PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 57, Number 1, May 1976

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES DONT LES COUPES SONT DES DERIVEES

ZBIGNIEW GRANDE

ABSTRACT. This paper concerns relationships between the measurability of a function f: $I^2 \to R$ (when $I = \langle 0, 1\rangle$ and R is the set of all real numbers) and its cross sections $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ and $f^{y_0}(x) = f(x, y_0)$. A function g: $I \to R$ is said to have property (K) if for each measurable set $A \subset I$ of positive measure the function g is *ponctuellement-discontinue* (i.e., the set of continuities is dense) on the closure of the set of all density points of A. The main result is: If a function f: $I^2 \to R$ is bounded and each f_x has property (K) and each f^y is a derivative, then f is Lebesgue measurable.

Soit f: $I^2 \to R$ une fonction réelle définie sur I^2, où $I^2 = I \times I$ et $I = \langle 0, 1\rangle$.

Dans le travail [6] Lipiński a introduit la définition suivante:

DÉFINITION 1. Une fonction bornée f: $I^2 \to R$ a la propriété (J) lorsque toutes ses coupes $f_x(t) = f(x, t)$ et $f^y(t) = f(t, y)$ $(x, y, t \in I)$ sont mesurables au sens de Lebesgue et lorsque, quel que soit $t \in I$, la fonction

$$g_t(y) = \int_0^t f(x,y)dx$$

est mesurable au sens de Lebesgue; et il a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 0. *Si la fonction bornée f: $I^2 \to R$ a la propriété* (J) *et si toutes ses coupes f^y sont des dérivées, alors elle est mesurable au sens de Lebesgue.*

Dans le travail [2] j'ai introduit la définition suivante:

DÉFINITION 2. Une fonction g: $R \to R$ a la propriété (K) lorsqu'elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé dont l'ensemble de tous points d'épaisseur est dense dans lui.

De plus, j'ai démontré dans ce travail que la propriété (K) de toutes les coupes f_x et la continuité approximative de toutes les coupes f^y impliquent la mesurabilité au sens de Lebesgue de la fonction f: $R^2 \to R$.

D'autre part on sait (voir [6]) qu'il existe une fonction f: $I^2 \to R$ non-mesurable au sens de Lebesgue dont toutes les coupes f_x et f^y sont de première classe de Baire, ont la propriété de Darboux et ne sont pas approximativement continues au plus en un point.

Le Professeur Lipiński a posé la question suivante:

La supposition que toutes les coupes f_x et f^y sont des dérivées implique-t-elle la mesurabilité au sens de Lebesgue de la fonction f: $I^2 \to R$?

Received by the editors April 25, 1975.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 26A35.

Une résolution partielle de ce problème se trouve dans le travail [5].

Dans ce travail j'ai résolu positivement ce problème dans le cas, où la fonction $f\colon I^2 \to R$ est bornée.

Dans la démonstration du Théorème 1 nous appliquons les lemmes suivants:

LEMME 1 (VOIR [1, LE LEMME 2]). *Soit* (X, M, m) *un espace mesurable tel que* $m(X) < \infty$. *Soit* $f\colon X \to R$ *une fonction telle que, quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$, *la classe d'ensembles*

$$D_\varepsilon = \left\{ D \in M;\ \underset{D}{\operatorname{osc}} f \leqslant \varepsilon \right\}$$

satisfait á la condition

(a) *il existe pour tout ensemble* $A \in M$ *de mesure* m *positive un ensemble* $D \in D_\varepsilon$ *tel que* $D \subset A$ *et* $m(D) > 0$.

Alors la fonction f *est* $\overline{m}$*-mesurable, où* $\overline{m}$ *désigne le complété de la mesure* m.

LEMME 2. *Soit* $A \subset I^2$ *un ensemble mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive. Soit* $y_0 \in I$ *un point tel que la coupe* $A^{y_0} = \{x \in I;\ (x, y_0) \in A\}$ *est mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive et telle que, quel que soit le point* $x \in A^{y_0}$, y_0 *est un point d'épaisseur de la coupe* $A_x = \{y \in I;\ (x, y) \in A\}$. *Alors il existe pour tout nombre* $\delta > 0$ *un ensemble* $B \subset I$ *mesurable au sens de Lebesgue, de mesure positive et tel que la coupe* A^y *est mesurable au sens de Lebesgue et* $\mu_1(A^y) > \mu_1(A^{y_0}) - \delta$ (μ_1 *désigne la mesure de Lebesgue dans* R) *pour tout* $y \in B$.

DÉMONSTRATION. Fixons le nombre $\delta > 0$. A chaque point $x \in A^{y_0}$ correspond un intervalle ouvert $L(x) \subset I$ au centre y_0 ayant la longueur rationnelle et tel que

$$\mu_1(L \cap A_x) \geqslant (1 - \delta/2)\, \mu_1(L)$$

pour tout intervalle ouvert $L \subset L(x)$ contenant y_0. La famille d'intervalles $\{L(x)\}_{x \in A^{y_0}}$ étant dénombrable, on peut donc écrire

$$\{L(x)\}_{x \in A^{y_0}} = \{L_1, L_2, \ldots\}.$$

Désignons par A_i ($i = 1, 2, \ldots$) l'ensemble

$$\{x \in A^{y_0};\ \text{au point } x \text{ correspond l'intervalle } L_i\}.$$

Comme $A^{y_0} = \bigcup_i A_i$, il existe donc un entier naturel N pour lequel

$$\mu_1^*\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \right) > (1 - \delta/2)\, \mu_1(A^{y_0}),$$

où μ_1^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue dans R. Soit $L = \bigcap_{i=1}^{N} L_i$. L est l'intervalle ouvert au centre y_0 contenant à tout intervalle L_i pour $i = 1, 2, \ldots, N$. D'autre part, il existe un ensemble $C \subset I$ du type G_δ et tel que $C \supset \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ et $\mu_1(C) = \mu_1^*(\bigcup_{i=1}^{N} A_i)$. Désignons par D l'ensemble $(I \times L) \cap A$. L'ensemble D est mesurable au sens de Lebesgue et on a

$$(1) \qquad \mu(D) > (1 - \delta/2)\, \mu_1(L)\, \mu_1^*\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \right) > (1 - \delta/2)^2\, \mu_1(L)\, \mu_1(A^{y_0}),$$

comme $\mu_1(D_x) > (1 - \delta/2)\mu_1(L)$ pour tout $x \in \bigcup_{i=1}^N A_i$ et $\mu_1^*(\bigcup_{i=1}^N A_i) > (1 - \delta/2)\mu_1(A^{y_0})$ (μ désigne la mesure de Lebesgue dans R^2).

Comme $(1 - \delta/2)^2 > 1 - \delta$, on a donc par conséquent

$$\mu(D) > (1 - \delta)\mu_1(L)\mu_1(A^{y_0}).$$

Supposons par impossible que

$$\mu_1(A^y) \leqslant \mu_1(A^{y_0}) - \delta \leqslant (1 - \delta)\mu_1(A^{y_0})$$

pour presque tous les points $y \in L$.

On ait alors l'inégalité:

$$\mu(D) = \int_L \mu_1(D^y)dy \leqslant \int_L \mu_1(A^y)dy \leqslant (1 - \delta)\mu_1(A^{y_0})\mu_1(L),$$

ce qui entraine d'après (1) la contradiction et la démonstration du Lemme 2 est finie.

LEMME 3 (VOIR [1, LE LEMME 3]). *Si la fonction g: $I \to R$ a la propriété* (K), *alors quel que soit l'ensemble $A \subset I$ mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive, il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un intervalle ouvert $L \subset I$ pour lequel $\mu_1(L \cap A) > 0$ et $\operatorname{osc} g \leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble de tous les points d'épaisseur de l'ensemble $L \cap A$.*

LEMME 4 (VOIR [4, PROPOSITION]). *Soit $A \subset I^2$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive. Il existe alors un ensemble $B \subset A$ du type F_σ tel que $\mu(B) = \mu(A)$ et $B \Subset B$; c'est-à-dire, quel que soit le point $(x, y) \in B$, x est un point d'épaisseur de la coupe B^y et y est un point d'épaisseur de la coupe B_x et (x, y) est un point d'épaisseur de l'ensemble B.*

THÉORÈME 1. *Soit f: $I^2 \to R$ une fonction bornée. Si toutes les coupes f^y sont mesurables au sens de Lebesgue et si toutes les coupes f_x ont la propriété* (K), *alors la fonction f a la propriété* (J).

DÉMONSTRATION. Fixons $t \in I$. Afin d'établir que la fonction

$$g_t(y) = \int_0^t f(x, y)dx$$

est mesurable au sens de Lebesgue, nous démontrons qu'elle satisfait à la condition (a) du Lemme 1.

Fixons le nombre $\varepsilon > 0$. Soit $A \subset I$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive.

Nous allons définir, par l'induction transfinie, une suite transfinie d'ensembles $\{E_\alpha\}_\alpha$ et une suite transfinie d'intervalles ouverts $\{L_\alpha\}_\alpha$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites:

(b) tout ensemble $E_\alpha \subset \langle 0, t\rangle \times A$;

(c) tout ensemble E_α est borélien et sa mesure lebesguienne est positive;

(d) $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ pour $\alpha \neq \beta$;

(e) y est un point d'épaisseur de la coupe $(E_\alpha)_x$ pour tout $(x, y) \in E_\alpha$;

(f) Quel que soit l'ensemble E_α, la projection parallèle à l'axe d'ordonnées $P(E_\alpha)$ de l'ensemble E_α contient un sous-ensemble C_α tel que $\mu_1^*(C_\alpha) = \mu_1(P(E_\alpha))$ et tel que $\operatorname{osc}_{L_\alpha \cap (E_\alpha)_x} f_x \leqslant \varepsilon/2$ pour tout $x \in C$;

(g) $\mu(\bigcup_\alpha E_\alpha) = \mu(\langle 0, t\rangle \times A)$.

Soit $A_1 \subset A$ un ensemble du type F_σ pour lequel $\mu_1(A_1) = \mu_1(A)$ et tout point $y \in A_1$ est un point d'épaisseur de l'ensemble A_1. Posons $B = \langle 0, t\rangle \times A_1$.

Toutes les coupes f_x ayant la propriété (K), il existe donc d'après ce Lemme 3, pour tout $x \in \langle 0, t\rangle$, un intervalle ouvert L_x^1 aux extrémités rationnelles tel que $\mu_1(L_x^1 \cap A_1) > 0$ et osc $f_x \leqslant \varepsilon/2$ sur l'ensemble $L_x^1 \cap A_1$.

La famille $\{L_x^1\}_{x\in\langle 0, t\rangle}$ étant dénombrable, on peut la ranger dans la suite $L_1^1, L_2^1, \ldots$. Posons

$$C_i^1 = \{x \in \langle 0, t\rangle; \text{ au point } x \text{ correspond } L_i^1\}.$$

L'égalité $\langle 0, t\rangle = \bigcup_i C_i$ implique qu'il existe un entier naturel i (1) tel que $\mu_1^*(C_{i(1)}^1) > 0$.

Soit D_1 un ensemble du type G_δ tel que $\langle 0, t\rangle \supset D_1 \supset C_{i(1)}^1$ et $\mu_1(D_1) = \mu_1^*(C_{i(1)}^1)$. Posons $L_1 = L_{i(1)}^1$ et $E_1 = D_1 \times (L_1 \cap A_1)$. L'ensemble E_1 et l'intervalle L_1 satisfont aux conditions (b)–(f) (en admettant que $C_1 = C_{i(1)}^1$).

Soit α un nombre ordinal. Supposons que tous les ensembles E_β et tous les intervalles ouverts L_β soient définis pour $\beta < \alpha$ et qu'ils satisfassent aux conditions (b)–(f). Supposons, en outre, que $\mu(B - \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta) > 0$. Désignons par F_1 l'ensemble $B - \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta$. Il existe, d'après le Lemme 4, un ensemble $F \subset F_1$ du type F_σ tel que $\mu(F_1) = \mu(F)$ et $F \Subset F$. Soit $G = P(F)$. D'après le Lemme 3 on peut faire correspondre à chaque point $x \in G$ un ensemble ouvert aux extrémités rationnelles L_x^α de façon que $\mu_1(L_x^\alpha \cap F_x) > 0$ et osc $f_x \leqslant \varepsilon/2$ sur l'ensemble $L_x^\alpha \cap F_x$.

Rangeons la famille d'intervalles $\{L_x^\alpha\}_{x\in G}$ dans la suite $L_1^\alpha, L_2^\alpha, \ldots$. Posons

$$C_i^\alpha = \{x \in G; \text{ au point } x \text{ correspond l'intervalle } L_i^\alpha\}.$$

L'égalité $G = \bigcup_i C_1^\alpha$ implique l'existence d'un entier naturel $i(\alpha)$ tel que $\mu_1^*(C_{i(\alpha)}^\alpha) > 0$.

Soit D un ensemble borélien tel que $G \supset D \supset C_{i(\alpha)}^\alpha$ et $\mu_1(D_\alpha) = \mu_1^*(C_{i(\alpha)}^\alpha)$. Posons $L_\alpha = L_{i(\alpha)}^\alpha$ et $E_\alpha = (D_\alpha \times L_\alpha) \cap F$. L'ensemble E_α et l'intervalle L_α satisfont aux conditions (b)–(f) (en admettant que $C_\alpha = C_{i(\alpha)}^\alpha$) .

La mesure de Lebesgue étant σ-finie, les conditions (c) et (d) impliquent donc la dénombrabilité de la famille $\{E_\alpha\}_\alpha$. Par conséquent l'ensemble $\bigcup_\alpha E_\alpha$ est borélien. La condition (g) implique l'égalité $\mu((\langle 0, t\rangle \times A) - \bigcup_\alpha E_\alpha) = 0$. Posons

$$H_1 = \left\{y \in A; \mu_1\left(\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^y\right) = t\right\}.$$

On vérifie facilement que l'ensemble H_1 est mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive. Fixons $y_0 \in H_1$. Soit $E^1, E^2, \ldots,$ une suite de tous les ensembles de la famille $\{E_\alpha\}_\alpha$ qui ont les coupes relativement à y_0 de mesure lebesguienne positive. A tout ensemble E^i correspond un intervalle de la famille $\{L_\alpha\}$ que nous désignons par L^i.

Soit M un nombre tel que $|f(x, y)| \leqslant M$ pour tout $(x, y) \in I^2$. L'égalité

$$\sum_i \mu_1\left((E^i)^{y_0}\right) = t$$

implique l'existence d'un entier naturel k tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_1\big((E^i)^{y_0}\big) > t - \varepsilon/8M.$$

Posons $L = \bigcap_{i=1}^{k} L^i$. L est l'intervalle ouvert contenant y_0 et contenant à tout intervalle L^i pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Soit

$$H = \bigcup_{i=1}^{k} \left\{ \left[\big((E^i)^{y_0} \times L\big) \cap E^i \right] - \bigcup_{j \neq i} E^j \right\}.$$

Comme l'ensemble H et sa coupe H^{y_0} satisfont aux suppositions du Lemme 2, il existe donc un ensemble $H_2 \subset A \cap L$ mesurable au sens de Lebesgue de mesure positive tel que

$$\mu_1(H^y) > t - \varepsilon/8M \quad \text{pour tout } y \in H_2.$$

Désignons par C^i l'ensemble correspondant à l'ensemble E^i d'après la condition (e) et désignons par H_3 la somme $\bigcup_{i=1}^{k} C^i$. Soit $y_1, y_2 \in H_2$.

Remarquons que $\mu_1^*(H^{y_1} \cap H_3) = \mu_1(H^{y_1}) > t - \varepsilon/8M$ et que

$$\mu_1^*(H^{y_2} \cap H_3) = \mu_1(H^{y_2}) > t - \varepsilon/8M.$$

Il en résulte que $\mu_1^*(H^{y_1} \cap H^{y_2} \cap H_3) \geqslant t - \varepsilon/4M$. De plus, l'ensemble

$$H_4 = \{x \in \langle 0, t \rangle;\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \varepsilon/2\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue et il contient l'ensemble $H^{y_1} \cap H^{y_2} \cap H_3$. Donc $\mu_1(H_4) \geqslant t - \varepsilon/4M$. On a par conséquence

$$\begin{aligned}
|g_t(y_1) - g_t(y_2)| &= \left| \int_0^t f(x, y_1)\,dx - \int_0^t f(x, y_2)\,dx \right| \\
&= \left| \int_0^t (f(x, y_1) - f(x, y_2))\,dx \right| \\
&\leqslant \int_0^t |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,dx \\
&= \int_{H_4} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,dx \\
&\quad + \int_{\langle 0, t \rangle - H_4} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,dx \\
&\leqslant (\varepsilon/2)\,\mu_1(H_4) + 2M\mu_1(\langle 0, t \rangle - H_4) \\
&\leqslant \varepsilon/2 + 2M \cdot (\varepsilon/4M) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{osc}_{H_2} g_t \leqslant \varepsilon$, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.

REMARQUE. Il existe une fonction $f\colon I^2 \to R$ bornée et non-mesurable au sens de Lebesgue dont les coupes f^y sont approximativement continues et dont les coupes f_x sont mesurables au sens de Lebesgue (voir [3, Théorème 3]).

Il en résulte, d'après le Théorème 0, qu'on ne peut pas remplacer dans le Théorème 1 la propriété (K) de toutes les coupes f_x par leur mesurabilité au sens de Lebesgue.

Il résulte des Théorèmes 0 et 1 le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* $f: I^2 \to R$ *une fonction bornée. Si toutes ses coupes* f^y *sont des dérivées et si toutes ses coupes* f_x *ont la propriété* (K), *alors la fonction* f *est mesurable au sens de Lebesgue.*

D'une façon analogue comme dans le travail [1] (voir la démonstration du Théorème 2) il résulte du Théorème 2 le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit* $f: I^2 \to R$ *une fonction bornée. Si toutes ses coupes* f_x *et* f^y *sont des dérivées, alors la fonction* f *est de deuxième classe de Baire.*

LES TRAVAUX CITÉS

1. R. O. Davies, *Separate approximate continuity implies measurability*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **73** (1973), 461–465. MR **48** #4216.

2. Z. Grande, *Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **21** (1973), 813–816. MR **48** #8736.

3. ———, *La mesurabilité des fonctions de deux variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **22** (1974), 657–661.

4. ———, *Les fonctions qui ont la propriété* (K) *et la mesurabilité des fonctions de deux variables*, Fund. Math. **93** (1976).

5. ———, *On measurability of functions of two variables*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 335–336.

6. J. S. Lipiński, *On measurability of functions of two variables*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **20** (1972), 131–135. MR **46** #9274.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ, 80–216 GDAŃSK, POLOGNE

Current address: 82-Elbląg, ul. Płk. Dąbka 88/II/10, Pologne