

**DANS UN ESPACE DE BANACH RETICULÉ SOLIDE,  
LA PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODÝM  
ET CELLE DE KREIN-MILMAN SONT ÉQUIVALENTES**

JEAN BOURGAIN ET MICHEL TALAGRAND

**RÉSUMÉ.** Un espace de Banach réticulé solide possède la propriété de Radon-Nikodým si et seulement si tout convexe fermé borné est enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

On appelle espace de Banach réticulé solide (e.B.r.s.) un espace de Banach ordonné  $E$  qui est un treillis pour l'ordre et tel que  $\|x\| < \|y\|$  si  $|x| < |y|$  pour  $x, y \in E$ . Pour les assertions non démontrées concernant les e.B.r.s, on renvoie à [5].

Soit  $E$  un espace de Banach,  $A$  un ensemble borné de  $E$  et  $\alpha > 0$ . Posons, pour  $f \in E'$

$$M(A, f) = \text{Sup}\{f(x) : x \in A\}, \quad T(A, f, \alpha) = \{x \in A : f(x) > M(A, f) - \alpha\}.$$

Un tel ensemble est appelé une tranche de  $A$ . On dit qu'un espace de Banach  $E$  possède la propriété de Radon-Nikodým (RNP) si tout ensemble borné de  $E$  possède une tranche de diamètre  $< \varepsilon$ . On dit qu'un espace de Banach  $E$  possède la propriété de Krein-Milman si tout ensemble convexe fermé borné de  $E$  est enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. C'est un problème ouvert de savoir si ces deux propriétés sont équivalentes pour un espace de Banach général. La réponse est positive si l'espace est un dual [2]. On va montrer ici qu'il en est de même si  $E$  est un e.B.r.s.

Le résultat peut en fait se déduire du corollaire de [1], et du fait qu'un e.B.r.s. qui ne contient pas  $c_0$  est un idéal d'ordre de son bidual, et que s'il ne possède pas RNP, il en est de même de son cône positif.

Toutefois les techniques de [1], qui sont assez délicates se simplifient notablement si on utilise les techniques d'ordre introduites dans [3], quoique le principe de la construction soit inchangé. Il nous a donc semblé que cette approche possède son intérêt propre.

**THÉORÈME.** *Un e.B.r.s.  $E$  possède RNP si et seulement s'il possède la propriété de Krein-Milman.*

Il est connu qu'un espace de Banach possédant RNP possède la propriété de Krein-Milman [2]. D'autre part un espace de Banach possède RNP dès que ses sous-espaces séparables la possèdent; on peut donc se limiter au cas où  $E$  est séparable.

---

Received by the editors June 5, 1979 and, in revised form, November 16, 1979.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 46B22, 46B30; Secondary 46A55.

Key words and phrases. Banach lattice, Radon-Nikodým, extreme points.

© 1981 American Mathematical Society  
0002-9939/81/0000-0020/\$02.00

Prouvons d'abord quelques lemmes, qui ont d'ailleurs un intérêt en soi. Pour  $A \subset E$ , on note  $c(A)$  son enveloppe convexe et  $\bar{c}(A)$  l'adhérence de  $c(A)$ . Pour  $A, B \subset E$ , on note  $A + B = \{a + b: a \in A, b \in B\}$ .

LEMME 1 (N. GHOUSSOUB [3]). *Soit  $u \in E_+$ . Supposons l'intervalle d'ordre  $[0, u]$  faiblement compact. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une tranche de  $[0, u]$  contenant 0 et de diamètre  $< \varepsilon$ ; c'est à dire que 0 est un point dentable de  $[0, u]$ .*

DÉMONSTRATION. On va s'attacher à la donner élémentaire. Montrons d'abord qu'il existe  $v \in [0, u]$  avec  $\|v\| \geq \|u\| - \varepsilon$  et  $0 \notin \bar{c}([0, v] \setminus B(0, \varepsilon))$ .

Sinon on va construire par induction une suite décroissante  $(v_n)$ , avec  $v_n \in [0, u]$ ,  $\|v_n\| \geq \|u\| - \varepsilon(1 - 2^{-n})$  et  $\|v_n - v_{n+1}\| \geq \varepsilon$ . Pour cela, on pose  $v_0 = u$ , puis  $v_n$  étant construit, on voit qu'il existe des  $x_i \in [0, v_n]$ , des  $\alpha_i > 0$  en nombre fini avec  $\sum \alpha_i = 1$ ,  $\|x_i\| \geq \varepsilon$  et  $\|\sum \alpha_i x_i\| < \varepsilon 2^{-n-1}$ . On a donc  $\|v_n - \sum \alpha_i x_i\| \geq \|v_n\| - \varepsilon 2^{-n-1}$ . Il existe donc  $i$  tel que  $\|v_n - x_i\| \geq \|v_n\| - \varepsilon 2^{-n-1}$ . On pose  $v_{n+1} = v_n - x_i$ , ce que termine la construction. Mais alors l'existence de la suite  $v_n$  contredit le théorème de Dini.

L'étape précédente permet de construire par induction une suite décroissante  $v_n$  telle que  $\|v_n\| \geq \|u\| - \frac{1}{2}(1 - 2^{-n})\|u\|$  et  $0 \notin \bar{c}([0, v_n] \setminus B(0, 2^{-n}))$ . Si  $v = \inf v_n$ , qui existe par compacité, on a  $\|v\| \geq \frac{1}{2}\|u\|$  et 0 est dentable dans  $[0, v]$ .

Remarquons que si 0 est dentable dans  $[0, v_1]$  et  $[0, v_2]$ , avec  $v_1, v_2 < u$ , alors il l'est dans  $[0, v_1 + v_2]$ . En effet si  $x \in [0, v_1 + v_2]$ , on a  $x = x_1 + x_2$  où  $x_1 \in [0, v_1]$  et  $x_2 \in [0, v_2]$ ; de plus  $2 \sup(\|x_1\|, \|x_2\|) \geq \|x\|$ . Ainsi

$$[0, v_1 + v_2] \setminus B(0, 2\varepsilon) \subset ([0, v_1] \setminus B(0, \varepsilon) + [0, v_2]) \cup ([0, v_1] + [0, v_2] \setminus B(0, \varepsilon)) \\ \subset \bar{c}([\bar{c}([0, v_1] \setminus B(0, \varepsilon)) + [0, v_2]) \cup ([0, v_1] + \bar{c}([0, v_2] \setminus B(0, \varepsilon)))].$$

Ce dernier ensemble ne contient pas zéro, par hypothèse et car zéro est extrémal dans  $[0, v_1 + v_2]$ ; il est convexe et fermé. Ainsi  $0 \notin \bar{c}([0, v_1 + v_2] \setminus B(0, 2\varepsilon))$ .

L'ensemble  $A$  des  $v \in [0, u]$  tels que 0 soit dentable dans  $[0, v]$  est donc filtrant croissant. Soit  $w$  son sup. Montrons que  $w \in A$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème de Dini il existe  $v \in A$  avec  $\|w - v\| < \varepsilon$ . Soit  $x_i \in [0, w]$  avec  $\|x_i\| \geq 2\varepsilon$ . Alors  $\|x_i \wedge v\| \geq \varepsilon$ . Ainsi si  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ , on a  $\|\sum \alpha_i x_i\| \geq \|\sum \alpha_i x_i \wedge v\| > \delta > 0$  car  $v \in A$ . Ainsi  $w \in A$ . Mais  $w = u$ , car sinon il existe  $t \in [0, u - w]$  tel que  $t \in A$ . Mais alors  $w + t \in A$ , ce qui est absurde.

LEMME 2. *Soit  $u \in E_+$  tel que  $[0, u]$  soit faiblement compact. Soit  $H_n = \{x \in E_+; \|x \wedge u\| \geq n^{-1}\}$ . Alors pour tout  $n$  il existe  $m$  avec  $\bar{c}(H_n) \subset H_m$ .*

DÉMONSTRATION. Pour des  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$ , et des  $x_i \in E_+$  on a:  $(\sum \alpha_i x_i) \wedge u \geq \sum \alpha_i (x_i \wedge u)$ . Si  $x_i \in H_n$ , on a:  $\sum \alpha_i (x_i \wedge u) \in B = \bar{c}\{y \in [0, u], \|y\| \geq n^{-1}\}$ .

Or d'après le Lemme 1, il existe  $m$  avec  $z \in B \Rightarrow \|z\| \geq m^{-1}$ . Ainsi

$$\left\| \left( \sum \alpha_i x_i \right) \wedge u \right\| \geq m^{-1},$$

d'où  $c(H_n) \subset H_m$  et  $\bar{c}(H_n) \subset H_m$ .

LEMME 3. *Soit  $E$  un e.B.r.s. dont les intervalles d'ordre sont faiblement compacts. Alors pour deux convexes fermés bornés de  $E_+$ ,  $c(A \cup B)$  est fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit  $x \in \bar{c}(A \cup B)$ . On a  $x = \lim_n(\lambda_n a_n + (1 - \lambda_n)b_n)$  où  $a_n \in A$ ,  $b_n \in B$ ,  $\lambda_n \in [0, 1]$ . On peut supposer que  $\lambda_n$  converge vers  $\lambda$ . Alors  $x = \lim_n(\lambda a_n + (1 - \lambda)b_n)$ . Soit  $f_n = \lambda a_n$ ,  $g_n = (1 - \lambda)b_n$ . On a  $\|f_n - (f_n \wedge x)\| \leq \|x \vee (f_n + g_n) - x\| \rightarrow 0$ . Puisque  $[0, x]$  est faiblement compact,  $f_n \wedge x$ , donc  $f_n$ , a une valeur d'adhérence faible  $f$ , et  $f \in \lambda A$  car  $\lambda A$  est faiblement fermé. Donc  $g_n$  a une valeur d'adhérence faible  $g \in (1 - \lambda)B$ , et  $c = f + g \in c(A \cup B)$ , ce qui termine la preuve.

Tout e.B.r.s. séparable contient un  $u \in E_+$  quasi-intérieur, c'est à dire tel que  $\forall x \in E_+$ ,  $\|x - x \wedge nu\|$  tends vers zéro. On dit suivant [4] qu'un ensemble  $A \subset E_+$  est dentable pour l'ordre s'il existe une tranche  $T$  de  $A$  et  $n > 0$  tels que  $T \subset H_n = \{x \in E_+; \|x \wedge u\| \geq 1/n\}$ . Cette notion ne dépend pas de  $u$ .

LEMME 4. *Supposons les intervalles d'ordre de  $E$  faiblement compacts. Soit  $A \subset E_+$  un convexe non dentable pour l'ordre. Alors si  $B \subset A$  est convexe fermé et si  $A = \bar{c}((A \cap H_n) \cup B)$ , on a  $B = A$ .*

DÉMONSTRATION. Sinon d'après Hahn-Banach il existe  $f \in E'$  et  $\alpha > 0$  avec  $0 < 4\alpha < M(A, f) - M(B, f)$ . Soit  $m$  tel que  $\bar{c}(H_n) \subset H_m$ . Pour  $x \in T(A, f, \alpha)$  il existe  $y \in c((A \cap H_n) \cup B)$  avec  $\|x - y\| < \text{Inf}(\alpha, (4m)^{-1})$ . On a  $y = \lambda a + (1 - \lambda)b$  où  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $a \in c(A \cap H_n)$ . Ainsi  $M(A, f) - 2\alpha < f(y) < \lambda M(A, f) + (1 - \lambda)M(B, f)$ , ce qui montre que  $\lambda > 1/2$ . Ainsi  $y \geq a/2$ , d'où  $\|y \wedge u\| > \frac{1}{2}\|a \wedge u\| \geq 1/2m$ , d'où  $\|x \wedge u\| > 1/4m$ , ce qui contredit le fait que  $A$  n'est pas dentable pour l'ordre.

LEMME 5. *Soient  $A$  et  $E$  comme dans le Lemme 4. Soient  $x \in A$ ,  $f \in E'$ , avec  $f(x) = M(f, A)$ ,  $\alpha, \epsilon > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $T = T(A, f, \alpha)$ . Il existe alors  $p$  et des  $(y_i)_{i < p}$  de  $A$ , des  $(f_i)_{i < p}$  de  $E'$ , des  $(\alpha_i)_{i < p}$ ,  $(\lambda_i)_{i < p}$  de  $\mathbb{R}$  tels que*

- (a)  $f_i(y_i) = M(A, f_i)$ ,
- (b)  $T(A, f_i, \alpha_i) \subset T$ ,
- (c)  $T(A, f_i, \alpha_i) \cap H_n = \emptyset$ ,
- (d)  $\sum \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i > 0$ , et  $\|x - \sum_{i < p} \lambda_i y_i\| < \epsilon$ .

DÉMONSTRATION. Posons  $L = H_n \cap A$ . Soit

$$S = \{z \in A; \exists g \in E', g(z) = M(A, g) > M((A \setminus T) \cap L, g)\}.$$

Le théorème de Bishop-Phelps montre que

$$A = \bar{c}[(A \setminus T) \cup L \cup S].$$

D'après le Lemme 4, on a  $A = \bar{c}[(A \setminus T) \cup S]$ . Ainsi par un raisonnement déjà fait,  $x$  est adhérent à l'ensemble  $\lambda \bar{c}(A \setminus T) + (1 - \lambda)\bar{c}(S)$  pour un  $\lambda \in [0, 1]$ . Puisque  $f(x) = M(A, f)$  et que  $M(A \setminus T, f) = M(A, f) - a$ , on a  $\lambda = 0$  et ainsi  $x \in \bar{c}(S)$ , ce qui est le résultat annoncé.

PREUVE DU THÉORÈME. Si  $E$  contient  $c_0(\mathbb{N})$ , la boule unité de  $c_0$  n'a pas de points extrémaux. Sinon, si  $E$  ne possède pas RNP, il existe d'après [4] un convexe  $A \subset E_+$  qui n'est pas dentable pour l'ordre, et on sait que les intervalles d'ordres de  $E$  sont faiblement compacts. Le Lemme 5 permet de construire par induction une famille croissante de sous-algèbres finies  $\Sigma_n$  de  $[0, 1]$ , des fonctions  $X_n, f_n, \alpha_n$ ,

$\Sigma_n$ -mesurables, à valeurs dans  $A$ ,  $E'$ ,  $\mathbf{R}_+$  respectivement et telles que pour  $t \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbf{N}$  on ait

- (a)  $X_n(t) \in T(A, f_n(t), \alpha_n(t))$ ,
- (b)  $|X_n(t) - E^{\Sigma_n}(X_{n+1}(t))| \leq 2^{-n}$ ,
- (c)  $H_n \cap T(A, f_n(t), \alpha_n(t)) = \emptyset$ ,
- (d)  $T(A, f_{n+1}(t), \alpha_{n+1}(t)) \subset T(A, f_n(t), \alpha_n(t))$ .

D'après (b) pour  $k \rightarrow \infty$ ,  $E^{\Sigma_n}(X_k)$  converge vers une variable aléatoire  $Y_n$ ,  $\Sigma_n$ -mesurable, et d'après (a) et (d), on a  $Y_n(t) \in T(A, f_n(t), \alpha_n(t))$  pour tout  $n$  et tout  $t \in [0, 1]$ . Il est clair d'autre part que  $Y_n = E^{\Sigma_n}(Y_{n+1})$ .

Posons  $C = \bar{c}(\{Y_n(t), n \in \mathbf{N}, t \in [0, 1]\})$ . On va prouver que seul zéro peut être point extrémal de  $C$ . Soit  $x \in C$ ,  $x \neq 0$ . On a  $x \wedge nu \leq n(x \wedge u)$  donc puisque  $U$  est quasi intérieur, on a  $x \wedge u > 0$ . Soit  $n$  tel que  $x \in H_n$ . Soient  $I_1, \dots, I_p$  les atomes de  $\Sigma_n$ . Pour  $l \leq p$ , soit  $C_l = c(\{Y_m(t), m \in \mathbf{N}, m \geq n, t \in I_l\})$ . D'après (a) et (d) on a  $C_l \subset T(A, f_n(t), \alpha_n(t))$  pour  $t \in I_l$ ; donc  $C_l \cap H_n = \emptyset$ , et  $x \notin C_l$ . Puisque  $Y_n$  est une martingale, on a  $C = \bar{c}(\cup_{l < p} C_l)$  donc  $C = c(\cup_{l < p} C_l)$  ce qui montre que  $x$  n'est pas extrémal.

Ainsi  $C$  n'est pas enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. (Le théorème de Bishop-Phelps donne alors  $f \in E'$  avec  $M(c, f) > 0$  et  $D = \{x \in C, f(x) = M(c, f)\} \neq \emptyset$ . Alors  $D$  ne possède aucun point extrémal.)

#### BIBLIOGRAPHY

1. J. Bourgain, *A geometric characterization of Radon-Nikodym property in Banach spaces*, *Compositio Math.* **36** (1978), 3-6.
2. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces-Selected topics*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 485, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1975.
3. N. Ghoussoub, *Riesz-space valued measures and processes*, *J. Multivariate Analysis* (à paraître).
4. N. Ghoussoub and M. Talagrand, *Order dentability in Banach lattices*, *Math. Ann.* (à paraître).
5. H. H. Shaffer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.

DEPARTMENT WISKUND, VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL, PLEINLAAN 2, F7, 1050 BRUXELLES, BELGIUM

EQUIPE D'ANALYSE, UNIVERSITÉ DE PARIS 6, TOUR 46-COULOIR 46/0, 4 PLACE JUSSIEU, 75005 PARIS, FRANCE