SUR LA REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES CERTAINES OPÉRATIONS LINÉAIRES. III

NICOLAE DINCULEANU

Introduction. Soient T un espace compact, $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties boréliennes de T; E et F deux espaces de Banach, $\mathcal{C}_E(T)$ l'espace des applications continues de T dans E et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F. Une mesure vectorielle sur T est une fonction définie sur $\mathcal{B}$, à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$, dénombrablement additive. Dans le §1 on construit une intégrale par rapport à une mesure vectorielle, pour une certaine classe d'applications de T dans E. Les mesures *regulières* sont uniquement déterminées par l'intégrale des fonctions de $\mathcal{C}_E(T)$ (Théorème 1). Dans le §2 on montre (Théorème 2) qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'ensemble des applications linéaires *majorées* m de $\mathcal{C}_E(T)$ dans F et l'ensemble des mesures vectorielles *régulières* $\boldsymbol{m}$ sur T, donnée par l'égalité

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x}(t) d\boldsymbol{m}(t) \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_E(T).$$

La norme de m est égale à la semi-variation totale de $\boldsymbol{m}$, et aussi à la variation totale de $\boldsymbol{m}$ si $F = C$.

Si E et F sont de type dénombrable et F est dual d'un espace de Banach, une mesure vectorielle régulière $\boldsymbol{m}$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{m}(A) = \int_A U(t) d\tilde{\mu}(t) \qquad \text{pour } A \in \mathcal{B}$$

où $\tilde{\mu}$ est la variation de $\boldsymbol{m}$ et U une certaine application de T dans $\mathcal{L}(E, F)$ (Théorème 3).

Si $E = F = A$, où A est une algèbre de Banach à élément unité, et m une application linéaire *majorée* de $\mathcal{C}_A(T)$ dans A, alors la mesure vectorielle correspondante $\boldsymbol{m}$ est à valeurs dans A (et non plus dans $\mathcal{L}(A)$) si et seulement si $m(a\mathbf{x}) = am(\mathbf{x})$ pour tout $a \in A$ et $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_A(T)$ (Théorème 4).

Les résultats précédents sont démontrés dans le cas plus général où, au lieu d'un seul espace E, on considère une famille d'espaces de Banach $(E(t))_{t\in T}$, donc au lieu des fonctions définies sur T à valeurs dans E, on considère des champs de vecteurs[1] $\mathbf{x}$ définies sur T, tels que $\mathbf{x}(t) \in E(t)$ quel que soit $t \in T$.[2]

Received by the editors June 18, 1958.

[1] En ce qui concerne les champs de vecteurs et les espaces $L^p_{\mathfrak{a}}$ voir [**7**].

[2] Les principaux résultats de cet article ont été exposé dans [**4**].

1. Intégration par rapport à une mesure vectorielle

1. Fonctions vectorielles d'ensemble. Soit T un espace compact, X une espace de Banach et $\boldsymbol{m}$ une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans X. Pour $A \in \mathcal{B}$ posons[3]

$$(1) \qquad \tilde{\mu}(A) = \sup \sum_i |\boldsymbol{m}(A_i)|,$$

le sup. étant considéré pour toutes les partitions finies (A_i) de A en ensembles boréliens. La fonction d'ensemble $\tilde{\mu}$ est appellée la *variation de* $\boldsymbol{m}$; $\tilde{\mu}(A)$ est la *variation de* $\boldsymbol{m}$ *sur* A et $\tilde{\mu}(T)$ la *variation totale de* $\boldsymbol{m}$. On dit que $\boldsymbol{m}$ est à *variation finie* si $\tilde{\mu}(T) < \infty$. On vérifie aisément que $\tilde{\mu}$ est une fonction positive et croissante; si $\boldsymbol{m}$ est dénombrablement additive, $\tilde{\mu}$ l'est aussi. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}$, on a

$$(2) \qquad |\boldsymbol{m}(A)| \leqq \tilde{\mu}(A).$$

On dit que $\boldsymbol{m}$ est *régulière*, si pour tout nombre $\epsilon > 0$ et tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un ensemble compact $K \subset A$ et un ensemble ouvert $U \supset A$, tels que si $A' \in \mathcal{B}$ et $K \subset A' \subset U$, alors $|\boldsymbol{m}(A) - \boldsymbol{m}(A')| \leqq \epsilon$.

On appelle *mesure vectorielle sur* T, *à valeurs dans* X, toute fonction d'ensemble $\boldsymbol{m}$ définie sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans X, *dénombrablement additive.*

Proposition 1. *Une mesure vectorielle sur* T, *à valeurs dans* X *et à variation finie*, $\boldsymbol{m}$, *est régulière si et seulement si sa variation* $\tilde{\mu}$ *est régulière.*

Démonstration. Supposons $\tilde{\mu}$ régulière et soient $A \in \mathcal{B}$ et $\epsilon > 0$. Il existe un compact $K \subset A$ et un ouvert $U \supset A$ tels que $\tilde{\mu}(U-K) \leqq \epsilon/2$. Soit $A' \in \mathcal{B}$ tel que $K \subset A' \subset U$ et montrons qu'on a

$$|\boldsymbol{m}(A) - \boldsymbol{m}(A')| \leqq \epsilon.$$

Pour ce faire, posons $B = A \cap A'$ et $C = A' - B$; on a $B \cap C = \emptyset$, $A' = B \cup C$, $C \subset U - K$ et $A - B \subset U - K$. Alors

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{m}(A) - \boldsymbol{m}(A')| & \\ &= |\boldsymbol{m}(A) - \boldsymbol{m}(B) - \boldsymbol{m}(C)| = |\boldsymbol{m}(A - B) - \boldsymbol{m}(C)| \\ &\leqq |\boldsymbol{m}(A - B)| + |\boldsymbol{m}(C)| \leqq \tilde{\mu}(A - B) + \tilde{\mu}(C) \\ &\leqq 2\tilde{\mu}(U - K) \leqq \epsilon. \end{aligned}$$

Inversement, supposons $\boldsymbol{m}$ régulière et soient $A \in \mathcal{B}$ et $\epsilon > 0$. Il existe une partition $(A_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ de A en ensembles boréliens, telle que

[3] La norme d'un élément $a \in X$ sera notée par $|a|$.

$\tilde{\mu}(A) \leqq \sum_{i=1}^{n} |m(A_i)| + \epsilon/2$. Pour chaque i, il existe un ensemble compact $K_i \subset A_i$ tel que $|m(A_i) - m(K_i)| \leqq \epsilon/2^{i+1}$. Posons $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$. Alors $K \subset A$ et $\tilde{\mu}(A) - \tilde{\mu}(K) \leqq \sum_i |m(A_i)| - \sum_i |m(K_i)| + \epsilon/2 \leqq \sum_i |m(A_i) - m(K_i)| + \epsilon/2 \leqq \epsilon$, donc

$$\tilde{\mu}(A) = \sup \{\tilde{\mu}(K) \mid K \subset A,\ K \text{ compact}\},$$

et cette condition est suffisante pour que $\tilde{\mu}$ soit régulière [**10**, §52, Théorème 6].

2. **Mesures vectorielles à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, F)$.** Soient $\mathcal{E} = (E(t))_{t \in T}$ une famille d'espaces de Banach et F un espace de Banach. Désignons par $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ l'ensemble des champs de vecteurs $\mathbf{x}$ définis. sur T tels que $\mathbf{x}(t) \in E(t)$ quel que soit $t \in T$. Si $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ on notera par $|\mathbf{x}|$ la fonction numérique $t \to |\mathbf{x}(t)|$. Supposons qu'il existe une *famille fondamentale* $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$ *de champs de vecteurs continus*, vérifiant l'axiome suivant:

(*) *Pour tout compact $K \subset T$, tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$ et tout nombre $\epsilon > 0$, il existe $y \in \mathfrak{A}$, tel que $\phi_K \mathbf{x} = \phi_K y$ et* $\sup_{t \in T} |y(t)| \leqq \sup_{t \in K} |y(t)| + \epsilon$.

Notons par $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ l'ensemble des champs de vecteurs continus par rapport à $\mathfrak{A}$. On considère sur $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ la norme

$$\|\mathbf{x}\| = \sup_{t \in T} |\mathbf{x}(t)|.$$

Lorsque tous les espaces $E(t)$ sont identiques à un espace de Banach E, on prend toujours pour $\mathfrak{A}$ l'ensemble des applications constantes de T dans E, et l'on peut identifier $\mathfrak{A}$ avec E. Dans ce cas la condition (*) est vérifiée et $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ est l'espace $\mathcal{C}_E(T)$ des applications de T dans E, continues au sens habituel.

Soit m une mesure vectorielle sur T à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, F)$, telle que

(**) *Pour tout $A \in \mathcal{B}$ et $\mathbf{x}$, $y \in \mathfrak{A}$ tels que $\phi_A \mathbf{x} = \phi_A y$, on a*

$$m(A)\mathbf{x} = m(A)y.$$

Evidemment, si $E(t) = E$ quel que soit $t \in T$, cette condition est superflue. Pour $A \in \mathcal{B}$ posons

$$|m|(A) = \sup \left| \sum_i m(A_i)\mathbf{x}_i \right| \tag{3}$$

le sup. étant considéré pour toutes les partitions finies (A_i) de A en ensembles boréliens et toutes les familles de champs de vecteurs $(\mathbf{x}_i)$ appartenantes à $\mathfrak{A}$, tels que $\|\phi_{A_i}\mathbf{x}_i\| \leqq 1$. La condition $\|\phi_{A_i}\mathbf{x}_i\| \leqq 1$ peut être remplacée par la condition $\|\mathbf{x}_i\| \leqq 1$, ayant en vue (*) et (**). La fonction d'ensemble $|m|$ est appellée la *semi-variation de m*, $|m|(A)$ la *semi-variation de m sur A* et $|m|(T)$ la *semi-variation totale de m*.

On vérifie aisément que $|\boldsymbol{m}|$ est une fonction positive croissante et dénombrablement sous-additive. Pour tout $A \in \mathcal{B}$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$ on a

$$(4) \qquad |\boldsymbol{m}(A)\mathbf{x}| \leqq \|\mathbf{x}\| \, |\boldsymbol{m}|(A)$$

et

$$(5) \qquad |\boldsymbol{m}(A)| \leqq |\boldsymbol{m}|(A) \leqq \tilde{\mu}(A).$$

On désigne par $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ l'espace des mesures vectorielles sur T à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, F)$, *à variation finie* et vérifiant l'axiome (**). Les fonctions $\boldsymbol{m} \to |\boldsymbol{m}|(T)$ et $\boldsymbol{m} \to \tilde{\mu}(T)$ sont des normes sur $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$.

3. **Intégration des champs de vecteurs.** On dit qu'un champ de vectuers $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est $(\mathfrak{A}, \mathcal{B})$-*étagé*, ou, simplement, étagé, s'il est de la forme $\sum_i \phi_{A_i} \mathbf{x}_i$ $(A_i \in \mathcal{B}, \mathbf{x}_i \in \mathfrak{A}, 1 \leqq i \leqq n)$.

Soit $\boldsymbol{m}$ une mesure vectorielle de $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$. Pour un champ etagé $\mathbf{x} = \sum_i \phi_{A_i} \mathbf{x}_i$ on définit l'intégrale $\int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}$ de $\mathbf{x}$ par rapport à $\boldsymbol{m}$ par l'égalité $\int \mathbf{x} d\boldsymbol{m} = \sum_i \boldsymbol{m}(A_i)\mathbf{x}_i$; la définition de $\int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}$ ne dépend pas de la représentation particulière de $\mathbf{x}$ comme champ étagé. Si

$$A = \{t \mid \mathbf{x}(t) \neq 0\},$$

on a

$$(6) \qquad \left| \int \mathbf{x} d\boldsymbol{m} \right| \leqq \|\mathbf{x}\| \, |\boldsymbol{m}|(A).$$

Si $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est limite uniforme d'une suite $(\mathbf{x}_n)$ de champs étagés, la suite des intégrales $(\int \mathbf{x}_n d\boldsymbol{m})$ est une suite de Cauchy dans F, convergente vers un élément qu'on prend par définition comme intégrale de $\mathbf{x}$ par rapport à $\boldsymbol{m}$ et qu'on note $\int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}$. Cette définition est indépendente de la suite $(\mathbf{x}_n)$. L'inégalité (6) reste encore valable.

On note par $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(T)$ l'espace des champs $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ qui sont limites uniformes des champs étagés. $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(T)$ contient $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$. Si $E(t) = R$ pour tout $t \in T$, $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(T)$ est l'espace $\mathcal{B}(T)$ de fonctions réelles bornées et mesurables $(\mathcal{B})$.

On définit de la manière usuelle l'intégrale $\int \phi d\tilde{\mu}$ d'une fonction $\phi \in L^1(\tilde{\mu})$ par rapport à la variation $\tilde{\mu}$ de $\boldsymbol{m}$.

Proposition 2. *Pour tout champ* $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(T)$, *on a* $|\mathbf{x}| \in \mathcal{B}(T)$ *et*

$$(7) \qquad \left| \int \mathbf{x} d\boldsymbol{m} \right| \leqq \int |\mathbf{x}| d\tilde{\mu}$$

Démonstration. Supposons d'abord $\mathbf{x} = \phi_A \boldsymbol{y}$, $(A \in \mathcal{B}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{A})$. Soit $\epsilon > 0$; il existe une partition $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ de A, en parties de $\mathcal{B}$, telle que l'oscillation de $\mathbf{x}$ sur chaque A_i soit $\leqq \eta = \min(\epsilon/3, \epsilon/3\tilde{\mu}(A))$. Si, pour chaque i, on choisit $t_i \in A_i$, on déduit $|\mathrm{x}(t)| \geqq |\mathrm{x}(t_i)| - \eta$ pour $t \in A_i$; alors pour tout $t \in T$ on a $|\mathrm{x}(t)| \geqq \sum_{i=1}^n \phi_{A_i}(t) |\mathrm{x}(t_i)| - \eta$. En vertu de l'axiome (*), pour chaque i, il existe un champ $\boldsymbol{y}_i \in \mathfrak{A}$ tel que $\phi_{A_i}\boldsymbol{y}_i = \phi_{A_i}\boldsymbol{y} = \phi_{A_i}\mathrm{x}$ et $\|\phi_{A_i}\mathrm{x}\| \geqq \|\boldsymbol{y}_i\| - \eta$, donc

$$|\mathrm{x}(t_i)| \geqq \phi_{A_i}(t) |\mathrm{x}(t)| - \eta \geqq \|\boldsymbol{y}_i\| - 2\eta.$$

Alors

$$\int |\mathrm{x}(t)| \, d\tilde{\mu}(t) \geqq \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(A_i) |\mathrm{x}(t_i)| - \epsilon/3 \geqq \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{m}(A_i)| \, \|\boldsymbol{y}_i\| - \epsilon$$
$$\geqq \left| \sum_{i=1}^n \boldsymbol{m}(A_i)\boldsymbol{y}_i \right| - \epsilon = \left| \int \mathrm{x} d\boldsymbol{m} \right| - \epsilon$$

d'où il résulte (7), ϵ étant arbitraire. L'inégalité (7) résulte alors aussitôt, d'abord pour les champs étagés et puis pour les champs de $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}(T)$.

Remarques. La restriction de l'application $\phi \to \int \phi d\tilde{\mu}$ à $\mathcal{C}(T)$ est une mesure de Radon[4] qu'on va noter par $\bar{\mu}$. Si $\tilde{\mu}$ est *régulière*, on a $L^1(\tilde{\mu}) = L^1(\bar{\mu})$ et $\int \phi d\tilde{\mu} = \int \phi d\bar{\mu}$ pour tout fonction ϕ, $\bar{\mu}$-intégrable, donc, on peut identifier dans ce cas $\bar{\mu}$ et $\tilde{\mu}$. Si $\boldsymbol{m}$ est régulière, l'inégalité (7) montre que l'application $\mathrm{x} \to \int \mathrm{x} d\boldsymbol{m}$ peut être prolongée uniquement par continuité à l'espace $L^1(\tilde{\mu})$. De cette façon, on peut définir l'intégrale par rapport à $\boldsymbol{m}$ de tout champ $\tilde{\mu}$-intégrable.

Théorème 1. *Si $\boldsymbol{m}$ est une mesure régulière de $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$, alors $\int \mathrm{x} d\boldsymbol{m} = 0$ pour tout champ $\mathrm{x} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ si et seulement si $\boldsymbol{m}(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{B}$.*

Démonstration (cf. [**11**, §13]). Supposons que $\int \mathrm{x} d\boldsymbol{m} = 0$ pour tout $\mathrm{x} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$. Soit $A \in \mathcal{B}$ et $\epsilon > 0$; $\tilde{\mu}$ étant régulière, il existe un compact $K \subset A$ et un ouvert $U \supset A$ tels que $\tilde{\mu}(U - K) < \epsilon/2$. Soit ϕ une application continue de T dans $[0, 1]$ telle que $\phi(t) = 1$ pour $t \in K$ et $\phi(t) = 0$ pour $t \notin U$. Pour tout $\mathrm{x} \in \mathfrak{A}$ on a $\phi\mathrm{x} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ et

$$|\boldsymbol{m}(A)\mathrm{x}| = \left| \boldsymbol{m}(A)\mathrm{x} - \int \phi \mathrm{x} d\boldsymbol{m} \right|$$
$$= \left| \int \mathrm{x}(\phi_A - \phi) d\boldsymbol{m} \right| = \left| \int \mathrm{x}(\phi_A - \phi)\phi_{U-K} d\boldsymbol{m} \right| \leqq 2 \int |\mathrm{x}| \phi_{U-K} d\tilde{\mu}$$
$$\leqq \|\mathrm{x}\| 2\tilde{\mu}(U - K) \leqq \|\mathrm{x}\| \epsilon,$$

c'est-à-dire $|\boldsymbol{m}(A)| \leqq \epsilon$; ϵ étant arbitraire, on déduit $\boldsymbol{m}(A) = 0$. L'implication inverse étant évidente, ceci achève la démonstration.

[4] Pour ce qui concerne la mesure de Radon voir [**3**].

COROLLAIRE. *Deux mesures vectorielles régulières* $\boldsymbol{m}$ *et* $\boldsymbol{m}'$ *de* $\mathfrak{M}(T, \mathcal{A}, F)$ *sont égales si et seulement si* $\int \mathbf{x} d\boldsymbol{m} = \int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}'$ *pour tout champ* $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$.

2. OPERATIONS LINÉAIRES SUR $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$

1. Représentation des opérations linéaires majorées. Soit m une application linéaire et *majorée* de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$ dans F, c'est-à-dire telle qu'il existe une mesure de Radon positive ν sur T vérifiant $|m(\mathbf{x})| \leqq \nu(|\mathbf{x}|)$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$. Il existe alors [5] une plus petite mesure de Radon positive μ sur T, majorante de m.

Considérons l'espace $L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$ des champs de vecteurs μ-intégrable $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$, et prolongeons m par continuité à $L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$. Pour toute fonction $f \in L^1_C(\mu)$ et tout champ $\mathbf{x} \in L^\infty_{\mathcal{A}}(\mu)$, on a $f\mathbf{x} \in L^1_{\mathcal{A}}(\mu)$; posons $\boldsymbol{T}(f)\mathbf{x} = m(f\mathbf{x})$. L'application $\boldsymbol{T}(f): \mathbf{x} \to \boldsymbol{T}(f)\mathbf{x}$ de $\mathcal{A}$ dans F est linéaire et continue: $|\boldsymbol{T}(f)\mathbf{x}| = |m(f\mathbf{x})| \leqq \int |\mathbf{x}|\,|f|\, d\mu \leqq N_\infty(\mathbf{x}, \mu) N_1(f, \mu)$ donc $\|\boldsymbol{T}(f)\| \leqq N_1(f, \mu)$. L'application $\boldsymbol{T}: f \to \boldsymbol{T}(f)$ de $L^1_C(\mu)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$ est linéaire et continue. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}$ posons

$$\boldsymbol{m}(A) = \boldsymbol{T}(\phi_A). \tag{8}$$

PROPOSITION 3. *La fonction d'ensemble* $\boldsymbol{m}$ *définie par* (8) *est une mesure vectorielle régulière appartenant à* $\mathfrak{M}(T, \mathcal{A}, F)$.

DÉMONSTRATION. $\boldsymbol{m}$ *est dénombrablement additive*, car si (A_n) est une suite d'ensembles deux-à-deux disjoints de $\mathcal{B}$ et $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ alors la série $\sum_{n=1}^\infty \phi_{A_n}$ est convergente dans la topologie de $L^1_C(\mu)$ et a pour somme ϕ_A. L'application $f \to \boldsymbol{T}(f)$ étant continue, on déduit $\boldsymbol{T}(\phi_A) = \sum_{n=1}^\infty \boldsymbol{T}(\phi_{A_n})$ ou $\boldsymbol{m}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \boldsymbol{m}(A_n)$, la série étant convergente dans la norme de $\mathcal{L}(\mathcal{A}, F)$.

$\boldsymbol{m}$ *est à variation finie.* Si $A \in \mathcal{B}$ et $(A_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ est une partition de A en ensembles de $\mathcal{B}$, alors

$$\sum_i |\boldsymbol{m}(A_i)| = \sum_i \|\boldsymbol{T}(\phi_{A_i})\| \leqq \sum_i N_1(\phi_{A_i}, \mu) = \sum_i \mu(A_i) = \mu(A).$$

Comme $\tilde{\mu}$ est la plus petite fonction d'ensemble vérifiant $|\boldsymbol{m}(A)| \leqq \mu(A)$ pour $A \in \mathcal{B}$, on deduit que $\tilde{\mu}(A) \leqq \mu(A)$ pour $A \in \mathcal{B}$. La fonction d'ensemble μ étant régulière, il en résulte que $\tilde{\mu}$ *est réguliere* donc aussi $\boldsymbol{m}$. Enfin, on déduit facilement que $\boldsymbol{m}$ *vérifie l'axiome* (**) et ceci achève la démonstration.

THÉORÈME 2. *Pour toute application linéaire et majorée* m *de* $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T)$ *dans* F, *il existe une mesure vectorielle régulière unique* $\boldsymbol{m}$ *appartenant à* $\mathfrak{M}(T, \mathcal{A}, F)$, *telle que*

$$m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x} d\boldsymbol{m} \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}(T). \tag{9}$$

En outre $\|m\| = |\boldsymbol{m}|(T)$ *et* $\mu = \tilde{\mu}$.

DÉMONSTRATION. La fonction $\boldsymbol{m}$ définie par (8) est régulière et appartient à $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$ (Proposition 3) et on vérifie aisément que $m(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}(T)$, car si $A \in \mathfrak{B}$ et $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$, alors $\boldsymbol{m}(A)\mathbf{x} = \boldsymbol{m}(\phi_A \mathbf{x})$. L'unicité de $\boldsymbol{m}$ résulte du corollaire du Théorème 1. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ on a $|m(\mathbf{x})| = |\int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}| \leqq \int |\mathbf{x}| d\tilde{\mu}$, et comme μ est la plus petite mesure de Radon majorante de m, on déduit que $\mu \leqq \tilde{\mu}$. L'inégalité $\tilde{\mu} \leqq \mu$ étant vraie (démonstration de la Proposition 3), il en résulte que $\mu = \tilde{\mu}$. Il reste à prouver que $\|m\| = |\boldsymbol{m}|(T)$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ et $\epsilon > 0$. Il existe un champ étagé $\sum_i \phi_{A_i} \mathbf{x}_i$ tel que

$$\left| \mathbf{x}(t) - \sum_i \phi_{A_i}(t) \mathbf{x}_i(t) \right| \leqq \min (\epsilon, \epsilon / \|m\|)$$

pour $t \in T$. On déduit d'abord que $\|\phi_{A_i} \mathbf{x}_i\| \leqq \|\mathbf{x}\| + \epsilon$ pour chaque i. Puis $|m(\mathbf{x}) - \sum_i \boldsymbol{m}(A_i)\mathbf{x}_i| \leqq \epsilon$, donc,

$$\begin{aligned} |m(\mathbf{x})| &\leqq \left| \sum_i \boldsymbol{m}(A_i)\mathbf{x}_i \right| + \epsilon \leqq (\|\mathbf{x}\| + \epsilon) \left| \sum_i \boldsymbol{m}(A_i) \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}\| + \epsilon} \right| + \epsilon \\ &\leqq (\|\mathbf{x}\| + \epsilon) |\boldsymbol{m}|(T) + \epsilon; \end{aligned}$$

ϵ étant arbitraire, on a $|m(\mathbf{x})| \leqq \|\mathbf{x}\| |\boldsymbol{m}|(T)$ et par suite $\|m\| \leqq |\boldsymbol{m}|(T)$.

Soit maintenant $\mathbf{x} = \sum_i \phi_{A_i} \mathbf{x}_i$ un champ étagé tel que $\|\mathbf{x}\| \leqq 1$ et soit $\epsilon > 0$. Comme $\mathbf{x}$ est μ-mesurable, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\mu(T-K) < \epsilon/2(1+\epsilon) < \epsilon/2$ et tel que $\mathbf{x}$ soit continu sur K. Il existe alors [**7**, p. 82, Proposition 7] un champ $y \in \mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ tel que $\phi_K \mathbf{x} = \phi_K y$ et $\|y\| \leqq 1 + \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned} &\left| \sum_i \boldsymbol{m}(A_i)\mathbf{x}_i \right| \\ &= \left| \sum_i m(\phi_{A_i}\mathbf{x}_i) \right| = \left| m\left(\sum_i \phi_{A_i}\mathbf{x}_i \right) \right| \leqq |m(\phi_K \mathbf{x})| + |m(\phi_{T-K}\mathbf{x})| \\ &= |m(y) - m(\phi_{T-K} y)| + |m(\phi_{T-K}\mathbf{x})| \leqq |m(y)| + (1+\epsilon)\mu(T-K) \\ &\quad + \mu(T-K) \leqq |m(y)| + \epsilon \leqq \|m\|(1+\epsilon) + \epsilon; \end{aligned}$$

ϵ étant arbitraire, on déduit que $|\sum_i \boldsymbol{m}(A_i)\mathbf{x}_i| \leqq \|m\|$, donc $|\boldsymbol{m}|(T) \leqq \|m\|$, et ceci achève la démonstration.

REMARQUES. 1°. Soit $\boldsymbol{m}$ une mesure vectorielle régulière de $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$; d'après l'inégalité (7) l'application $\mathbf{x} \to \int \mathbf{x} d\boldsymbol{m}$ de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}}(T)$ dans F est majorée par sa variation $\tilde{\mu}$. Le Théorème 2 établit donc une correspondence biunivoque entre le sous espace des opérations *majorées* de $\mathfrak{L}(\mathcal{C}_A, F)$ et le sous-espace des mesures *régulières* de $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{A}, F)$.

2°. Si $F=C$ on sait [**5**] que $\|m\|=\|\mu\|$; on déduit alors que $|\boldsymbol{m}|(T)=\tilde{\mu}(T)$ D'ailleurs on peut prouver directement que $|\boldsymbol{m}|(A)=\tilde{\mu}(A)$ pour tout $A\in\mathcal{B}$. Un théorème analogue au Théorème 2 a été démontré dans ce cas par une voie différente, par I. Singer [**13**].

3°. Pour le cas $E(t)=E$ quel que soit $t\in T$ et $F=C$, on retrouve les résultats de M. Gowurin [**8**, §6], S. Bochner et A. E. Taylor [**2**, §3, Théorème 3.1] et I. Singer [**12**].

4°. Pour le cas $E(t)=C$ quel que soit $t\in T$, des théorèmes analogues ont été démontrés par I. Gelfand [**6**, II, §8, Théorème 1 et Théorème 2], Bartle, Dunford et Schwartz [**1**, Théorème 3.2 et Théorème 3.5] et A. Grothendieck [**9**, §3, Proposition 14]. Du Théorème 3.2. de [**1**] on déduit que toute application majorée m de $C(T)$ dans F est aussi faiblement compacte (mais non nécessairement compacte).

5°. Si $E(t)=F=R$, le Théorème 2 généralise un théorème bien connu de S. Kakutani [**11**, Théorème 10].

6°. Si $E(t)=F$ pour tout $t\in T$, on peut plonger C isométriquement dans $\mathcal{L}(F)$. Dans ce cas la mesure vectorielle $\boldsymbol{m}$ définie par (8) est à valeurs dans C et non seulement dans $\mathcal{L}(F)$ si et seulement si m est une mesure de Radon sur T.

2. **Représentation des mesures vectorielles régulières.** Supposons que la famille fondamentale $\mathcal{A}$ verifie l'axiome (G) de Godement et que F est de type dénombrable et dual d'un espace de Banach. Un champ d'opérations est une fonction $\boldsymbol{U}$ définie sur T, telle que $\boldsymbol{U}(t)\in\mathcal{L}(E(t),F)$ quel que soit $t\in T$. On dit que $\boldsymbol{U}$ est *simplement mesurable* pour une mesure de Radon positive μ si la fonction $t\rightarrow\boldsymbol{U}(t)\mathrm{x}(t)$ est μ-mesurable quel que soit $\mathrm{x}\in\mathcal{A}$. En tenant compte du Théorème 2, de la remarque 1 et du Théorème 5 de [**5**], on déduit le

Théorème 3. *Si $\mathcal{A}$ vérifie l'axiome* (G) *et F est du type dénombrable et dual d'un espace de Banach, pour toute mesure vectorielle régulière $\boldsymbol{m}$ de $\mathfrak{M}(T,\mathcal{A},F)$ il existe un champ d'opérations $\boldsymbol{U}$ simplement $\tilde{\mu}$-mesurable, déterminé $\tilde{\mu}$-presque partout, tel que $|\boldsymbol{U}(t)|\equiv 1$ et*

$$\int \mathrm{x}d\boldsymbol{m}=\int \boldsymbol{U}(t)\mathrm{x}(t)d\tilde{\mu}(t)\qquad \textit{pour } \mathrm{x}\in L^1_{\mathcal{A}}(\tilde{\mu}).$$

En particulier, pour tout $\mathrm{x}\in\mathcal{A}$ et $A\in\mathcal{B}$ on a

$$\boldsymbol{m}(A)\mathrm{x}=\int_A \boldsymbol{U}(t)\mathrm{x}(t)d\tilde{\mu}(t). \tag{10}$$

Si en outre $E(t)=E$ pour tout $t\in T$ on dit que $\boldsymbol{V}\in\mathcal{L}(E,F)$ est l'*intégrale simple* de la fonction $t\rightarrow\boldsymbol{U}(t)$ par rapport à $\tilde{\mu}$ si $\boldsymbol{V}x=$

$\int \boldsymbol{U}(t)xd\tilde{\mu}(t)$ pour tout $x \in E$ ce qu'on convient d'écrire $\boldsymbol{V} = \int \boldsymbol{U}(t)d\tilde{\mu}(t)$. L'égalité (10) devient alors

$$\boldsymbol{m}(A) = \int_A \boldsymbol{U}(t)d\tilde{\mu}(t).$$

Si $\boldsymbol{U}$ est $\tilde{\mu}$-mesurable (par exemple si $\mathcal{L}(E, F)$ est de type dénombrable), alors l'intégrale du seconde membre est l'intégrale forte [3].

3. **Cas des algèbres.** Soit A une algèbre de Banach à élément unité e et considerons A plongée isométriquement dans $\mathcal{L}(A)$ en identifiant un élément $a \in A$ avec l'opération $\boldsymbol{U}_a$ de multiplication à droite par a.

THÉORÈME 4. *Soit m une application linéaire et majorée de $\mathcal{C}_A(T)$ dans A. La mesure vectorielle $\boldsymbol{m}$ attachée à m par le Théorème 2 est a valeurs dans A si et seulement si m vérifie la condition*

$$m(a\mathrm{x}) = am(\mathrm{x}) \qquad \textit{pour } a \in A \textit{ et } \mathrm{x} \in \mathcal{C}_A(T). \tag{11}$$

DÉMONSTRATION. Si $\boldsymbol{m}$ prend ses valeurs dans A, on a $\int a\mathrm{x}d\boldsymbol{m} = a\int \mathrm{x}d\boldsymbol{m}$, d' abord pour les fonctions étagées et puis pour les fonctions $\mathrm{x} \in \mathcal{C}_A(T)$, et comme $m(\mathrm{x}) = \int \mathrm{x}d\boldsymbol{m}$, on deduit (11). Inversement, supposond la condition (11) vérifiée et considérons m prolongée à $L_A^1(\mu)$. Pour toute fonction $f \in L_C^1(\mu)$ on a $e\phi \in L_A^1(\mu)$. Posons $\boldsymbol{T}(f) = m(ef)$. Pour $B \in \mathcal{B}$ posons $\boldsymbol{m}(B) = \boldsymbol{T}(\phi_B) = m(e\phi_B)$; de (11) on deduit que $a \cdot \boldsymbol{m}(B) = m(a\phi_B)$ pour tout $a \in A$, donc, en considérant $\boldsymbol{m}(B)$ comme élément de $\mathcal{L}(A)$, il est identique à celui défini par (8). De l'égalité

$$a \cdot \boldsymbol{m}(B) = m(a\phi_B)$$

on déduit que $m(\mathrm{x}) = \int \mathrm{x}d\boldsymbol{m}$, d'abord pour les fonctions x étagées et puis pour $\mathrm{x} \in \mathcal{C}_A(T)$.

REMARQUE. Si l'on identifie un élément $a \in A$ avec l'opérateur $\boldsymbol{V}_a$ de multiplication à gauche par a, $\boldsymbol{m}$ est à valeurs dans A si et seulement si $m(\mathrm{x}a) = m(\mathrm{x}) \cdot a$ pour $a \in A$ et $\mathrm{x} \in \mathcal{C}_A(T)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. G. Bartle, N. Dunford and J. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. J. Math. vol. 7 (1955) pp. 289–305.

2. S. Bochner and A. E. Taylor, *Linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions*, Ann. of Math. vol. 39 (1938) pp. 913–944.

3. N. Bourbaki, *Intégration*, Livre VI, Chapter I–IV, Paris, 1952.

4. N. Dinculeanu, *Mesures vectorielles et opérations linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris vol. 246 (1958) pp. 2328–2331.

5. ———, *Représentation intégrale de certaines opérations linéaires* II, Compositio Math. à paraêtre.

6. I. Gelfand, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Mat. Sb. vol. 4(46) (1938) pp. 68–124.

7. R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires*, Ann. of Math. vol. 53 (1951) pp. 68–124.

8. M. Gowurin, *Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen*, Fund. Math. vol. 27 (1936) pp. 254–268.

9. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type* $C(K)$, Canad. J. Math. vol. 5 (1953) pp. 129–173.

10. P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York, 1950.

11. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract* (M)*-spaces*, Ann. of Math. vol. 42 (1941) pp. 994–1024.

12. I. Singer, *Les fonctionnelles linéaires sur l'espace des applications continues d'un espace de Hausdorff bicompact dans un espace de Banach* (en russe), Rev. Math. Pures Appl. vol. 2 (1957) pp. 301–315.

13. ———, *Les duals de certains espaces de Banach de champs de vecteurs*, Bull. Sci. Math. vol. 82 (1958) pp. 29–40.

UNIVERSITÉ DE BUCAREST, ROUMANIE

ON A DIVERGENT TRIGONOMETRICAL SERIES GIVEN BY STEINHAUS[1]

SIOBHAN O'SHEA

Steinhaus [1; 2, p. 283] gave the series

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-1} \cos n(x - \log \log n) \tag{1}$$

as an example of an everywhere-divergent trigonometric series with coefficients tending to zero. Plainly, a *sine* series cannot diverge everywhere, since it must converge whenever $x \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \pi)$. There is, however, no *a priori* reason why a *cosine* series should not diverge everywhere. It is not immediately clear from Steinhaus's argument [1] whether the "cosine part" of (1), namely

$$\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-1} \cos (n \log \log n) \cos nx, \tag{2}$$

has any points of convergence. Accordingly I exhibit here a class of everywhere-divergent cosine series, of which (2) is a special case.

THEOREM. *Suppose that* $u(n) \uparrow \infty$, $c_n \downarrow 0$ *as* $n \to \infty$, *and that there exists a sequence of positive integers* $\{p_n\}$ *such that*

$$\limsup_{n\to\infty} (n + p_n)\{u(n + p_n) - u(n)\} < \frac{1}{2}, \tag{3}$$

Received by the editors May 28, 1958.

[1] Research sponsored by the Air Research and Development Command, United States Air Force, through its European Office, under Contract AF 61(514)-1399.