Langlands pour GL_{r_τ} . On choisit un ensemble fini de places S en dehors duquel les représentations π, σ , et τ, π_τ telles que $\mathfrak{V}_\tau \neq 0$ (qui sont en nombre fini) sont non ramifiées et se correspondent par l'isomorphisme de Satake. D'après la méthode de Rankin-Selberg pour $GL_r \times GL_{r_\tau}$ (due à Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika [JS81a, JS81b, JPSS83]), $L(\tilde{\pi} \times \pi_\tau, Z)$ est un polynôme en Z donc a fortiori $L_S(\tilde{\pi} \times \pi_\tau, Z)$ est un polynôme en Z (puisque les facteurs locaux ont des pôles mais jamais de zéros). Donc

$$L_S(\tilde{\pi} \times \pi, Z) = L_S(\tilde{\pi} \times \sigma, Z) = \prod_{\tau} L_S(\tilde{\pi} \times \tau, Z)^{\dim \mathfrak{V}_\tau} = \prod_{\tau} L_S(\tilde{\pi} \times \pi_\tau, Z)^{\dim \mathfrak{V}_\tau}$$

n'a pas de pôle. Pourtant d'après le théorème B.10 de [Laf02a] (dû à Jacquet, Shahidi, Shalika), $L_S(\tilde{\pi} \times \pi, Z)$ a un pôle en $Z = q^{-1}$, ce qui amène une contradiction. Donc on sait maintenant que σ est irréductible. Pour tout ι on sait d'après le lemme 16.2 que σ est ι -pur et la connaissance de son déterminant (par la théorie du corps de classe) implique alors que le ι -poids est nul. Donc σ est pur de poids 0. \square

Remarque 16.5. On mentionne pour le lecteur que les conséquences déjà très importantes de la correspondance de Langlands pour GL_r , expliquées dans le chapitre VII de [Laf02a], ont été encore étendues dans des travaux récents de Deligne et Drinfeld [Del12, EK12, Dri12] sur les questions de rationalité des traces des Frobenius et sur l'indépendance de ℓ pour les faisceaux ℓ -adiques sur les variétés lisses sur \mathbb{F}_q .

REMERCIEMENTS

La première partie de cet article (jusqu'à la section 6) est issue d'un travail en cours en commun avec Jean-Benoît Bost, qui est à l'origine du travail exposé dans cet article mais n'est pas encore achevé. Ce travail en commun a été commencé plus d'un an avant que n'émergent les idées du présent article, qui n'existerait évidemment pas sans lui. De très longues discussions avec Alain Genestier ont été déterminantes et sans elles cet article n'existerait pas non plus. Je remercie aussi Jean-Benoît Bost et Alain Genestier pour leur aide dans la mise au point de nombreux arguments.

Cet article repose doublement sur des travaux de Vladimir Drinfeld, sur les chtoucas et sur le programme de Langlands géométrique, et je lui exprime ma grande reconnaissance.

Je remercie Yakov Varshavsky pour ses explications et pour m'avoir communiqué le preprint non publié [BV06]. Je remercie Vladimir Drinfeld et Dennis Gaitsgory pour leurs nombreuses explications. Je remercie Laurent Lafforgue pour des discussions et l'idée du titre. Je remercie Sergey Lysenko pour son aide dans le cas métaplectique et de nombreuses discussions. Je remercie Jochen Heinloth pour son aide concernant les modèles de Bruhat-Tits. Je remercie Gebhard Böckle, Michael Harris, Chandrashekhara Khare et Jack Thorne pour avoir trouvé l'énoncé de la proposition 10.10 qui rend la rédaction plus limpide et est de plus utilisé dans leur preprint [BHKT16]. Je remercie Gaëtan Chenevier, Pierre Deligne, Ed Frenkel, Nicholas Katz, Erez Lapid, Gérard Laumon, Colette Moeglin, Sophie Morel, Ngô Bao Châu, Ngô Dac Tuan, Jean-Pierre Serre, Jean-Loup Waldspurger, Cong Xue et Xinwen Zhu pour leurs explications et leurs remarques. Je remercie les rapporteurs anonymes pour avoir relu le texte de façon extrêmement soigneuse, corrigé des erreurs et apporté des améliorations.

Je tiens à remercier vivement le CNRS. Le programme de Langlands est un sujet très différent de ma spécialité d'origine et je n'aurais pas pu m'y consacrer sans la grande liberté laissée aux chercheurs pour mener à bien leurs travaux. Je remercie aussi mes collègues du MAPMO et de l'Institut Fourier pour leur soutien.

BIBLIOGRAPHIE

- [SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* (French), Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61]; Directed by A. Grothendieck; With two papers by M. Raynaud; Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin; MR0354651 (50 #7129)]. MR2017446
- [SGA4-2] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3* (French), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4); Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat. MR0354654
- [SGA5] *Cohomologie l -adique et fonctions L* (French), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5); Edité par Luc Illusie. MR0491704
- [ARH] Esmail Arasteh Rad and Urs Hartl, *Uniformizing The Moduli Stacks of Global G -Shtukas*, [arXiv:1302.6351](https://arxiv.org/abs/1302.6351).
- [Art89] James Arthur, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque **171-172** (1989), 13–71. Orbites unipotentes et représentations, II. MR1021499

- [BR17] Alexandru Ioan Badulescu and Philippe Roche, *Global Jacquet-Langlands correspondence for division algebras in characteristic p* , Int. Math. Res. Not. IMRN **7** (2017), 2172–2206. MR3658194
- [BMR05] Michael Bate, Benjamin Martin, and Gerhard Röhrle, *A geometric approach to complete reducibility*, Invent. Math. **161** (2005), no. 1, 177–218. MR2178661
- [BL95] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, *Un lemme de descente*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **320** (1995), no. 3, 335–340. MR1320381
- [Beh91] Kai Behrend, *The Lefschetz trace formula for the moduli stack of principal bundles*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1991. Thesis (Ph.D.)—University of California, Berkeley. MR2686745
- [Beh96] Kai Behrend, *Moduli spaces for vector bundles with level structures on algebraic curves. Diplomarbeit, non published, 1996. Summary available*, <http://www.math.ubc.ca/~behrend/diplomsum.pdf>.
- [BBD82] Alexander Beilinson, Joseph Bernstein, and Pierre Deligne, *Faisceaux pervers*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, 1982, pp. 5–171. MR751966
- [BD99] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld, *Quantization of Hitchin’s integrable system and Hecke eigensheaves*, 1999, <http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html>.
- [BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld, *Chiral algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 51, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. MR2058353
- [Bei06] Alexander Beilinson, *Langlands parameters for Heisenberg modules*, Studies in Lie theory, Progr. Math., vol. 243, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, pp. 51–60. MR2214245
- [BC09] Joël Bellaïche and Gaëtan Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque **324** (2009), xii+314. MR2656025
- [BF08] Roman Bezrukavnikov and Michael Finkelberg, *Equivariant Satake category and Kostant-Whittaker reduction*, Mosc. Math. J. **8** (2008), no. 1, 39–72, 183. MR2422266
- [Bla94] Don Blasius, *On multiplicities for $SL(n)$* , Israel J. Math. **88** (1994), no. 1–3, 237–251. MR1303497
- [BR94] Don Blasius and Jonathan D. Rogawski, *Zeta functions of Shimura varieties*, Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 525–571. MR1265563
- [BHK16] Gebhard Böckle, Michael Harris, Chandrashekar Khare, and Jack Thorne, *\widehat{G} -local systems on smooth projective curves are potentially automorphic.*, 2016, [arXiv:1609.03491](https://arxiv.org/abs/1609.03491).
- [Bor79] Armand Borel, *Automorphic L -functions*, Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 27–61. MR546608
- [Bor91] Armand Borel, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991. MR1102012
- [BJ79] Armand Borel and Hervé Jacquet, *Automorphic forms and automorphic representations*, Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 189–207. With a supplement “On the notion of an automorphic representation” by R. P. Langlands. MR546598
- [Bou12] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples*, Springer, Berlin, 2012. Second revised edition of the 1958 edition [MR0098114]. MR3027127
- [BT84] François Bruhat and Jacques Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d’une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **60** (1984), 197–376. MR756316
- [BG02] Alexander Braverman and Dennis Gaitsgory, *Geometric Eisenstein series*, Invent. Math. **150** (2002), no. 2, 287–384. MR1933587
- [BV06] Alexander Braverman and Yakov Varshavsky, *From automorphic sheaves to the cohomology of the moduli spaces of F -bundles*, 2006. Unpublished preprint.

- [BG14] Kevin Buzzard and Toby Gee, *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*, Automorphic forms and Galois representations. Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 414, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, pp. 135–187. MR3444225
- [Car79] Pierre Cartier, *Representations of p -adic groups: a survey*, Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 111–155. MR546593
- [Che13] Gaëtan Chenevier, *Représentations galoisiennes automorphes et conséquences arithmétiques des conjectures de Langlands et Arthur. Habilitation à diriger des recherches*, 2013, <http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/hdr/HDR.pdf>.
- [Che14] Gaëtan Chenevier, *The p -adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group and pseudorepresentations over arbitrary rings*, Automorphic forms and Galois representations. Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 414, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, pp. 221–285. MR3444227
- [CM82] Bruce Chandler and Wilhelm Magnus, *The history of combinatorial group theory. A case study in the history of ideas*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1982. MR680777
- [Cvi08] Predrag Cvitanović, *Group theory: Birdtracks, Lie's, and exceptional groups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. MR2418111
- [CPS94] James W. Cogdell and Ilya I. Piatetski-Shapiro, *Converse theorems for GL_n* , Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **79** (1994), 157–214. MR1307299
- [Del71] Pierre Deligne, *Formes modulaires et représentations l -adiques*, Séminaire Bourbaki. Vol. 1968/69: Exposés 347–363, Lecture Notes in Math., vol. 175, Springer, Berlin, 1971, pp. Exp. No. 355, 139–172. MR3077124
- [Del80] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52** (1980), 137–252. MR601520
- [Del90] Pierre Deligne, *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 111–195. MR1106898
- [Del12] Pierre Deligne, *Finitude de l'extension de \mathbb{Q} engendrée par des traces de Frobenius, en caractéristique finie*, Mosc. Math. J. **12** (2012), no. 3, 497–514, 668. MR3024820
- [Dri80] Vladimir Drinfeld, *Langlands' conjecture for $GL(2)$ over functional fields*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, pp. 565–574. MR562656
- [Dri87a] Vladimir Drinfeld, *Moduli varieties of F -sheaves* (Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (1987), no. 2, 23–41; English transl., Func. Anal. and Appl. **21** (1987), 107–122. MR902291
- [Dri87b] Vladimir Drinfeld, *Cohomology of compactified moduli varieties of F -sheaves of rank 2* (Russian), Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **162** (1987), no. Avtomorfn. Funkts. i Teor. Chisel. III, 107–158, 189; English transl., J. Soviet Math. **46** (1989), no. 2, 1789–1821. MR918745
- [Dri88] Vladimir Drinfeld, *Proof of the Petersson conjecture for $GL(2)$ over a global field of characteristic p* (Russian), Funktsional. Anal. i Prilozhen. **22** (1988), no. 1, 34–54, 96; English transl., Funct. Anal. Appl. **22** (1988), no. 1, 28–43. MR936697
- [DS95] Vladimir Drinfeld and Carlos Simpson, *B -structures on G -bundles and local triviality*, Math. Res. Lett. **2** (1995), no. 6, 823–829. MR1362973
- [Dri12] Vladimir Drinfeld, *On a conjecture of Deligne*, Mosc. Math. J. **12** (2012), no. 3, 515–542, 668. MR3024821
- [Dri15] Vladimir Drinfeld, *On the pro-semisimple completion of the fundamental group of a smooth variety over a finite field*, 2015, [arXiv:1509.06059](https://arxiv.org/abs/1509.06059).
- [Eis95] David Eisenbud, *Commutative algebra: With a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1322960
- [EK12] Hélène Esnault and Moritz Kerz, *A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne)*, Acta Math. Vietnam. **37** (2012), no. 4, 531–562. MR3058662
- [FC90] Gerd Faltings and Ching-Li Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas

- (3)], vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990. With an appendix by David Mumford. MR1083353
- [Fal02] Gerd Faltings, *Group schemes with strict \mathcal{O} -action*, Mosc. Math. J. **2** (2002), no. 2, 249–279. Dedicated to Yuri I. Manin on the occasion of his 65th birthday. MR1944507
- [FL10] Michael Finkelberg and Sergey Lysenko, *Twisted geometric Satake equivalence*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), no. 4, 719–739. MR2684259
- [Fro1896] Ferdinand G. Frobenius, *Über die Primfactoren der Gruppendeterminante*, Ges. Abh III (S'ber. Akad. Wiss. Berlin) 1343–1382 (1896).
- [Gai01] Dennis Gaitsgory, *Construction of central elements in the affine Hecke algebra via nearby cycles*, Invent. Math. **144** (2001), no. 2, 253–280. MR1826370
- [Gai04] Dennis Gaitsgory, *On a vanishing conjecture appearing in the geometric Langlands correspondence*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 2, 617–682. MR2123934
- [Gai07] Dennis Gaitsgory, *On de Jong's conjecture*, Israel J. Math. **157** (2007), 155–191. MR2342444
- [Gai15] Dennis Gaitsgory, *Outline of the proof of the geometric Langlands conjecture for GL_2* , De la Géométrie Algébrique aux Formes Automorphes (II): Une collection d'articles en l'honneur du soixantième anniversaire de Gérard Laumon, Astérisque, vol. 370, Soc. Math. France, 2015, pp. 1–112. MR3364744
- [GL16] Dennis Gaitsgory and Sergey Lysenko, *Parameters and duality for the metaplectic geometric Langlands theory.*, 2016, [arXiv:1608.00284](https://arxiv.org/abs/1608.00284).
- [GG14] Wee Teck Gan and Fan Gao, *The Langlands-Weissman Program for Brylinski-Deligne extensions*, 2014, [arXiv:1409.4039](https://arxiv.org/abs/1409.4039).
- [GT05] Alain Genestier and Jacques Tilouine, *Systèmes de Taylor-Wiles pour GSp_4* , Formes automorphes. II. Le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque **302** (2005), 177–290. MR2234862
- [GL11] Alain Genestier and Vincent Lafforgue, *Théorie de Fontaine en égales caractéristiques*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **44** (2011), no. 2, 263–360. MR2830388
- [GL17] Alain Genestier and Vincent Lafforgue, *Choucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands locale*, 2017, [arXiv:1709.00978](https://arxiv.org/abs/1709.00978).
- [Gin95] Victor Ginzburg, *Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality*, 1995, [arXiv:alg-geom/9511007](https://arxiv.org/abs/alg-geom/9511007).
- [Gro98] Benedict H. Gross, *On the Satake isomorphism*, Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, pp. 223–237. MR1696481
- [Har74] Günter Harder, *Chevalley groups over function fields and automorphic forms*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 249–306. MR0563090
- [Hei10] Jochen Heinloth, *Uniformization of \mathcal{G} -bundles*, Math. Ann. **347** (2010), no. 3, 499–528. MR2640041
- [HS10] Jochen Heinloth and Alexander H. W. Schmitt, *The cohomology rings of moduli stacks of principal bundles over curves*, Doc. Math. **15** (2010), 423–488. MR2657374
- [Hil93] David Hilbert, *Ueber die vollen Invariantensysteme* (German), Math. Ann. **42** (1893), no. 3, 313–373. MR1510781
- [HS12] Kaoru Hiraga and Hiroshi Saito, *On L -packets for inner forms of SL_n* , Mem. Amer. Math. Soc. **215** (2012), no. 1013, vi+97. MR2918491
- [HS06] Craig Huneke and Irena Swanson, *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 336, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. MR2266432
- [HL10] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, 2nd ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. MR2665168
- [JS81a] Hervé Jacquet and Joseph A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic representations. I*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 3, 499–558. MR618323
- [JS81b] Hervé Jacquet and Joseph A. Shalika, *On Euler products and the classification of automorphic forms. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 4, 777–815. MR623137
- [JPSS83] Hervé Jacquet, Ilya I. Piatetskii-Shapiro, and Joseph A. Shalika, *Rankin-Selberg convolutions*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 2, 367–464. MR701565

- [Jan07] Uwe Jannsen, *On finite-dimensional motives and Murre's conjecture*, Algebraic cycles and motives. Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 344, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, pp. 112–142. MR2187152
- [Kaz79] David Kazhdan, *An introduction to Drinfeld's "Shtuka"*, Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 347–356. MR546623
- [KV13] David Kazhdan and Yakov Varshavsky, *On the cohomology of the moduli spaces of F -bundles: stable cuspidal Deligne-Lusztig part, in preparation*, 2013. Work announced in [Var05].
- [Kos59] Bertram Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. **81** (1959), 973–1032. MR0114875
- [Kot84] Robert E. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 3, 611–650. MR757954
- [Kot86] Robert E. Kottwitz, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), no. 3, 365–399. MR858284
- [Kot90] Robert E. Kottwitz, *Shimura varieties and λ -adic representations*, Automorphic forms, Shimura varieties, and L -functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, pp. 161–209. MR1044820
- [LL79] Jean-Pierre Labesse and Robert P. Langlands, *L -indistinguishability for $SL(2)$* , Canad. J. Math. **31** (1979), no. 4, 726–785. MR540902
- [Laf97] Laurent Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*, Astérisque **243** (1997), ii+329. MR1600006
- [Laf98] Laurent Lafforgue, *Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 4, 1001–1036. MR1609893
- [Laf02a] Laurent Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), no. 1, 1–241. MR1875184
- [Laf02b] Laurent Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld, formule des traces d'Arthur-Selberg et correspondance de Langlands*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 383–400. MR1989194
- [Lan70] Robert P. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, Lectures in modern analysis and applications, III, Springer, Berlin, 1970, pp. 18–61. Lecture Notes in Math., Vol. 170. MR0302614
- [Lap99] Erez M. Lapid, *Some results on multiplicities for $SL(n)$* , Israel J. Math. **112** (1999), 157–186. MR1714998
- [Lar94] Michael Larsen, *On the conjugacy of element-conjugate homomorphisms*, Israel J. Math. **88** (1994), no. 1-3, 253–277. MR1303498
- [Lar96] Michael Larsen, *On the conjugacy of element-conjugate homomorphisms. II*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **47** (1996), no. 185, 73–85. MR1380951
- [LO08a] Yves Laszlo and Martin Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks. I. Finite coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **107** (2008), 109–168. MR2434692
- [LO08b] Yves Laszlo and Martin Olsson, *The six operations for sheaves on Artin stacks. II. Adic coefficients*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **107** (2008), 169–210. MR2434693
- [Lau04] Eike S. Lau, *On generalised D -shtukas*, Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], vol. 369, Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 2004. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Bonn, 2004. MR2206061
- [Lau07] Eike S. Lau, *On degenerations of D -shtukas*, Duke Math. J. **140** (2007), no. 2, 351–389. MR2359823
- [Lau87] Gérard Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **65** (1987), 131–210. MR908218
- [Lau96] Gérard Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I: Geometry, counting of points and local harmonic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 41, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. MR1381898

- [Lau97a] Gérard Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part II: Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence; With an appendix by Jean-Loup Waldspurger*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 56, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. MR1439250
- [Lau97b] Gérard Laumon, *Drinfeld shtukas*, Vector bundles on curves—new directions (Cetraro, 1995), Lecture Notes in Math., vol. 1649, Springer, Berlin, 1997, pp. 50–109. MR1605028
- [LMB00] Gérard Laumon and Laurent Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 39, Springer-Verlag, Berlin, 2000. MR1771927
- [LRS93] Gérard Laumon, Michael Rapoport, and Ulrich Stuhler, *\mathcal{D} -elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), no. 2, 217–338. MR1228127
- [LM85] Alexander Lubotzky and Andy R. Magid, *Varieties of representations of finitely generated groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **58** (1985), no. 336, xi+117. MR818915
- [Lus83] George Lusztig, *Singularities, character formulas, and a q -analog of weight multiplicities*, Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), Astérisque, vol. 101, Soc. Math. France, Paris, 1983, pp. 208–229. MR737932
- [Lys06] Sergey Lysenko, *Moduli of metaplectic bundles on curves and theta-sheaves*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 3, 415–466. MR2265675
- [Lys11] Sergey Lysenko, *Geometric theta-lifting for the dual pair $\mathrm{SO}_{2m}, \mathrm{Sp}_{2n}$* , Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **44** (2011), no. 3, 427–493. MR2839456
- [Lys14] Sergey Lysenko, *Twisted geometric Satake equivalence: reductive case*, 2014, arXiv:1411.6782.
- [Lys15] Sergey Lysenko, *Twisted geometric Langlands correspondence for a torus*, Int. Math. Res. Not. IMRN **18** (2015), 8680–8723. MR3417689
- [McN12] Peter J. McNamara, *Principal series representations of metaplectic groups over local fields*, Multiple Dirichlet series, L-functions and automorphic forms, Progr. Math., vol. 300, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, pp. 299–327. MR2963537
- [MV07] Ivan Mirković and Kari Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. (2) **166** (2007), no. 1, 95–143. MR2342692
- [MFK94] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)], vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1994. MR1304906
- [NBC99] Báó Châu Ngô, *Faisceaux pervers, homomorphisme de changement de base et lemme fondamental de Jacquet et Ye*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), no. 5, 619–679. MR1710755
- [NBC06a] Bao Châu Ngô, *\mathcal{D} -chtoucas de Drinfeld à modifications symétriques et identité de changement de base*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 2, 197–243. MR2245532
- [NBC06b] Bao Châu Ngô, *Fibration de Hitchin et endoscopie*, Invent. Math. **164** (2006), no. 2, 399–453. MR2218781
- [NN08] Bao Châu Ngô and Tuân Ngô Dac, *Comptage de G -chtoucas: la partie régulière elliptique*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), no. 1, 181–203. MR2398149
- [NDT07] Tuân Ngô Dac, *Compactification des champs de chtoucas et théorie géométrique des invariants*, Astérisque **313** (2007), 124. MR2419827
- [NDT09] Tuân Ngô Dac, *Sur le développement spectral de la formule des traces d’Arthur-Selberg sur les corps de fonctions*, Bull. Soc. Math. France **137** (2009), no. 4, 545–586. MR2572181
- [NDT11] Tuân Ngô Dac, *Formule des traces d’Arthur-Selberg pour les corps de fonctions II*, <http://www.math.univ-paris13.fr/~ngodac/traceformula2.pdf>.
- [PR08] Georgios Pappas and Michael Rapoport, *Twisted loop groups and their affine flag varieties*, Adv. Math. **219** (2008), no. 1, 118–198. With an appendix by T. Haines and Rapoport. MR2435422
- [Pet09] Elisha Peterson, *On a Diagrammatic Proof of the Cayley-Hamilton Theorem*, 2009, arXiv:0907.2364.

- [PS75] Ilya I. Piatetski-Shapiro, *Euler subgroups*, Lie groups and their representations (Proc. Summer School, Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), Halsted, New York, 1975, pp. 597–620. MR0406935
- [Poi84] Henri Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires*, Acta Math. **4** (1884), no. 1, 201–312. MR1554639
- [Pro76] Claudio Procesi, *The invariant theory of $n \times n$ matrices*, Advances in Math. **19** (1976), no. 3, 306–381. MR0419491
- [Pro87] Claudio Procesi, *A formal inverse to the Cayley-Hamilton theorem*, J. Algebra **107** (1987), no. 1, 63–74. MR883869
- [Rei12] Ryan Cohen Reich, *Twisted geometric Satake equivalence via gerbes on the factorizable Grassmannian*, Represent. Theory **16** (2012), 345–449. MR2956088
- [Ric88] Roger W. Richardson, *Conjugacy classes of n -tuples in Lie algebras and algebraic groups*, Duke Math. J. **57** (1988), no. 1, 1–35. MR952224
- [Ric14] Timo Richarz, *A new approach to the geometric Satake equivalence*, Doc. Math. **19** (2014), 209–246. MR3178249
- [Rou96] Raphaël Rouquier, *Caractérisation des caractères et pseudo-caractères*, J. Algebra **180** (1996), no. 2, 571–586. MR1378546
- [Sat63] Ichirō Satake, *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **18** (1963), 5–69. MR0195863
- [Sch15] Simon Schieder, *The Harder-Narasimhan stratification of the moduli stack of G -bundles via Drinfeld’s compactifications*, Selecta Math. (N.S.) **21** (2015), no. 3, 763–831. MR3366920
- [Ser05] Jean-Pierre Serre, *Complète réductibilité*, Astérisque **299** (2005), Exp. No. 932, viii, 195–217. Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004. MR2167207
- [Ses82] C. S. Seshadri, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque, vol. 96, Société Mathématique de France, Paris, 1982. Notes written by J.-M. Drezet from a course at the École Normale Supérieure, June 1980. MR699278
- [Sha74] Joseph A. Shalika, *The multiplicity one theorem for GL_n* , Ann. of Math. (2) **100** (1974), 171–193. MR0348047
- [Sor00] Christoph Sorger, *Lectures on moduli of principal G -bundles over algebraic curves*, School on Algebraic Geometry (Trieste, 1999), ICTP Lect. Notes, vol. 1, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2000, pp. 1–57. MR1795860
- [Tay91] Richard Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 281–332. MR1115109
- [TNQ11] Nguyen Quoc Thang, *On Galois cohomology and weak approximation of connected reductive groups over fields of positive characteristic*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **87** (2011), no. 10, 203–208. MR2863415
- [Var04] Yakov Varshavsky, *Moduli spaces of principal F -bundles*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), no. 1, 131–166. MR2061225
- [Var05] Yakov Varshavsky, *A proof of a generalization of Deligne’s conjecture*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **11** (2005), 78–88. MR2176068
- [Var07] Yakov Varshavsky, *Lefschetz-Verdier trace formula and a generalization of a theorem of Fujiwara*, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), no. 1, 271–319. MR2306659
- [Var09] Yakov Varshavsky, *Towards Langlands correspondence over function fields for split reductive groups*, Symmetries in algebra and number theory (SANT), Universitätsverlag Göttingen, Göttingen, 2009, pp. 139–147. MR2882571
- [Var16] Yakov Varshavsky, *Communication personnelle, janvier 2016*.
- [Vin96] Ernest B. Vinberg, *On invariants of a set of matrices*, J. Lie Theory **6** (1996), no. 2, 249–269. MR1424635
- [Wan11] Jonathan Wang, *The moduli stack of G -bundles*, 2011, [arXiv:1104.4828](https://arxiv.org/abs/1104.4828).
- [Wan17] Jonathan Wang, *On an Invariant Bilinear Form on the Space of Automorphic Forms via Asymptotics*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2017. Thesis (Ph.D.)—The University of Chicago. MR3705922
- [Wan07] Song Wang, *Dimension Data, Local and Global Conjugacy in Reductive Groups*, 2007, [arXiv:0707.0144v2](https://arxiv.org/abs/0707.0144v2).
- [Wan12] Song Wang, *On dimension data and local vs. global conjugacy*, Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, AMS/IP Stud. Adv. Math., 51, pt. 1, vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, pp. 365–382. MR2908081

- [Wan15] Song Wang, *On local and global conjugacy*, J. Algebra **439** (2015), 334–359. MR3373375
- [Wei14] Martin H. Weissman, *Split metaplectic groups and their L -groups*, J. Reine Angew. Math. **696** (2014), 89–141. MR3276164
- [Wei15] Martin H. Weissman, *L -groups and parameters for covering groups*, 2015, arXiv:1507.01042.
- [Wil88] Andrew Wiles, *On ordinary λ -adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 3, 529–573. MR969243
- [XZ17] Liang Xiao and Xinwen Zhu, *Cycles on Shimura varieties via geometric Satake*, 2017, arXiv:1707.05700.
- [Xue17] Cong Xue, *Cohomologie cuspidale des champs de chtoucas*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (2017).
- [Zhu15] Xinwen Zhu, *The geometric Satake correspondence for ramified groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **48** (2015), no. 2, 409–451. MR3346175

CNRS ET INSTITUT FOURIER, UMR 5582, UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES, 100 RUE DES MATHS, 38610 GIÈRES, FRANCE

Email address: vlafforg@math.cnrs.fr

URL: <http://vlafforg.perso.math.cnrs.fr>