PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 71, Number 2, September 1978

# SUR LE 17ÈME PROBLÈME DE HILBERT POUR LES FONCTIONS DE NASH

JACEK BOCHNAK

ABSTRACT. The purpose of this note is to give a more refined version of a theorem of Efroymson: If $U \subset \mathbf{R}^n$ is defined by polynomial inequalities of the form $f_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, and if $g$ is a positive definite Nash function on $U$, then $g$ is a finite sum of squares of Nash meromorphe functions on $U$.

**1. Résultats.** Soit $A$ un anneau de fonctions réelles sur un ensemble $U$. On peut formuler pour l'anneau $A$, une généralisation suivante du 17ème problème de Hilbert:

PROBLÈME $17_A$. Soit $f \in A, f(x) \geqslant 0, \forall x \in U$. Existe-t-il $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in A$, $\varphi \not\equiv 0$, tels que $\varphi^2 f = \varphi_1^2 + \cdots + \varphi_k^2$?

Le problème original de Hilbert a été posé pour $A = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et résolu par E. Artin **[1]**, **[7]**, **[8]**, **[10]**. De nouveaux résultats ont été obtenus récemment. On a pu démontrer que la réponse au problème est positive dans les cas des anneaux suivants: l'anneau des germes des fonctions analytiques de $n$ variables réelles **[11]**, l'anneau des fonctions analytiques réelles (globales) sur une variété analytique réelle de dimension 2 **[3]**, et certains anneaux de fonctions de Nash (globales) **[6]**. Rappelons que les fonctions de Nash sont des solutions analytiques d'équations polynômiales; plus précisément, une fonction analytique $f$: $U \to \mathbf{R}$ d'un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ est dite *de Nash*, s'il existe un polynôme $P(x, y)$ de $n + 1$ variables réelles, $P \not\equiv 0$, tel que $P(x, f(x)) = 0$ dans $U$.

G. Efroymson **[6]** a montré que, pour l'anneau $N(U)$ des fonctions de Nash sur un ouvert semi-algébrique $U \subset \mathbf{R}^n$ de la forme

$$U = \{x \in \mathbf{R}^n : p_i(x) > 0, p_i \in \mathbf{R}[X], i = 1, \ldots, s\} \qquad (*)$$

le problème $17_{N(U)}$ a une solution positive. (En particulier on peut prendre $U = \mathbf{R}^n$.) Signalons ici que la solution de ce problème publiée par Mostowski **[9]** n'est pas correcte (voir la remarque 3 ci-dessous). Posons le problème plus précis.

QUESTION. Soit $f \in N(U), f(x) \geqslant 0, \forall x \in U$, $U$ un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$. Quels sont les sous-anneaux $A$ de $N(U)$, tels que $f$ soit une somme de carrés dans le corps de fractions $A_{(0)}$ de $A$?

Received by the editors April 12, 1977.

*AMS (MOS) subject classifications* (1970). Primary 12D15, 14E99, 32C05.

*Key words and phrases*. 17th Hilbert problem, Nash functions, Tarski principle, semi-algebraic sets, real closed field.

Dans cette note nous allons considérer cette question et nous allons donner quelques précisions concernant une répose "économique" au problème $17_{N(U)}$.

UN CONTRE-EXEMPLE. Soit $A = \mathbf{R}[X][\sqrt{1+X^2}\,] \subset N(\mathbf{R})$. L'élément $f = \sqrt{1+X^2} \in A$ est une fonction positive sur $\mathbf{R}$, mais il n'est pas une somme de carrés dans $A_{(0)}$. En effet, $A_{(0)}$ est obtenu par adjonction à $\mathbf{R}[X]_{(0)}$ d'une racine quadratique $f$ d'un élément de $\mathbf{R}[X]$. On sait alors **[12]** que l'on peut ordonner le corps $A_{(0)}$ de sorte que $(-f)$ soit un élément positif suivant cet ordre; par conséquent $f$ ne peut pas être une somme de carrés dans $A_{(0)}$.

DÉFINITION **[2]**. On appelle un *anneau semi-algébrique* tout sous-anneau $A = A(U)$ de l'anneau des fonctions de Nash $N(U)$, contenant $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Pour un anneau semi-algébrique $A = A(U)$ notons par $A^{(1)}$ le sous-anneau de $N(U)$ engendré par $A$ et les éléments de la forme $\sqrt{f}$, où $f \in A$ et $f(x) > 0$, $\forall x \in U$. Posons, par récurrence, $A^{(k)} = (A^{(k-1)})^{(1)}$ et $A^{(\infty)} = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^{(k)}$, $A^{(0)} = A$.

REMARQUE 1. $A = A^{(\infty)}$ si et seulement si $f \in A$, $f^{-1}(0) = \varnothing$ implique $\sqrt{|f|} \in A$.

THÉORÈME 1. *Soient $U$ un ouvert semi-algébrique connexe de $\mathbf{R}^n$ de la forme* $(*)$ *et $f$ une fonction de Nash sur $U$, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in U$. Alors $f$ est une somme de carrés dans le corps de fractions de l'anneau semi-algébrique $A^{(3)}$, où $A = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n][f] \subset N(U)$.*

COROLLAIRE. *Soit $A = A(U)$ un anneau semi-algébrique ($U$ étant de la forme $(*)$), ayant la propriété*

$$g \in A, \quad g(x) > 0, \quad \forall x \in U \Rightarrow \sqrt{g} \in A. \qquad (**)$$

*Alors toute fonction $f \in A$, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in U$, est une somme de carrés dans le corps de fractions $A_{(0)}$ de $A$.*

On retrouve en particulier la solution de Efroymson du problème $17_{N(U)}$, la condition $(**)$ étant trivialement vérifiée pour l'anneau $N(U)$ des fonctions de Nash.

QUESTIONS OUVERTS. (1) Considérer le problème $17_{N(U)}$ pour un ouvert semi-algébrique $U$ quelconque (ou même pour un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$).

(2) Existe-t-il une fonction de Nash positive qui n'est pas une somme de carrés dans $N(U)$?

**2. Démonstrations.** Supposons désormais que $U$ est un ouvert semi-algébrique connexe de $\mathbf{R}^n$ de la forme $(*)$.

On sait, depuis les travaux de E. Artin **[1]**, **[8]**, que le 17ème problème de Hilbert est étroitement lié à la théorie des anneaux ordonnés.

Nous aurons besoin du

LEMME 1. *Soit $A(U)$ un anneau semi-algébrique, $\delta \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{R}[X]$, $\delta \not\equiv 0$. Supposons que $f \in A$, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in U$, $f$ n'étant pas une* *somme de carrés dans le corps de fractions de l'anneau* $A^{(3)}$. *Alors il existe un ordre sur l'anneau* $A^* = (A[Y, Z])^{(3)}$, *compatible avec la structure d'anneau et tel que les éléments* $(-f)$ *et* $\delta^2 Y - 1$ *soient positifs dans* $A^*$.

REMARQUE 2. Toute fonction $\varphi$ de $(A[Y, Z])^{(2)} \subset A^*$ telle que $\varphi(x, y, z) > 0$, $\forall(x, y, z) \in U \times \mathbf{R}^2$, étant un carré dans $A^*$, est positive en tant qu'élément de $A^*$.

Dans ce qui suit, nous entendons par *un ordre sur un anneau*, un ordre compatible avec la structure d'anneau.

PREUVE DU LEMME 1. Supposons que $D$ soit un sous-ensemble d'un anneau intègre $B$ et $1 \in D$. Notons par $\tilde{D}$ l'ensemble des produits d'éléments de $D$. Il résulte facilement de la théorie de corps ordonnés **[8]**, **[12]**, que la condition

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \alpha_i^2 = 0, \quad \alpha_i \in B, \gamma_i \in \tilde{D} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots \alpha_k = 0, \tag{1}$$

implique l'existence d'une structure d'ordre sur $B$, pour laquelle tous les éléments de $D$ sont positifs.

Nous allons appliquer ce critère pour $B = A^*$ et $D = \{1, -f, \delta^2 Y - 1\}$. Considérons la relation $\sum \gamma_i \alpha_i^2 = 0$, où les $\gamma_i$ sont de la forme $\gamma_i = \beta_1^{q_1} \beta_2^{q_2}$, $\beta_i \in D$, $\alpha_i \in A^*$, $q_i \in \mathbf{N}$, et montrons que tous les $\alpha_i$ sont nuls.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $q_i = 0$ ou $q_i = 1$. On a donc une relation du type

$$(\delta^2 Y - 1)(-f)\left(\sum \hat{a}_i^2\right) + (\delta^2 Y - 1)\left(\sum \hat{b}_i^2\right) + (-f)\sum \hat{c}_i^2 + \sum \hat{d}_i^2 = 0, \tag{2}$$

où $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$, $\hat{c}_i$, $\hat{d}_i$ sont dans $A^*$.

Posons $y = \delta^2 Y - 1$ et

$$a_i(x, y, z) = \hat{a}_i\left(x, (y + 1)/\delta^2, z\right), \quad b_i = \hat{b}_i\left(x, (y + 1)/\delta^2, z\right),$$

etc. La relation (2) devient

$$y \sum b_i^2 + \sum d_i^2 = f\left(\sum c_i^2 + y \sum a_i^2\right). \tag{3}$$

Observons que pour $N$ suffisamment grand $a_i \delta^{2N}$, $b_i \delta^{2N}$, appartiennent à $A^*$; on peut donc, sans perte de généralité, supposer que dans (3) $a_i$, $b_i$, $c_i$ et $d_i$ sont dans $A^*$ (quitte éventuellement à multiplier (3) par $\delta^{2N}$). Si $\Sigma c_i^2 + y \Sigma a_i^2 \not\equiv 0$, on aurait pour un choix convenable de $(\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbf{R}^2$, $\bar{y} > 0$, une expression de $f$ comme somme de carrés dans $A^{(3)}$:

$$f(x) = \left(\bar{y} \sum b_i^2(x, \bar{y}, \bar{z}) + \sum d_i^2(x, \bar{y}, \bar{z})\right)$$
$$\cdot \left(\sum c_i^2(x, \bar{y}, \bar{z}) + \bar{y} \sum a_i^2(x, \bar{y}, \bar{z})\right)^{-1}.$$

Nécessairement donc $\Sigma a_i^2 = 0$ et $\Sigma c_i^2 = 0$, ce qui implique $y \Sigma b_i^2 + \Sigma d_i^2 = 0$, d'où $\Sigma b_i^2 = 0$ et $\Sigma d_i^2 = 0$. Etant donné la construction de $a_i$, $b_i$, etc., ..., on constate que tous les $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$, $\hat{c}_i$ et $\hat{d}_i$ sont nuls. □

La démonstration du Théorème 1 est basée sur le principe de Tarski.

PRINCIPE DE TARSKI **[4]**, **[5]**. *Soit* $K$ *un corps ordonné et* $H(X_1, \ldots, X_n)$ *une* *relation polynômiale dans* $K[X_1, \ldots, X_n]$. *Si* $Q_i$ *désigne soit* $\forall$ *soit* $\exists$, *alors une formule du type*

$$\{Q_1 x_1 \in L, Q_2 x_2 \in L, \ldots, Q_n x_n \in L, H(x_1, \ldots, x_n)\}$$

*est vraie pour un corps ordonné maximal* $L \supset K$ *si et seulement si elle est vraie pour tout corps ordonné maximal* $L \supset K$.

Par *relation polynômiale dans* $K[X_1, \ldots, X_n]$, on entend une fonction booléenne des relations de la forme $p(X_1, \ldots, X_n) > 0$, où $p \in K[X_1, \ldots, X_n]$; **[4]**, **[5]**. Considérons maintenant un ensemble semi-algébrique $M$ de $\mathbf{R}^n$, i.e. un ensemble de la forme

$$M = \bigcup_{i=1}^{s} \{x \in \mathbf{R}^n; p_{ij}(x) > 0, q_i(x) = 0, j = 1, \ldots, k_i\},$$

où $p_{ij} \in \mathbf{R}[X]$, $q_i \in \mathbf{R}[X]$.

Pour un corps $L \supset \mathbf{R}$, notons par $M_L$ l'ensemble

$$M_L = \bigcup_{i=1}^{s} \{x \in L^n: p_{ij}(x) > 0, q_i(x) = 0, j = 1, \ldots, k_i\}.$$

Supposons que le graphe d'une fonction $f$: $U \to \mathbf{R}$, $U \subset \mathbf{R}^n$, soit semi-algébrique dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Le principe de Tarski montre que pour un corps ordonné maximal $L \supset \mathbf{R}$, l'ensemble (graphe $f$) est un graphe d'une fonction $f_L$: $U_L \to L$ (voir **[5]**). Cette notion d'extension $f_L$ d'une fonction $f$, dont le graphe est semi-algébrique, est particulièrement utile pour les fonctions de Nash puisqu'une fonction analytique $f$ d'un ouvert semi-algébrique $U$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ est de Nash si et seulement si son graphe est semi-algébrique **[5]**. Pour un $f \in N(U)$, le symbole $f_L$ est donc bien défini.

Notation. $\mathbf{R}[X, Y, Z] | U \times \mathbf{R}^2 = \{\varphi | U \times \mathbf{R}^2: \varphi \in \mathbf{R}[X, Y, Z]\}$, $U \subset \mathbf{R}^n$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Lemme 2 **[6]**. *Soient* $A = A(U)$ *un anneau semi-algébrique*,

$$g \in (\mathbf{R}[X, Y, Z] | U \times \mathbf{R}^2)^{(k)} \subset N(U \times \mathbf{R}^2), \qquad k \in \mathbf{N}, h \in A(U),$$

$L$ *un corps ordonné maximal*, $\mathbf{R} \subset L$ *et* $\varphi$: $(A[Y, Z])^{(k+1)} \to L$ *un homomorphisme d'anneaux. Alors la fonction*

$$\bar{g}: U \times \mathbf{R}^2 \ni (x, y, z) \to g(x, y, h(x)) \in \mathbf{R}$$

*est dans* $(A[Y, Z])^{(k)}$ *et* $g_L(\varphi(X), \varphi(Y), \varphi(h)) = \varphi(\bar{g})$, *où* $\varphi(X) = (\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n))$.

Prueve. Pour $k = 0$ le lemme est évident, $g$ étant un polynôme. Il suffit de montrer le lemme pour $k = 1$; le passage pour $k > 1$ se fait par récurrence, suivant un raisonnement analogue. Supposons donc $g$ de la forme $g = a + b\sqrt{c}$, où $a, b, c \in \mathbf{R}[X, Y, Z]$, $c(x, y, z) > 0$, $\forall (x, y, z) \in U \times \mathbf{R}^2$. Evidemment,

$$c_L(\varphi(X), \varphi(Y), \varphi(h)) = \varphi(c(X, Y, h)) = \varphi\left(\left(\sqrt{c(X, Y, h)}^{\,2}\right)\right)$$

d'où $\varphi(\sqrt{c(X,Y,h)}\,) = \pm\sqrt{c_L(\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(h))}$ . En fait, $\varphi(\sqrt{c(X,Y,h)}\,)$ est positive dans $L$ pusique la fonction $\xi = \sqrt{c(X,Y,h)} \in (A[Y,Z])^{(1)}$ et $\xi(x,y,z) > 0$, $\forall(x,y,z) \in U \times \mathbf{R}^2$; $\xi$ est donc un carré dans $(A[Y,Z])^{(2)}$ et $\varphi(\sqrt{c(X,Y,h)}\,) = \varphi(\sqrt{\xi^2}\,) = (\varphi(\sqrt{\xi}\,))^2 > 0$.

Cela termine la démonstration car on a

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{g}) &= \varphi(a(X,Y,h)) + \varphi(b(X,Y,h))\varphi\left(\sqrt{c(X,Y,h)}\,\right)\\ &= a_L(\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(h))\\ &\quad + b_L(\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(h))\sqrt{c_L(\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(h))}\\ &= g_L(\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(h)).\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Suivons l'idée de Mostowski **[9]**. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f \in A(U)$, $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in U$, et $f$ ne soit pas une somme de carrés dans $(A^{(3)})_{(0)}$. Soit $P \in \mathbf{R}[X,Z]$ un polynôme irréductible, tel que $P(x,f(x)) = 0$ dans $U$. Le discriminant $\delta \in \mathbf{R}[X]$ de $P$ n'est pas identiquement nul. Choisissons un ordre sur $A^* = A[Y,Z]^{(3)}$ pour lequel les éléments $(-f)$ et $\delta^2 Y - 1$ soient positifs (Lemme 1).

Définissons deux sous-ensembles semi-algébriques

$$C_1 = \{(x,y,z) \in U \times \mathbf{R}^2 : f(x) = z\},$$

$$C_2 = \{(x,y,z) \in U \times \mathbf{R}^2 : P(x,z) = 0, \delta^2(x)y - 1 \geqslant 0, f(x) \neq z\}.$$

(Cette opération a pour but de séparer les branches d'ensemble $P^{-1}(0)$, en particulier de séparer le graphe de $f \subset P^{-1}(0)$). Les ensembles $C_1$ et $C_2$ sont disjoints et fermés dans $U \times \mathbf{R}^2$. D'après le Lemme de Séparation **[6]**, **[9]** il existe une fonction $g \in (\mathbf{R}[X,Y,Z] | U \times \mathbf{R}^2)^{(2)}$, telle que $g(C_1) > 0$ et $g(C_2) < 0$.

Considérons la formule polynômiale $F_L$ suivante:

$$\forall(x,y,z) \in L^{n+2}\{x \in U_L, P_L(x,z) = 0, \delta_L^2(x)y - 1 \geqslant 0,$$
$$g_L(x,y,z) > 0 \Rightarrow f_L(x) = z\},$$

$L$ étant un corps ordonné maximal contenant $\mathbf{R}$.

Par construction, cette formule est valable pour $L = R$. D'après le principe de Tarski elle restera valable dans la clôture ordonnée maximale $L$ du corps de fractions de $A^*$. Notons par $\varphi$: $A^* \to L$ le plongement de $A^*$ dans $L$ et appliquons le Lemme 2 avec $k = 2$ et $h = f$. On aura donc

$$g_L(\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(f)) = \varphi(\bar{g}) > 0,$$

puisque $\bar{g} \in (A[Y,Z])^2$ est strictement positive sur $U \times \mathbf{R}^2$ et donc un carré dans $A^* = A[Y,Z]^{(3)}$; rappelons que $\bar{g}(x,y,z) = g(x,y,f(x))$ est positive sur $U \times \mathbf{R}^2$ car $(x,y,f(x)) \in C_1$.

Remarquons alors que l'hypothèse de la formule $F_L$ est valable pour $(x,y,z) = (\varphi(X),\varphi(Y),\varphi(f)) \in L^{n+2}$. En effet, on a déjà vérifié que

$g_L(\varphi(X), \varphi(Y), \varphi(f)) > 0$. Par construction on a $\delta^2(\varphi(X))\varphi(Y) - 1 = \varphi(\delta^2 Y - 1) \geqslant 0$ et bien sûr $P_L(\varphi(X), \varphi(f)) = \varphi(P(X, f)) = 0$.

Enfin $\varphi(X) = (\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n)) \in U_L$. En effet, si $U = \{x \in \mathbf{R}^n\colon p_i(x) > 0,\ i = 1, \ldots, s\}$, $p_i \in \mathbf{R}[X]$, alors $\sqrt{p_i | U} \in A^*$. Les fonctions $p_i | U$ sont donc des carrés dans $A^*$ et par conséquent $\varphi(p_i | U) = p_{i_L}(\varphi(X)) > 0$, d'où $\varphi(X) \in U_L$ (on utilise ici le fait que $U$ est de la forme $(*)$).

Il en résulte, par le principe de Tarski, que $f_L(\varphi(X)) = \varphi(f)$. L'hypothèse que $f$ n'est pas une somme de carrés dans $(A^{(3)})_{(0)}$ donne une contradiction: d'une part l'élément $\varphi(f)$ comme l'image par plongement de $f$ dans $L$ est négatif dans $L$, d'autre part cet élément (comme égal à $f_L(\varphi(X))$) est positif dans $L$, puisque d'après l'hypothèse faite sur $f$ et d'après le principe de Tarski $f_L(\varphi(X)) \geqslant 0$. Donc $f$ est nécessairement une somme de carrés dans $(A^{(3)})_{(0)}$.

REMARQUE 3. La solution de $17_{N(U)}$ publiée par Mostowski est incorrecte, puisque l'anneau auxiliaire $\mathcal{P}$ [**9**. p. 261], ne possède pas (contrairement à ce qui est utilisé dans [**9**]) la propriété essentielle pour la démonstration, à savoir que toute fonction de $\mathcal{P}$ qui prend des valeurs strictement positives, est un carré dans $\mathcal{P}$ [**9**, p. 262]. Dans cet article le rôle de $\mathcal{P}$ est joué par l'anneau $A^{(\infty)}$. Remarquons également que la démonstration du Lemme de Séparation donnée dans [**9**] est valable uniquement pour $U$ de la forme $(*)$ (la démonstration du Lemme 6 [**9**] étant erronée).

*Remarque ajoutée lors de la correction des épreuves*. Le lecteur trouvera une réponse aux "questions ouvertes" du §1 dans l'article *Real algebraic geometry and the* 17*th Hilbert problem*, §9, écrit en collaboration avec G. Efroymson.

## BIBLIOGRAPHIE

1. E. Artin, *The collected papers of Emil Artin*, edited by Serge Lang and John Tate, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

2. J. Bochnak, *Sur la factorialité des anneaux de fonctions de Nash*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), 211–218.

3. J. Bochnak et J.-J. Risler, *Sur le théorème de zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension* 2, Ann. Ecole Norm. Sup. (3) **8** 353–364.

4. P. Cohen, *Decision procedure for real and p-adic fields*, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 131–151.

5. G. Efroymson, *A Nullstellensatz for Nash ring*, Pacific J. Math. **54** (1974), 101–112.

6. ______, *Substitution in Nash functions*, Pacific J. Math. **63** (1976), 137–140.

7. D. Gondard, *Le* 17*ème problème de Hilbert*, Thèse du 3ème cycle, Paris Orsay 1974.

8. S. Land, *Algèbre*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

9. T. Mostowski, *Some properties of the ring of Nash functions*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **2** (1976), 245–266.

10. A. Pfister, *Hilbert's seventeenth problem and related problems on definite forms*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976, pp. 483–490.

11. J.-J. Risler, *Les théorèmes des zéros en géométries algébrique et analytique réelles*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 113–127.

12. N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre 6, *Groupes et corps ordonnés*, §2, Hermann, Paris, 1952.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE GENÈVE, 1211 GENÈVE 24, SWITZERLAND