PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 52, October 1975

UNE CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES DES POINTS DE DISCONTINUITÉ DES FONCTIONS LINÉAIREMENT-CONTINUES

ZBIGNIEW GRANDE

ABSTRACT. A function $f: R^2 \to R$ (where R is the set of real numbers) is called linearly-continuous if for each x and y the functions f_x and f^y given by $f_x(t) = f(x, t)$ and $f^y(t) = f(t, y)$ for $-\infty < t < \infty$ are continuous.

It is proven that: A set $A \subset R^2$ is the set of points of discontinuity for a linearly-continuous function iff A is F_σ contained in a cartesian product of two linear sets of first category. It is proven also that an analogous characterisation is not possible for an approximatively linearly-continuous function.

Soit $f: R^2 \longrightarrow R$ une fonction réelle définie sur le plan R^2. La fonction f s'appelle linéairement-continue lorsque toutes ses coupes $f_x(y) = f(x, y)$ et $f^y(x) = f(x, y)$ sont continues.

On sait que chaque fonction $f: R^2 \longrightarrow R$ continue est aussi linéairement-continue. Le théorème contraire n'est pas vrai; par exemple la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \text{ et } y = 0, \\ xy/(x^4 + y^4) & \text{pour } x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0, \end{cases}$$

est linéairement-continue, mais elle n'est pas ni continue ni même approximativement continue.

Dans le travail [4] G. Tolstoff a montré même un exemple d'une fonction linéairement-continue qui n'est pas continue à chaque point d'un ensemble de mesure de Lebesgue positive.

D'autre part on sait que pour chaque fonction f linéairement-continue il existe un ensemble $A \subset R$ de première catégorie tel que la fonction f est continue à chaque point $(x, y) \in R^2 - A \times R$ (voir [2, p. 337] ou [1]).

Il en résulte:

Remarque 1. Si la fonction $f: R^2 \longrightarrow R$ est linéairement-continue, il existe des ensembles de première catégorie $A \subset R$ et $B \subset R$ tels que la fonction f est continue à chaque point $(x, y) \in R^2 - A \times B$.

Received by the editors August 6, 1974.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 26A15.

Key words and phrases. La fonction linéairement-continue, la fonction approximativement linéairement-continue, l'ensemble du type F_σ, l'ensemble de première categorie, le produit cartésien.

En outre l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f est du type F_σ.

Alors on peut poser la question suivante: existe-t-il pour tout ensemble superficiel C du type F_σ contenu dans un ensemble $A \times B$, où $A \subset R$, $B \subset R$ et A, B sont de première catégorie, une fonction linéairement-continue qui est continue à chaque point $(x, v) \in R^2 - C$ et discontinue à chaque point $(x, y) \in C$?

Dans ce travail je donne la réponse positive à cette question et je montre que la caractérisation semblable pour les fonctions linéairement-approximativement continues (toutes ses coupes f_x et f^y sont approximativement continues) est impossible.

Dans la démonstration du Théorème 1 j'appliquerai les lemmes suivants:

Lemme 1. *Soit $C \subset R^2$, $C \in F_\sigma$ et $C \subset A \times B$, où $A \subset R$, $B \subset R$ et les ensembles A et B sont de première catégorie.*

Alors il existe une suite $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ d'ensembles fermés tel que $C = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et tous les ensembles $C_n \subset A_n \times B_n$, où $A_n \subset R$, $B_n \subset R$ et tous les ensembles A_n et B_n sont non-denses.

Démonstration. Il existe des ensembles $D \subset R$ et $E \subset R$, du type F_σ et de première catégorie tels que $A \subset D$ et $B \subset E$. On peut écrire (voir [3]) que $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n$ et $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, où tous les ensembles D_n et E_n sont fermés et $D_i \cap D_j = \emptyset$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Tous les ensembles D_n et E_n sont non-denses car ils sont fermés et de première catégorie.

Soit $C_{i,j} = C \cap (D_i \times E_j)$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$. Il reste à prouver que chaqu'ensemble $C_{i,j}$ est la somme d'une suite d'ensembles fermés et disjoints.

Comme chaqu'ensemble $C_{i,j} \in F_\sigma$, on a donc $C_{i,j} = \bigcup_{m=1}^\infty C_{i,j}^m$, où tous les ensembles $C_{i,j}^m$ sont des differences de deux ensembles fermés et $C_{i,j}^k \cap C_{i,j}^l = \emptyset$ pour $k \neq l$. Je montrerai que chaqu'ensemble $C_{i,j}^m$ est la somme d'une suite d'ensembles fermés et disjoints.

Soit $C_{j_0,j_0}^{m_0} = F - G$, où les ensembles F et G sont fermés et contenus dans $D_{i_0} \times E_{j_0}$. Désignons par H l'ensemble $\mathrm{Cl}(F - G) \cap G$, où $\mathrm{Cl}(F - G)$ désigne la fermeture de l'ensemble $F - G$. Soit $(x, y) \in H$. Il existe, pour tout nombre naturel n, des intervalles fermés $[\alpha_n^{(x)}, \beta_n^{(x)}]$ et $[\gamma_n^{(y)}, \delta_n^{(y)}]$ tels que $\alpha_n^{(x)} < x < \beta_n^{(x)}$, $\gamma_n^{(y)} < y < \delta_n^{(y)}$ et $(n+1)^{-1} < \beta_n^{(x)} - \alpha_n^{(x)} < n^{-1}$, $(n+1)^{-1} < \delta_n^{(y)} - \gamma_n^{(y)} < n^{-1}$, $\alpha_n^{(x)} \notin D_{i_0}$, $\beta_n^{(x)} \notin D_{i_0}$, $\gamma_n^{(y)} \notin E_{j_0}$, $\delta_n^{(y)} \notin E_{j_0}$. Pour tout nombre naturel n, la famille d'ensembles ouverts $\{(\alpha_n^{(x)}, \beta_n^{(x)}) \times (\gamma_n^{(y)}, \delta_n^{(y)})\}_{(x,y)\in H}$ est un recouvrement de l'ensemble fermé H. Alors cette famille contient une sous-famille finie $\{(\alpha_n^{(i)}, \beta_n^{(i)}) \times (\gamma_n^{(i)}, \delta_n^{(i)})\}_{i=1}^{N_n}$ qui recouvre aussi l'ensemble H.

Désignons par J_n l'ensemble

$$\left\{\bigcup_{i=1}^{N_n}[(\alpha_n^{(i)}, \beta_n^{(i)}) \times (\gamma_n^{(i)}, \delta_n^{(i)})] - \bigcup_{i=1}^{N_{n+1}}[(\alpha_{n+1}^{(i)}, \beta_{n+1}^{(i)}) \times (\gamma_{n+1}^{(i)}, \delta_{n+1}^{(i)})]\right\} \cap C_{i_0, j_0}^{m_0}.$$

Chaqu'ensemble J_n est fermé et

$$C_{i_0,j_0}^{m_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \cup \left(C_{i_0,j_0}^{m_0} - \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right).$$

Alors la démonstration du Lemme 1 est achevée.

Lemme 2. *Soit $A \subset R^2$ un ensemble fermé tel que $A \subset B \times C$, où les ensembles $B \subset R$ et $C \subset R$ sont non-denses. Soit $\alpha > 0$.*

Il existe une fonction $f: R^2 \to [0, \alpha]$ linéairement-continue qui est continue à chaque point $(x, y) \in R^2 - A$, discontinue à chaque point $(x, y) \in A$ et qui satisfait à la condition suivante: $f(x, y) = \alpha$ pour tout point $(x, y) \in A$, et il existe, pour tout point $(x_0, y_0) \in A$, une suite de points $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergente vers (x_0, y_0) et tel que la suite $\{f(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0.

Démonstration. Soit $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ une suite dense dans A tel que $(x_i, y_i) \neq (x_j, y_j)$ pour $i \neq j$.

Nous définirons maintenant par récurrence une suite de boules fermées K_n^i $(i \leq n)$.

Remarquons d'abord qu'il existe des intervalles ouverts $(\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)})$ et $(\gamma_1^{(1)}, \delta_1^{(1)})$ tel que $\alpha_1^{(1)} < \beta_1^{(1)} < x_1$, $y_1 < \gamma_1^{(1)} < \delta_1^{(1)}$, l'intervalle fermé $[\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}] \subset R - \mathrm{Cl}(B)$ et l'intervalle fermé $[\gamma_1^{(1)}, \delta_1^{(1)}] \subset R - \mathrm{Cl}(C)$.

Soit K_1^1 une boule fermée contenue dans l'ensemble $(\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}) \times (\gamma_1^{(1)}, \delta_1^{(1)})$. Supposons que toutes les boules K_n^i $(i \leq n,\ n \leq N)$ sont déjà définies. Admettons, en outre, qu'elles sont disjoints deux à deux et que chaque distance

$$\rho(K_n^i, A) = \min_{x \in K_n; y \in A} \rho(x, y) > 0.$$

Nous definirons maintenant des boules fermées K_{N+1}^i, $i \leq N+1$, disjoints deux à deux. Soit $d = \min_{n \leq N; i \leq n} \rho(K_n^i, A)$. Evidement $d > 0$. Il existe des intervalles ouverts $(\alpha_{N+1}^{(i)}, \beta_{N+1}^{(i)})$ et $(\gamma_{N+1}^{(i)}, \delta_{N+1}^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N+1$, tels que $[\alpha_{N+1}^{(i)}, \beta_{N+1}^{(i)}] \subset R - \mathrm{Cl}(B)$, $[\gamma_{N+1}^{(i)}, \delta_{N+1}^{(i)}] \subset R - \mathrm{Cl}(C)$, $[\alpha_{N+1}^{(i_1)}, \beta_{N+1}^{(i_1)}] \not\subset (\alpha_{N+1}^{(i_2)}, \beta_{N+1}^{(i_2)})$, $[\gamma_{N+1}^{(i_1)}, \delta_{N+1}^{(i_1)}] \not\subset (\gamma_{N+1}^{(i_2)}, \delta_{N+1}^{(i_2)})$ $(i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, N+1$ et $i_1 \neq i_2)$, $\alpha_{N+1}^{(i)} < \beta_{N+1}^{(i)} < x_i$, $y_i < \gamma_{N+1}^{(i)} < \delta_{N+1}^{(i)}$, $x_i - \alpha_{N+1}^{(i)} < d/(N+1)$ et

$\delta^{(i)}_{N+1} - y_i < d/(N+1)$. Ensuite dans chaqu'ensemble ouvert $(\alpha^{(i)}_{N+1}, \beta^{(i)}_{N+1}) \times (y^{(i)}_{N+1}, \delta^{(i)}_{N+1})$ je trouve une boule fermée (qui est contenue dans lui) de manière que $K^{i_1}_{N+1} \cap K^{i_2}_{N+1} = \emptyset$ pour $i_1 \neq i_2$. Les boules de la suite $\{K^i_n\}^{\infty}_{n=1; i \leq n}$ sont disjoints deux à deux et chaque suite de points $\{p_k\}^{\infty}_{k=1}$ qui a au plus un point commun avec chaque boule K^i_n ne peut que converger vers un point de l'ensemble A. Soit $f/K^i_n \colon K^i_n \to [0, \alpha]$ une fonction continue telle que $f/K^i_n(x, y) = 0$ lorsque (x, y) est le centre de la boule K^i_n et $f/K^i_n(x, y) = \alpha$ pour $(x, y) \in \operatorname{Fr} K^i_n$ (la frontière de la boule K^i_n). Soit

$$f(x, y) = \begin{cases} f/K^i_n(x, y) & \text{pour } (x, y) \in K^i_n, \\ \alpha & \text{pour } (x, y) \in R^2 - \bigcup^{\infty}_{n=1; i \leq n} K^i_n. \end{cases}$$

La fonction f satisfait aux conditions du Lemme 2.

Théorème 1. *Soit $A \subset R^2$, $A \in F_\sigma$ et $A \subset B \times C$, où $B \subset R$, $C \subset R$ et B et C sont de première catégorie.*

Alors il existe une fonction $f \colon R^2 \to R$ linéairement-continue qui est continue à chaque point $(x, y) \in R^2 - A$ et discontinue à chaque point $(x, y) \in A$.

Démonstration. D'après le Lemme 2 on a $A = \bigcup^{\infty}_{n=1} A_n$, où tous les ensembles A_n sont fermés, $A_n \subset B_n \times C_n$, $B_n \subset R$, $C_n \subset R$, B_n et C_n sont non-denses et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Soit $\{a_n\}^{\infty}_{n=1}$ une suite de nombres positifs telle que $\tfrac{1}{2} a_i > \sum^{\infty}_{n=i+1} a_n$ pour tout i. Soit $f_n \colon R^2 \to R$ une fonction qui satisfait aux conditions du Lemme 2, où $A = A_n$ et $\alpha = a_n$.

Posons $f(x, y) = \sum^{\infty}_{n=1} f_n(x, y)$. La fonction f est linéairement-continue et continue à chaque point $(x, y) \in R^2 - A$, car elle est la somme de la série uniformément convergente de fonctions linéairement-continues et continues à chaque point $(x, y) \in R^2 - A$. Il reste à prouver qu'elle est discontinue à chaque point $(x, y) \in A$.

Soit $(x_0, y_0) \in A$. Il existe un indice n_0 tel que $(x_0, y_0) \in A_{n_0}$, donc $f_{n_0}(x_0, y_0) = a_{n_0} > 0$. D'après le Lemme 2 il existe une suite de points (x_k, y_k) convergente vers le point (x_0, y_0) et telle que $f_{n_0}(x_k, y_k) \to 0$ lorsque $k \to \infty$. De l'égalité

$$\sum_{n=1}^{n_0} f_n(x, y) = \sum_{n=1}^{n_0 - 1} f_n(x, y) + f_{n_0}(x, y)$$

et de la continuité de la fonction $\sum^{n_0 - 1}_{n=1} f_n$ au point (x_0, y_0), il existe un indice k_0 tel que

$$\sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_k, y_k) < \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_0, y_0) - a_{n_0} + \frac{1}{3} a_{n_0}$$

pour chaque $k > k_0$. Par conséquence

$$\sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_k, y_k) + \frac{2}{3} a_{n_0} < \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_0, y_0) \quad \text{pour } k > k_0.$$

On a donc pour $k > k_0$,

$$f(x_k, y_k) = \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_k, y_k) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(x_k, y_k)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_k, y_k) + \frac{1}{2} a_{n_0} < \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_0, y_0) - \frac{1}{6} a_{n_0}.$$

Alors

$$\limsup_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \leq \sum_{n=1}^{n_0} f_n(x_0, y_0) - \frac{1}{6} a_{n_0} < f(x_0, y_0)$$

et la fonction f n'est pas continue au point (x_0, y_0). Notre théorème est démontré.

De la remarque 1 et du Théorème 1 nous avons

Corollaire 1. *Pour qu'un ensemble $A \subset R^2$ soit un ensemble des points de discontinuité de certaine fonction linéairement-continue il faut et il suffit qu'il soit du type F_σ et qu'il se contienne dans le produit cartésien de deux ensembles linéaires de première catégorie.*

Lemme 3. *Soit $A \subset R$ la somme de deux ensembles dont l'un est fermé et l'autre dénombrable. Soit x_0 un point d'éclaircie de l'ensemble A.*

Alors il exist une fonction $g: R \to R$ approximativement continue telle que $g(x_0) = 1$ et la fermeture de l'ensemble $\{x \in R;\ g(x) \neq 0\}$ et l'ensemble $A - \{x_0\}$ sont disjoints.

Démonstration. Soit $G \subset R$ un ensemble ouvert contenant A qui est au point x_0 d'épaisseur 0. Soit $F \subset R - G$ un ensemble de classe M_5 de Zahorski (voir [5], c'est à dire, $F \in F_\sigma$ et tout point $x \in F$ est un point de densité de l'ensemble F) contenant le point x_0. Alors il existe une fonction $g_1: R \to R$ approximativement continue telle que $g_1(x) = 0$ pour $x \in R - F$ et $0 < g_1(x) \leq 1$ pour $x \in F$. Comme $x_0 \in F$, on a donc $g_1(x_0) > 0$. Posons $g(x) = g_1(x)/g_1(x_0)$. La fonction g satisfait aux conditions du Lemme 3.

Théorème 2. *Il existe une fonction $f: R^2 \to R$ telle que toutes les coupes f_x et f^y sont approximativement continues et l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f contient la droite $y = x$.*

Démonstration. Soient A and B deux ensembles disjoints et denses dans l'espace R. Soit $C = A \cup B$. Soit $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, où $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$. Evidemment x_1 est point d'éclaircie de l'ensemble C. D'après le Lemme 3 il existe une fonction approximativement continue $g_1: R \to R$ telle que $g_1(x_1) = 1$ et la fermeture de l'ensemble $\{x \in R;\ g_1(x) \neq 0\}$ ne coupe pas l'ensemble $C - \{x_0\}$. Supposons que toutes les fonctions $g_i: R \to R$ sont déjà définies. Admettons, en outre, qu'elles sont approximativement continues, $g_i(x_i) = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et que fermeture de l'ensemble $\{x \in R;\ g_i(x) \neq 0\}$ est disjoint avec l'ensemble

$$\left[C \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathrm{Cl}(\{x;\ g_j(x) \neq 0\})\right] - \{x_i\}.$$

On voit facilement que x_{n+1} est point d'éclaircie de l'ensemble $C \cup \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Cl}(\{x;\ g_j(x) \neq 0\})$. D'apres le Lemme 3 il existe donc une fonction $g_{n+1}: R \to R$ approximativement continue telle que $g_{n+1}(x_{n+1}) = 1$ et

$$\mathrm{Cl}(\{x;\ g_{n+1}(x) \neq 0\}) \cap \left[C \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{x;\ g_j(x) \neq 0\}\right] = \emptyset.$$

Posons $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \cdot g_n(y)$. La fonction $f: R^2 \to R$ satisfait aux conditions du Théorème 2.

TRAVAUX CITÉS

1. A. Alexiewicz and W. Orlicz, *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fund. Math. 35 (1948), 105–126. MR 10, 307.

2. H. Hahn, *Reelle funktionen*, Chelsea, New York, 1948.

3. W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles F_σ linéaires*, Fund. Math. 14 (1929), 216–220.

4. G. P. Tolstov, *On partialderivatives*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 13 (1949), 425–446; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (1) 10 (1962), 55–83. MR 11, 167.

5. Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 1–54. MR 12, 247.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ, 80-216 GDAŃSK, POLAND