

# SUR LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES CERTAINES OPÉRATIONS LINÉAIRES. III

NICOLAE DINCLEANU

**Introduction.** Soient  $T$  un espace compact,  $\mathfrak{B}$  l'ensemble des parties boréliennes de  $T$ ;  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,  $\mathcal{C}_E(T)$  l'espace des applications continues de  $T$  dans  $E$  et  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $E$  dans  $F$ . Une mesure vectorielle sur  $T$  est une fonction définie sur  $\mathfrak{B}$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , dénombrablement additive. Dans le §1 on construit une intégrale par rapport à une mesure vectorielle, pour une certaine classe d'applications de  $T$  dans  $E$ . Les mesures *régulières* sont uniquement déterminées par l'intégrale des fonctions de  $\mathcal{C}_E(T)$  (Théorème 1). Dans le §2 on montre (Théorème 2) qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des applications linéaires *majorées*  $m$  de  $\mathcal{C}_E(T)$  dans  $F$  et l'ensemble des mesures vectorielles *régulières*  $\mathbf{m}$  sur  $T$ , donnée par l'égalité

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t) d\mathbf{m}(t) \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_E(T).$$

La norme de  $m$  est égale à la semi-variation totale de  $\mathbf{m}$ , et aussi à la variation totale de  $\mathbf{m}$  si  $F = \mathbb{C}$ .

Si  $E$  et  $F$  sont de type dénombrable et  $F$  est dual d'un espace de Banach, une mesure vectorielle régulière  $\mathbf{m}$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{m}(A) = \int_A \mathbf{U}(t) d\tilde{\mu}(t) \quad \text{pour } A \in \mathfrak{B}$$

où  $\tilde{\mu}$  est la variation de  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{U}$  une certaine application de  $T$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  (Théorème 3).

Si  $E = F = A$ , où  $A$  est une algèbre de Banach à élément unité, et  $m$  une application linéaire *majorée* de  $\mathcal{C}_A(T)$  dans  $A$ , alors la mesure vectorielle correspondante  $\mathbf{m}$  est à valeurs dans  $A$  (et non plus dans  $\mathcal{L}(A)$ ) si et seulement si  $m(ax) = am(x)$  pour tout  $a \in A$  et  $x \in \mathcal{C}_A(T)$  (Théorème 4).

Les résultats précédents sont démontrés dans le cas plus général où, au lieu d'un seul espace  $E$ , on considère une famille d'espaces de Banach  $(E(t))_{t \in T}$ , donc au lieu des fonctions définies sur  $T$  à valeurs dans  $E$ , on considère des champs de vecteurs<sup>1</sup>  $\mathbf{x}$  définies sur  $T$ , tels que  $\mathbf{x}(t) \in E(t)$  quel que soit  $t \in T$ .<sup>2</sup>

Received by the editors June 18, 1958.

<sup>1</sup> En ce qui concerne les champs de vecteurs et les espaces  $L^p_{\mathfrak{G}}$  voir [7].

<sup>2</sup> Les principaux résultats de cet article ont été exposés dans [4].

## 1. INTÉGRATION PAR RAPPORT À UNE MESURE VECTORIELLE

1. **Fonctions vectorielles d'ensemble.** Soit  $T$  un espace compact,  $X$  une espace de Banach et  $\mathbf{m}$  une fonction d'ensemble définie sur  $\mathfrak{B}$  à valeurs dans  $X$ . Pour  $A \in \mathfrak{B}$  posons<sup>3</sup>

$$(1) \quad \tilde{\mu}(A) = \sup \sum_i | \mathbf{m}(A_i) |,$$

le sup. étant considéré pour toutes les partitions finies  $(A_i)$  de  $A$  en ensembles boréliens. La fonction d'ensemble  $\tilde{\mu}$  est appelée la *variation de  $\mathbf{m}$* ;  $\tilde{\mu}(A)$  est la *variation de  $\mathbf{m}$  sur  $A$*  et  $\tilde{\mu}(T)$  la *variation totale de  $\mathbf{m}$* . On dit que  $\mathbf{m}$  est à *variation finie* si  $\tilde{\mu}(T) < \infty$ . On vérifie aisément que  $\tilde{\mu}$  est une fonction positive et croissante; si  $\mathbf{m}$  est dénombrablement additive,  $\tilde{\mu}$  l'est aussi. Pour tout ensemble  $A \in \mathfrak{B}$ , on a

$$(2) \quad | \mathbf{m}(A) | \leq \tilde{\mu}(A).$$

On dit que  $\mathbf{m}$  est *régulière*, si pour tout nombre  $\epsilon > 0$  et tout  $A \in \mathfrak{B}$ , il existe un ensemble compact  $K \subset A$  et un ensemble ouvert  $U \supset A$ , tels que si  $A' \in \mathfrak{B}$  et  $K \subset A' \subset U$ , alors  $| \mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(A') | \leq \epsilon$ .

On appelle *mesure vectorielle sur  $T$ , à valeurs dans  $X$* , toute fonction d'ensemble  $\mathbf{m}$  définie sur  $\mathfrak{B}$  à valeurs dans  $X$ , *dénombrablement additive*.

PROPOSITION 1. *Une mesure vectorielle sur  $T$ , à valeurs dans  $X$  et à variation finie,  $\mathbf{m}$ , est régulière si et seulement si sa variation  $\tilde{\mu}$  est régulière.*

DÉMONSTRATION. Supposons  $\tilde{\mu}$  régulière et soient  $A \in \mathfrak{B}$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe un compact  $K \subset A$  et un ouvert  $U \supset A$  tels que  $\tilde{\mu}(U - K) \leq \epsilon/2$ . Soit  $A' \in \mathfrak{B}$  tel que  $K \subset A' \subset U$  et montrons qu'on a

$$| \mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(A') | \leq \epsilon.$$

Pour ce faire, posons  $B = A \cap A'$  et  $C = A' - B$ ; on a  $B \cap C = \emptyset$ ,  $A' = B \cup C$ ,  $C \subset U - K$  et  $A - B \subset U - K$ . Alors

$$\begin{aligned} & | \mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(A') | \\ &= | \mathbf{m}(A) - \mathbf{m}(B) - \mathbf{m}(C) | = | \mathbf{m}(A - B) - \mathbf{m}(C) | \\ &\leq | \mathbf{m}(A - B) | + | \mathbf{m}(C) | \leq \tilde{\mu}(A - B) + \tilde{\mu}(C) \\ &\leq 2\tilde{\mu}(U - K) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Inversement, supposons  $\mathbf{m}$  régulière et soient  $A \in \mathfrak{B}$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe une partition  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $A$  en ensembles boréliens, telle que

<sup>3</sup> La norme d'un élément  $a \in X$  sera notée par  $|a|$ .

$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{i=1}^n |\mathbf{m}(A_i)| + \epsilon/2$ . Pour chaque  $i$ , il existe un ensemble compact  $K_i \subset A_i$  tel que  $|\mathbf{m}(A_i) - \mathbf{m}(K_i)| \leq \epsilon/2^{i+1}$ . Posons  $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ . Alors  $K \subset A$  et  $\bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(K) \leq \sum_i |\mathbf{m}(A_i)| - \sum_i |\mathbf{m}(K_i)| + \epsilon/2 \leq \sum_i |\mathbf{m}(A_i) - \mathbf{m}(K_i)| + \epsilon/2 \leq \epsilon$ , donc

$$\bar{\mu}(A) = \sup \{ \bar{\mu}(K) \mid K \subset A, K \text{ compact} \},$$

et cette condition est suffisante pour que  $\bar{\mu}$  soit régulière [10, §52, Théorème 6].

2. **Mesures vectorielles à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, F)$ .** Soient  $\mathcal{E} = (E(t))_{t \in T}$  une famille d'espaces de Banach et  $F$  un espace de Banach. Désignons par  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x}$  définis sur  $T$  tels que  $\mathbf{x}(t) \in E(t)$  quel que soit  $t \in T$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$  on notera par  $|\mathbf{x}|$  la fonction numérique  $t \rightarrow |\mathbf{x}(t)|$ . Supposons qu'il existe une *famille fondamentale*  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$  de champs de vecteurs continus, vérifiant l'axiome suivant:

(\*) Pour tout compact  $K \subset T$ , tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$  et tout nombre  $\epsilon > 0$ , il existe  $\mathbf{y} \in \mathfrak{A}$ , tel que  $\phi_{K\mathbf{x}} = \phi_{K\mathbf{y}}$  et  $\sup_{t \in T} |\mathbf{y}(t)| \leq \sup_{t \in K} |\mathbf{y}(t)| + \epsilon$ .

Notons par  $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  l'ensemble des champs de vecteurs continus par rapport à  $\mathfrak{A}$ . On considère sur  $\mathfrak{A}$  et  $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  la norme

$$\|\mathbf{x}\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{x}(t)|.$$

Lorsque tous les espaces  $E(t)$  sont identiques à un espace de Banach  $E$ , on prend toujours pour  $\mathfrak{A}$  l'ensemble des applications constantes de  $T$  dans  $E$ , et l'on peut identifier  $\mathfrak{A}$  avec  $E$ . Dans ce cas la condition (\*) est vérifiée et  $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  est l'espace  $\mathcal{C}_E(T)$  des applications de  $T$  dans  $E$ , continues au sens habituel.

Soit  $\mathbf{m}$  une mesure vectorielle sur  $T$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, F)$ , telle que

(\*\*) Pour tout  $A \in \mathfrak{B}$  et  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{A}$  tels que  $\phi_{A\mathbf{x}} = \phi_{A\mathbf{y}}$ , on a

$$\mathbf{m}(A)\mathbf{x} = \mathbf{m}(A)\mathbf{y}.$$

Evidemment, si  $E(t) = E$  quel que soit  $t \in T$ , cette condition est superflue. Pour  $A \in \mathfrak{B}$  posons

$$(3) \quad |\mathbf{m}|(A) = \sup \left| \sum_i \mathbf{m}(A_i)\mathbf{x}_i \right|$$

le sup. étant considéré pour toutes les partitions finies  $(A_i)$  de  $A$  en ensembles boréliens et toutes les familles de champs de vecteurs  $(\mathbf{x}_i)$  appartenantes à  $\mathfrak{A}$ , tels que  $\|\phi_{A_i}\mathbf{x}_i\| \leq 1$ . La condition  $\|\phi_{A_i}\mathbf{x}_i\| \leq 1$  peut être remplacée par la condition  $\|\mathbf{x}_i\| \leq 1$ , ayant en vue (\*) et (\*\*). La fonction d'ensemble  $|\mathbf{m}|$  est appelée la *semi-variation de  $\mathbf{m}$* ,  $|\mathbf{m}|(A)$  la *semi-variation de  $\mathbf{m}$  sur  $A$*  et  $|\mathbf{m}|(T)$  la *semi-variation totale de  $\mathbf{m}$* .

On vérifie aisément que  $|\mathbf{m}|$  est une fonction positive croissante et dénombrablement sous-additive. Pour tout  $A \in \mathfrak{B}$  et  $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$  on a

$$(4) \quad |\mathbf{m}(A)\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{x}\| |\mathbf{m}|(A)$$

et

$$(5) \quad |\mathbf{m}(A)| \leq |\mathbf{m}|(A) \leq \bar{\mu}(A).$$

On désigne par  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$  l'espace des mesures vectorielles sur  $T$  à valeurs dans  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}, F)$ , à *variation finie* et vérifiant l'axiome (\*\*). Les fonctions  $\mathbf{m} \rightarrow |\mathbf{m}|(T)$  et  $\mathbf{m} \rightarrow \bar{\mu}(T)$  sont des normes sur  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ .

**3. Intégration des champs de vecteurs.** On dit qu'un champ de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$  est  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ -*étagé*, ou, simplement, *étagé*, s'il est de la forme  $\sum_i \phi_{A_i} \mathbf{x}_i$  ( $A_i \in \mathfrak{B}$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{A}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ).

Soit  $\mathbf{m}$  une mesure vectorielle de  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ . Pour un champ étagé  $\mathbf{x} = \sum_i \phi_{A_i} \mathbf{x}_i$  on définit l'intégrale  $\int \mathbf{x} d\mathbf{m}$  de  $\mathbf{x}$  par rapport à  $\mathbf{m}$  par l'égalité  $\int \mathbf{x} d\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{m}(A_i) \mathbf{x}_i$ ; la définition de  $\int \mathbf{x} d\mathbf{m}$  ne dépend pas de la représentation particulière de  $\mathbf{x}$  comme champ étagé. Si

$$A = \{t \mid \mathbf{x}(t) \neq 0\},$$

on a

$$(6) \quad \left| \int \mathbf{x} d\mathbf{m} \right| \leq \|\mathbf{x}\| |\mathbf{m}|(A).$$

Si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$  est limite uniforme d'une suite  $(\mathbf{x}_n)$  de champs étagés, la suite des intégrales  $(\int \mathbf{x}_n d\mathbf{m})$  est une suite de Cauchy dans  $F$ , convergente vers un élément qu'on prend par définition comme intégrale de  $\mathbf{x}$  par rapport à  $\mathbf{m}$  et qu'on note  $\int \mathbf{x} d\mathbf{m}$ . Cette définition est indépendante de la suite  $(\mathbf{x}_n)$ . L'inégalité (6) reste encore valable.

On note par  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(T)$  l'espace des champs  $\mathbf{x} \in \mathfrak{C}(\mathfrak{E})$  qui sont limites uniformes des champs étagés.  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(T)$  contient  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ . Si  $E(t) = R$  pour tout  $t \in T$ ,  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(T)$  est l'espace  $\mathfrak{B}(T)$  de fonctions réelles bornées et mesurables ( $\mathfrak{B}$ ).

On définit de la manière usuelle l'intégrale  $\int \phi d\bar{\mu}$  d'une fonction  $\phi \in L^1(\bar{\mu})$  par rapport à la variation  $\bar{\mu}$  de  $\mathbf{m}$ .

PROPOSITION 2. Pour tout champ  $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(T)$ , on a  $|\mathbf{x}| \in \mathfrak{B}(T)$  et

$$(7) \quad \left| \int \mathbf{x} d\mathbf{m} \right| \leq \int |\mathbf{x}| d\bar{\mu}$$

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord  $\mathbf{x} = \phi_A \mathbf{y}$ , ( $A \in \mathfrak{B}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathfrak{A}$ ). Soit  $\epsilon > 0$ ; il existe une partition  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $A$ , en parties de  $\mathfrak{B}$ , telle que l'oscillation de  $\mathbf{x}$  sur chaque  $A_i$  soit  $\leq \eta = \min(\epsilon/3, \epsilon/3\bar{\mu}(A))$ . Si,

pour chaque  $i$ , on choisit  $t_i \in A_i$ , on déduit  $|x(t)| \geq |x(t_i)| - \eta$  pour  $t \in A_i$ ; alors pour tout  $t \in T$  on a  $|x(t)| \geq \sum_{i=1}^n \phi_{A_i}(t) |x(t_i)| - \eta$ . En vertu de l'axiome (\*), pour chaque  $i$ , il existe un champ  $y_i \in \mathfrak{A}$  tel que  $\phi_{A_i} y_i = \phi_{A_i} x$  et  $\|\phi_{A_i} x\| \geq \|y_i\| - \eta$ , donc

$$|x(t_i)| \geq \phi_{A_i}(t) |x(t)| - \eta \geq \|y_i\| - 2\eta.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int |x(t)| d\bar{\mu}(t) &\geq \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(A_i) |x(t_i)| - \epsilon/3 \geq \sum_{i=1}^n |m(A_i)| \|y_i\| - \epsilon \\ &\geq \left| \sum_{i=1}^n m(A_i) y_i \right| - \epsilon = \left| \int x d\mathbf{m} \right| - \epsilon \end{aligned}$$

d'où il résulte (7),  $\epsilon$  étant arbitraire. L'inégalité (7) résulte alors aussitôt, d'abord pour les champs étagés et puis pour les champs de  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(T)$ .

REMARQUES. La restriction de l'application  $\phi \rightarrow \int \phi d\bar{\mu}$  à  $\mathfrak{C}(T)$  est une mesure de Radon<sup>4</sup> qu'on va noter par  $\bar{\mu}$ . Si  $\bar{\mu}$  est régulière, on a  $L^1(\bar{\mu}) = L^1(\bar{\mu})$  et  $\int \phi d\bar{\mu} = \int \phi d\bar{\mu}$  pour tout fonction  $\phi$ ,  $\bar{\mu}$ -intégrable, donc, on peut identifier dans ce cas  $\bar{\mu}$  et  $\bar{\mu}$ . Si  $\mathbf{m}$  est régulière, l'inégalité (7) montre que l'application  $x \rightarrow \int x d\mathbf{m}$  peut être prolongée uniquement par continuité à l'espace  $L^1(\bar{\mu})$ . De cette façon, on peut définir l'intégrale par rapport à  $\mathbf{m}$  de tout champ  $\bar{\mu}$ -intégrable.

THÉORÈME 1. Si  $\mathbf{m}$  est une mesure régulière de  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ , alors  $\int x d\mathbf{m} = 0$  pour tout champ  $x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  si et seulement si  $\mathbf{m}(A) = 0$  pour tout  $A \in \mathfrak{A}$ .

DÉMONSTRATION (cf. [11, §13]). Supposons que  $\int x d\mathbf{m} = 0$  pour tout  $x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ . Soit  $A \in \mathfrak{A}$  et  $\epsilon > 0$ ;  $\bar{\mu}$  étant régulière, il existe un compact  $K \subset A$  et un ouvert  $U \supset A$  tels que  $\bar{\mu}(U - K) < \epsilon/2$ . Soit  $\phi$  une application continue de  $T$  dans  $[0, 1]$  telle que  $\phi(t) = 1$  pour  $t \in K$  et  $\phi(t) = 0$  pour  $t \notin U$ . Pour tout  $x \in \mathfrak{A}$  on a  $\phi x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  et

$$\begin{aligned} |m(A)x| &= \left| m(A)x - \int \phi x d\mathbf{m} \right| \\ &= \left| \int x(\phi_A - \phi) d\mathbf{m} \right| = \left| \int x(\phi_A - \phi)\phi_{U-K} d\mathbf{m} \right| \leq 2 \int |x| \phi_{U-K} d\bar{\mu} \\ &\leq \|x\| 2\bar{\mu}(U - K) \leq \|x\| \epsilon, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $|m(A)| \leq \epsilon$ ;  $\epsilon$  étant arbitraire, on déduit  $\mathbf{m}(A) = 0$ . L'implication inverse étant évidente, ceci achève la démonstration.

<sup>4</sup> Pour ce qui concerne la mesure de Radon voir [3].

COROLLAIRE. Deux mesures vectorielles régulières  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{m}'$  de  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$  sont égales si et seulement si  $\int x d\mathbf{m} = \int x d\mathbf{m}'$  pour tout champ  $x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ .

## 2. OPERATIONS LINÉAIRES SUR $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$

1. **Représentation des opérations linéaires majorées.** Soit  $m$  une application linéaire et majorée de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  dans  $F$ , c'est-à-dire telle qu'il existe une mesure de Radon positive  $\nu$  sur  $T$  vérifiant  $|m(x)| \leq \nu(|x|)$  pour tout  $x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ . Il existe alors [5] une plus petite mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $T$ , majorante de  $m$ .

Considérons l'espace  $L^1_{\mathfrak{A}}(\mu)$  des champs de vecteurs  $\mu$ -intégrable  $x \in \mathfrak{C}(\mathcal{E})$ , et prolongeons  $m$  par continuité à  $L^1_{\mathfrak{A}}(\mu)$ . Pour toute fonction  $f \in L^1_c(\mu)$  et tout champ  $x \in L^1_{\mathfrak{A}}(\mu)$ , on a  $fx \in L^1_{\mathfrak{A}}(\mu)$ ; posons  $T(f)x = m(fx)$ . L'application  $T(f): x \rightarrow T(f)x$  de  $\mathfrak{A}$  dans  $F$  est linéaire et continue:  $|T(f)x| = |m(fx)| \leq \int |x| |f| d\mu \leq N_{\infty}(x, \mu) N_1(f, \mu)$  donc  $\|T(f)\| \leq N_1(f, \mu)$ . L'application  $T: f \rightarrow T(f)$  de  $L^1_c(\mu)$  dans  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}, F)$  est linéaire et continue. Pour tout ensemble  $A \in \mathfrak{B}$  posons

$$(8) \quad \mathbf{m}(A) = T(\phi_A).$$

PROPOSITION 3. La fonction d'ensemble  $\mathbf{m}$  définie par (8) est une mesure vectorielle régulière appartenant à  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ .

DÉMONSTRATION.  $\mathbf{m}$  est dénombrablement additive, car si  $(A_n)$  est une suite d'ensembles deux-à-deux disjoints de  $\mathfrak{B}$  et  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_{A_n}$  est convergente dans la topologie de  $L^1_c(\mu)$  et a pour somme  $\phi_A$ . L'application  $f \rightarrow T(f)$  étant continue, on déduit  $T(\phi_A) = \sum_{n=1}^{\infty} T(\phi_{A_n})$  ou  $\mathbf{m}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(A_n)$ , la série étant convergente dans la norme de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{A}, F)$ .

$\mathbf{m}$  est à variation finie. Si  $A \in \mathfrak{B}$  et  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une partition de  $A$  en ensembles de  $\mathfrak{B}$ , alors

$$\sum_i |\mathbf{m}(A_i)| = \sum_i \|T(\phi_{A_i})\| \leq \sum_i N_1(\phi_{A_i}, \mu) = \sum_i \mu(A_i) = \mu(A).$$

Comme  $\bar{\mu}$  est la plus petite fonction d'ensemble vérifiant  $|\mathbf{m}(A)| \leq \bar{\mu}(A)$  pour  $A \in \mathfrak{B}$ , on déduit que  $\bar{\mu}(A) \leq \mu(A)$  pour  $A \in \mathfrak{B}$ . La fonction d'ensemble  $\mu$  étant régulière, il en résulte que  $\bar{\mu}$  est régulière donc aussi  $\mathbf{m}$ . Enfin, on déduit facilement que  $\mathbf{m}$  vérifie l'axiome (\*\*) et ceci achève la démonstration.

THÉORÈME 2. Pour toute application linéaire et majorée  $m$  de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T)$  dans  $F$ , il existe une mesure vectorielle régulière unique  $\mathbf{m}$  appartenant à  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ , telle que

$$(9) \quad m(x) = \int x d\mathbf{m} \quad \text{pour } x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(T).$$

En outre  $\|m\| = |m|(T)$  et  $\mu = \tilde{\mu}$ .

DÉMONSTRATION. La fonction  $m$  définie par (8) est régulière et appartient à  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$  (Proposition 3) et on vérifie aisément que  $m(x) = \int x d\mathbf{m}$  pour tout  $x \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{Q}}(T)$ , car si  $A \in \mathfrak{B}$  et  $x \in \mathfrak{A}$ , alors  $m(A)x = m(\phi_A x)$ . L'unicité de  $m$  résulte du corollaire du Théorème 1. Pour tout  $x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{Q}}(T)$  on a  $|m(x)| = |\int x d\mathbf{m}| \leq \int |x| d\tilde{\mu}$ , et comme  $\mu$  est la plus petite mesure de Radon majorante de  $m$ , on déduit que  $\mu \leq \tilde{\mu}$ . L'inégalité  $\tilde{\mu} \leq \mu$  étant vraie (démonstration de la Proposition 3), il en résulte que  $\mu = \tilde{\mu}$ . Il reste à prouver que  $\|m\| = |m|(T)$ . Soit  $x \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{Q}}(T)$  et  $\epsilon > 0$ . Il existe un champ étagé  $\sum_i \phi_{A_i} x_i$  tel que

$$\left| x(t) - \sum_i \phi_{A_i}(t) x_i(t) \right| \leq \min(\epsilon, \epsilon/\|m\|)$$

pour  $t \in T$ . On déduit d'abord que  $\|\phi_{A_i} x_i\| \leq \|x\| + \epsilon$  pour chaque  $i$ . Puis  $|m(x) - \sum_i m(A_i) x_i| \leq \epsilon$ , donc,

$$\begin{aligned} |m(x)| &\leq \left| \sum_i m(A_i) x_i \right| + \epsilon \leq (\|x\| + \epsilon) \left| \sum_i m(A_i) \frac{x_i}{\|x\| + \epsilon} \right| + \epsilon \\ &\leq (\|x\| + \epsilon) |m|(T) + \epsilon; \end{aligned}$$

$\epsilon$  étant arbitraire, on a  $|m(x)| \leq \|x\| |m|(T)$  et par suite  $\|m\| \leq |m|(T)$ .

Soit maintenant  $x = \sum_i \phi_{A_i} x_i$  un champ étagé tel que  $\|x\| \leq 1$  et soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $x$  est  $\mu$ -mesurable, il existe un compact  $K \subset T$  tel que  $\mu(T-K) < \epsilon/2(1+\epsilon) < \epsilon/2$  et tel que  $x$  soit continu sur  $K$ . Il existe alors [7, p. 82, Proposition 7] un champ  $y \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{Q}}(T)$  tel que  $\phi_K x = \phi_K y$  et  $\|y\| \leq 1 + \epsilon$ . Alors

$$\begin{aligned} &\left| \sum_i m(A_i) x_i \right| \\ &= \left| \sum_i m(\phi_{A_i} x_i) \right| = \left| m \left( \sum_i \phi_{A_i} x_i \right) \right| \leq |m(\phi_K x)| + |m(\phi_{T-K} x)| \\ &= |m(y) - m(\phi_{T-K} y)| + |m(\phi_{T-K} x)| \leq |m(y)| + (1 + \epsilon)\mu(T-K) \\ &\quad + \mu(T-K) \leq |m(y)| + \epsilon \leq \|m\|(1 + \epsilon) + \epsilon; \end{aligned}$$

$\epsilon$  étant arbitraire, on déduit que  $|\sum_i m(A_i) x_i| \leq \|m\|$ , donc  $|m|(T) \leq \|m\|$ , et ceci achève la démonstration.

REMARQUES. 1°. Soit  $m$  une mesure vectorielle régulière de  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ ; d'après l'inégalité (7) l'application  $x \rightarrow \int x d\mathbf{m}$  de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{Q}}(T)$  dans  $F$  est majorée par sa variation  $\tilde{\mu}$ . Le Théorème 2 établit donc une correspondance biunivoque entre le sous espace des opérations majorées de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}, F)$  et le sous-espace des mesures régulières de  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ .

2°. Si  $F=C$  on sait [5] que  $\|m\| = \|\mu\|$ ; on déduit alors que  $|m|(T) = \tilde{\mu}(T)$ . D'ailleurs on peut prouver directement que  $|m|(A) = \tilde{\mu}(A)$  pour tout  $A \in \mathfrak{B}$ . Un théorème analogue au Théorème 2 a été démontré dans ce cas par une voie différente, par I. Singer [13].

3°. Pour le cas  $E(t)=E$  quel que soit  $t \in T$  et  $F=C$ , on retrouve les résultats de M. Gowurin [8, §6], S. Bochner et A. E. Taylor [2, §3, Théorème 3.1] et I. Singer [12].

4°. Pour le cas  $E(t)=C$  quel que soit  $t \in T$ , des théorèmes analogues ont été démontrés par I. Gelfand [6, II, §8, Théorème 1 et Théorème 2], Bartle, Dunford et Schwartz [1, Théorème 3.2 et Théorème 3.5] et A. Grothendieck [9, §3, Proposition 14]. Du Théorème 3.2. de [1] on déduit que toute application majorée  $m$  de  $C(T)$  dans  $F$  est aussi faiblement compacte (mais non nécessairement compacte).

5°. Si  $E(t)=F=R$ , le Théorème 2 généralise un théorème bien connu de S. Kakutani [11, Théorème 10].

6°. Si  $E(t)=F$  pour tout  $t \in T$ , on peut plonger  $C$  isométriquement dans  $\mathfrak{L}(F)$ . Dans ce cas la mesure vectorielle  $m$  définie par (8) est à valeurs dans  $C$  et non seulement dans  $\mathfrak{L}(F)$  si et seulement si  $m$  est une mesure de Radon sur  $T$ .

**2. Représentation des mesures vectorielles régulières.** Supposons que la famille fondamentale  $\mathfrak{A}$  vérifie l'axiome (G) de Godement et que  $F$  est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach. Un champ d'opérations est une fonction  $U$  définie sur  $T$ , telle que  $U(t) \in \mathfrak{L}(E(t), F)$  quel que soit  $t \in T$ . On dit que  $U$  est *simplement mesurable* pour une mesure de Radon positive  $\mu$  si la fonction  $t \rightarrow U(t)x(t)$  est  $\mu$ -mesurable quel que soit  $x \in \mathfrak{A}$ . En tenant compte du Théorème 2, de la remarque 1 et du Théorème 5 de [5], on déduit le

**THÉORÈME 3.** *Si  $\mathfrak{A}$  vérifie l'axiome (G) et  $F$  est du type dénombrable et dual d'un espace de Banach, pour toute mesure vectorielle régulière  $m$  de  $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$  il existe un champ d'opérations  $U$  simplement  $\tilde{\mu}$ -mesurable, déterminé  $\tilde{\mu}$ -presque partout, tel que  $|U(t)| = 1$  et*

$$\int x dm = \int U(t)x(t) d\tilde{\mu}(t) \quad \text{pour } x \in L^1_{\mathfrak{A}}(\tilde{\mu}).$$

En particulier, pour tout  $x \in \mathfrak{A}$  et  $A \in \mathfrak{B}$  on a

$$(10) \quad m(A)x = \int_A U(t)x(t) d\tilde{\mu}(t).$$

Si en outre  $E(t)=E$  pour tout  $t \in T$  on dit que  $V \in \mathfrak{L}(E, F)$  est l'*intégrale simple* de la fonction  $t \rightarrow U(t)$  par rapport à  $\tilde{\mu}$  si  $Vx =$

$\int U(t)x d\bar{\mu}(t)$  pour tout  $x \in E$  ce qu'on convient d'écrire  $V = \int U(t)d\bar{\mu}(t)$ . L'égalité (10) devient alors

$$m(A) = \int_A U(t)d\bar{\mu}(t).$$

Si  $U$  est  $\bar{\mu}$ -mesurable (par exemple si  $\mathfrak{L}(E, F)$  est de type dénombrable), alors l'intégrale du seconde membre est l'intégrale forte [3].

**3. Cas des algèbres.** Soit  $A$  une algèbre de Banach à élément unité  $e$  et considérons  $A$  plongée isométriquement dans  $\mathfrak{L}(A)$  en identifiant un élément  $a \in A$  avec l'opération  $U_a$  de multiplication à droite par  $a$ .

**THÉORÈME 4.** Soit  $m$  une application linéaire et majorée de  $\mathfrak{C}_A(T)$  dans  $A$ . La mesure vectorielle  $\mathbf{m}$  attachée à  $m$  par le Théorème 2 est à valeurs dans  $A$  si et seulement si  $m$  vérifie la condition

$$(11) \quad m(ax) = am(x) \quad \text{pour } a \in A \text{ et } x \in \mathfrak{C}_A(T).$$

**DÉMONSTRATION.** Si  $\mathbf{m}$  prend ses valeurs dans  $A$ , on a  $\int ax d\mathbf{m} = a \int x d\mathbf{m}$ , d'abord pour les fonctions étagées et puis pour les fonctions  $x \in \mathfrak{C}_A(T)$ , et comme  $m(x) = \int x d\mathbf{m}$ , on déduit (11). Inversement, supposons la condition (11) vérifiée et considérons  $m$  prolongée à  $L_A^1(\mu)$ . Pour toute fonction  $f \in L_C^1(\mu)$  on a  $e\phi \in L_A^1(\mu)$ . Posons  $T(f) = m(e\phi)$ . Pour  $B \in \mathfrak{B}$  posons  $\mathbf{m}(B) = T(\phi_B) = m(e\phi_B)$ ; de (11) on déduit que  $a \cdot \mathbf{m}(B) = m(a\phi_B)$  pour tout  $a \in A$ , donc, en considérant  $\mathbf{m}(B)$  comme élément de  $\mathfrak{L}(A)$ , il est identique à celui défini par (8). De l'égalité

$$a \cdot \mathbf{m}(B) = m(a\phi_B)$$

on déduit que  $m(x) = \int x d\mathbf{m}$ , d'abord pour les fonctions  $x$  étagées et puis pour  $x \in \mathfrak{C}_A(T)$ .

**REMARQUE.** Si l'on identifie un élément  $a \in A$  avec l'opérateur  $V_a$  de multiplication à gauche par  $a$ ,  $\mathbf{m}$  est à valeurs dans  $A$  si et seulement si  $m(xa) = m(x) \cdot a$  pour  $a \in A$  et  $x \in \mathfrak{C}_A(T)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. R. G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. vol. 7 (1955) pp. 289-305.
2. S. Bochner and A. E. Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Ann. of Math. vol. 39 (1938) pp. 913-944.
3. N. Bourbaki, *Intégration*, Livre VI, Chapter I-IV, Paris, 1952.
4. N. Dinculeanu, *Mesures vectorielles et opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris vol. 246 (1958) pp. 2328-2331.
5. ———, *Représentation intégrale de certaines opérations linéaires II*, Compositio Math. à paraître.
6. I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sb. vol. 4(46) (1938) pp. 68-124.
7. R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires*, Ann. of Math. vol. 53 (1951) pp. 68-124.

8. M. Gowurin, *Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen*, Fund. Math. vol. 27 (1936) pp. 254–268.

9. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type  $C(K)$* , Canad. J. Math. vol. 5 (1953) pp. 129–173.

10. P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York, 1950.

11. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract  $(M)$ -spaces*, Ann. of Math. vol. 42 (1941) pp. 994–1024.

12. I. Singer, *Les fonctionnelles linéaires sur l'espace des applications continues d'un espace de Hausdorff bicompat dans un espace de Banach* (en russe), Rev. Math. Pures Appl. vol. 2 (1957) pp. 301–315.

13. ———, *Les duals de certains espaces de Banach de champs de vecteurs*, Bull. Sci. Math. vol. 82 (1958) pp. 29–40.

UNIVERSITÉ DE BUCAREST, ROUMANIE

## ON A DIVERGENT TRIGONOMETRICAL SERIES GIVEN BY STEINHAUS<sup>1</sup>

SIOBHAN O'SHEA

Steinhaus [1; 2, p. 283] gave the series

$$(1) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-1} \cos n(x - \log \log n)$$

as an example of an everywhere-divergent trigonometric series with coefficients tending to zero. Plainly, a *sine* series cannot diverge everywhere, since it must converge whenever  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ . There is, however, no *a priori* reason why a *cosine* series should not diverge everywhere. It is not immediately clear from Steinhaus's argument [1] whether the "cosine part" of (1), namely

$$(2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-1} \cos (n \log \log n) \cos nx,$$

has any points of convergence. Accordingly I exhibit here a class of everywhere-divergent cosine series, of which (2) is a special case.

**THEOREM.** *Suppose that  $u(n) \uparrow \infty$ ,  $c_n \downarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , and that there exists a sequence of positive integers  $\{p_n\}$  such that*

$$(3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (n + p_n) \{u(n + p_n) - u(n)\} < \frac{1}{2},$$

Received by the editors May 28, 1958.

<sup>1</sup> Research sponsored by the Air Research and Development Command, United States Air Force, through its European Office, under Contract AF 61(514)-1399.