PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 85, Number 1, May 1982

SUR LE VOLUME DES ZÉROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES ET BORNÉES DANS LA BOULE DE $\mathbf{C}^n$

ERIC AMAR

ABSTRACT. We give an example of a zero set of a holomorphic bounded function in the unit ball of $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 2$, with infinite area. This generalizes a previous work of W. Rudin done in the case $n = 2$.

Introduction. B. Berndtsson proves in [2] that a holomorphic variety in the unit ball of $\mathbf{C}^2$ of finite area is the zero set of a bounded holomorphic function in $\mathbf{B}_2$.

W. Rudin [5] gives an example of a zero set of a holomorphic bounded function in $\mathbf{B}_2$ with infinite area. In this work we generalize the previous work of W. Rudin in the unit ball $\mathbf{B}_n$ of $\mathbf{C}^n$; we use a result of N. Varopoulos [7] concerning the zero set of holomorphic functions in the Hardy classes $H^p(\mathbf{B}_n)$.

We construct a holomorphic variety X in $\mathbf{B}_n$ such that

THEOREM. i. *X is of infinite area.*

ii. *X is the zero set of a bounded holomorphic function in $\mathbf{B}_n$.*

iii. *If we throw out a component of X, then the remaining holomorphic variety is not the zero set of a bounded holomorphic function in $\mathbf{B}_n$.*

In fact X is the zero set of a holomorphic function $\mathcal{C}^k(\overline{\mathbf{B}}_n)$ for all $k \in \mathbf{N}$, but I do not know if X is the zero set of a holomorphic function in $\mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbf{B}}_n)$.

1. Rappelons quelques définitions:

Pour $p > 0$, on note $A^p(\mathbf{B}_n)$ les classes de Bergman de la boule

$$A^p(\mathbf{B}_n) = \left\{ f \text{ holomorphe dans } \mathbf{B}_n / \int_{\mathbf{B}_n} |f(z)|^p \, dv(z) = \|f\|_p^p < +\infty \right\}$$

où dv est le volume euclidien de $\mathbf{B}_n$; et les classes de Hardy

$$H^\infty(\mathbf{B}_n) = \left\{ f \text{ holomorphe et bornée dans } \mathbf{B}_n;\ \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbf{B}_n} |t(z)| \right\},$$

$$H^p(\mathbf{B}_n) = \left\{ f \text{ holomorphe dans } \mathbf{B}_n / \sup_{r<1} \int_{|z|=1} |f(rz)|^p \, d\sigma(z) = \|f\|_p^p < +\infty \right\}$$

où $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur $S = \partial \mathbf{B}_n$; enfin la classe de Nevanlinna

$$N(\mathbf{B}_n) = \left\{ f \text{ holomorphe dans } \mathbf{B}_n / \sup_{r<1} \int_{|z|=1} \log^+ |f(rz)| \, d\sigma(z) < +\infty \right\}.$$

Received by the editors March 29, 1981 and, in revised form, July 28, 1981.
1980 *Mathematics Subject Classification*. Primary 32A35; Secondary 62B40.

Si X est un ensemble analytique dans $\mathbf{B}_n$, on note $[X]$ la mesure d'intégration sur X [**4**].

On va montrer que le théorème se déduit de la proposition suivante, proposition que l'on démontrera au paragraphe 2. La preuve que la proposition entraîne le théorème est essentiellement due à W. Rudin.

PROPOSITION. *Il existe un ensemble analytique X dans $\mathbf{B}_n$ qui est le zéro d'une fonction d'une classe de Bergman mais qui n'est pas le zéro d'une fonction de la classe de Nevanlinna.*

Admettons donc cette proposition et prouvons le théorème.

Soit X l'ensemble analytique donné par la proposition; puisque X n'est pas un diviseur de la classe $N(\mathbf{B}_n)$ on a

$$\int_{\mathbf{B}_n}(1-|z|^2)[X]=+\infty. \tag{1.1}$$

Plongeons X dans $\mathbf{B}_{n+1}$ ainsi

$$\tilde{X}=\{(z,w)\in\mathbf{B}_{n+1}/z\in X\} \tag{1.2}$$

et soit

$$D(z)=\{w\in\mathbf{C},\ 1-|z|^2>|w|^2\},\qquad z\in\mathbf{B}_n. \tag{1.3}$$

Par Fubini il vient alors

$$\int_{\mathbf{B}_{n+1}}[\tilde{X}]=\int_{\mathbf{B}_n}[X]\left\{\int_{D(z)}d\lambda(w)\right\}=\int_{\mathbf{B}_n}(1-|z|^2)[X]=+\infty \tag{1.4}$$

où $d\lambda(w)$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbf{C}=\mathbf{R}^2$.

D'autre part, pour $p>0$, si $f\in A^p(\mathbf{B}_n)$ on a [**5**, Théorème 7.2.5]

$$\exists C>0,\ \exists k\in\mathbf{N},\ t.q.\ |f(z)|\leqslant\frac{C}{(1-|z|^2)^k},\qquad z\in\mathbf{B}_n. \tag{1.5}$$

Pour conclure le théorème, on fait alors comme Walter Rudin [**5**]; si f est la fonction de $A^p(\mathbf{B}_n)$ qui s'annule sur X on pose

$$F_l(z,w)=w^{2k+l+1}f(z),\qquad (z,w)\in\mathbf{B}_{n+1},\ l\in\mathbf{N}. \tag{1.8}$$

On a alors que

(1) $F_l\in H^\infty(\mathbf{B}_{n+1})\cap\mathcal{C}^l(\overline{\mathbf{B}}_{n+1})$

car dans $\mathbf{B}_{n+1}$ on a $|w|^2\leqslant(1-|z|^2)$,

(2) $Y=F_l^{-1}(0)=\tilde{X}\cup\{w=0\}$

donc vol $Y\geqslant$ vol $\tilde{X}=+\infty$,

(3) $\tilde{X}$ n'est pas le zéro d'une fonction de $H^\infty(\mathbf{B}_{n+1})$; sinon soit $\tilde{h}(z,w)$ cette fonction, alors la fonction

$$z\in\mathbf{B}_n,\qquad h(z)=\tilde{h}(z,0) \tag{1.9}$$

serait encore dans $H^\infty(\mathbf{B}_n)$ et s'annulerait sur X, ce qui n'est pas possible, X ne satisfaisant pas à la condition de Blaschke par (1.1).

L'ensemble Y vérifie donc les conclusions du théorème.

2. Preuve de la proposition.

Notations. (*) $a \lesssim b$ si il existe une constante C dépendant au plus de la dimension telle que $a \leqslant Cb$,

(**) $a \simeq b$ si $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$.

Rappels. Soit $S = \partial \mathbf{B}_n$ le bord de la boule; on définit sur S la pseudo-distance de Koranyi [**3**; **1**, Chapter IV]

$$\zeta, \eta \in S, \qquad d(\zeta, \eta) = | 1 - \bar{\zeta}.\eta | \tag{2.1}$$

d est invariante sous l'action de $SU(n)$. Cette pseudo-distance vérifie

$$\exists K > 0 \; t.q. \; \forall \zeta, z, z' \in S \text{ on a: } d(\zeta, z') \leqslant K[d(\zeta, z) + d(z, z')]. \tag{2.2}$$

Posons, pour $\zeta \in S$ et $h > 0$, $R(\zeta, h) = \{\eta \in S / d(\zeta, \eta) < h\}$. On a alors

$$\forall \zeta \in S, \forall h > 0, \qquad \sigma_n\{R(\zeta, h)\} \simeq h^n \tag{2.3}$$

où σ_n est la mesure de Lebesgue sur $S = \partial \mathbf{B}_n$. Il existe $K' > 0$ t.q. $\forall h > 0$, $\exists N_h \in \mathbf{N}$ et un réseau $\mathfrak{F}_h = \{\zeta_k, 1 \leqslant k \leqslant N_h\}$ de points de S vérifiant [**1**, Chapter IV]:

$$\begin{cases} R(\zeta_k, h) \cap R(\zeta_l, h) = \varnothing, & k \neq l, \\ \bigcup_k (\zeta_k, K'h) = S. \end{cases} \tag{2.4}$$

Soit $\zeta_k \in \mathfrak{F}_h \cap R(\zeta, s) = E$, où $\zeta \in S$, et $s > h$ et soit $z \in R(\zeta_k, h)$, par (2.2) on a

$$d(\zeta, z) \leqslant K[d(\zeta, \zeta_k) + d(\zeta_k, z)] \leqslant K[h + s] \leqslant 2Ks,$$

d'où: $R(\zeta_k, h) \subset R(\zeta, 2Ks)$. Par (2.3) et (2.4), on en déduit

$$\sum \sigma_n(R(\zeta_k, h)) \leqslant \sigma_n\{R(\zeta, 2Ks)\}$$

et donc par (2.3)

$$\operatorname{Card}\{\mathfrak{F}_h \cap R(\zeta, s)\} \lesssim s^n / h^n. \tag{2.5}$$

Supposons maintenant $s \geqslant 2KK'h$. La pseudo-boule $R(\zeta, \frac{s}{2K})$ ne peut être recouverte par des pseudo-boules de rayons $K'h$ que si leur centre est dans $R(\zeta, s)$; en effet, soit $z \in R(\zeta, \frac{s}{2K})$, $z' \notin R(\zeta, s)$ on a par (2.2)

$$d(\zeta, z') \leqslant K[d(\zeta, z) + d(z, z')]$$

d'où

$$d(z, z') \geqslant \tfrac{1}{K} d(\zeta, z') - d(\zeta, z) \geqslant \tfrac{s}{K} - \tfrac{s}{2K} = \tfrac{s}{2K} \geqslant K'h.$$

D'autre part les pseudo-boules de $\mathfrak{F}_h$ recouvrent S donc aussi $R(\zeta, \frac{s}{2K})$ d'où; d'après ce qui précède:

$$\bigcup_{\zeta_k \in E} R(\zeta_k, K'h) \supset R(\zeta, \tfrac{1}{2K} s) \quad \text{par (2.4)}$$

et donc:

$$\operatorname{Card}\{\mathfrak{F}_h \cap R(\zeta, s)\} > \tfrac{s^n}{h^n} \quad \text{pour } s \geqslant 2KK'h.$$

On en déduit donc:

$$\forall h > 0, \forall s \geqslant 2KK'h, \forall \zeta \in S, \qquad \operatorname{Card}\{\mathfrak{F}_h \cap R(\zeta, s)\} \simeq (\tfrac{s}{h})^n \tag{2.5}$$

où $\operatorname{Card}\{E\}$ désigne le nombre d'éléments de E.

CONSTRUCTION. Soit a t.q. $0 < a < 1$ et considérons les sphères S_k suivantes:

$$S_k = \{z \in \mathbf{C}^n, |z| = 1 - a^k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Pour $\delta > 0$, sur chaque S_k plaçons un réseau $\mathfrak{F}_h$ avec

$$h = \delta a^k; \tag{2.6}$$

on notera $\mathfrak{F}_k$ ce réseau sur S_k et $\zeta_{k,l}$ le point générique de $\mathfrak{F}_k$.

On note encore

$$X_{k,l} = \{z \in \mathbf{B}_n, \bar{\zeta}_{k,l}.z = |\zeta_{k,l}|^2\}. \tag{2.7}$$

$X_{k,l}$ est une boule dans $\mathbf{C}^n$ de dimension réelle $2n - 2$. On pose enfin

$$X = \bigcup_{k,l} X_{k,l}. \tag{2.8}$$

On va montrer que X vérifie les conclusions de la proposition. (A) $\exists p > 0$ t.q. X *est le zéro d'une fonction de* $A^p(\mathbf{B}_n)$.

Pour cela on plonge la situation précédente dans la boule de $\mathbf{C}^{n+1}$ en ajoutant une variable supplémentaire w:

$$\tilde{X}_{k,l} = \{(z, w) \in \mathbf{B}_{n+1}/z \in X_{k,l}\}; \qquad \tilde{X} = \bigcup_{k,l} \tilde{X}_{k,l}. \tag{2.9}$$

On a alors

LEMME. *La mesure* $(1 - |z|^2 - |w|^2)[\tilde{X}]$ *est de Carleson dans* $\mathbf{B}_{n+1}$.

PREUVE. On note pour $h > 0$, $\zeta \in \partial \mathbf{B}_{n+1}$

$$Q(\zeta, h) = \left\{\eta \in \mathbf{B}_{n+1}/1 - h \leqslant |\eta| < 1 \text{ et } \tfrac{\eta}{|\eta|} \in R(\zeta, h)\right\}$$

et il nous faut montrer que

$$\int_{Q(\zeta,h)} (1 - |z|^2 - |w|^2)[\tilde{X}] \lesssim h^{n+1}, \qquad \forall \zeta \in \partial \mathbf{B}_{n+1}, \forall h > 0. \tag{2.10}$$

Compte tenu de la forme de $\tilde{X}$, on voit aisément qu'il suffit de vérifier (2.10) pour les points ζ de $\partial \mathbf{B}_{n+1}$ tels que leur $n + 1$ ième coordonnée est nulle; on a alors

$$I = \int_{Q(\zeta,h)} (1 - |z|^2 - |w|^2)[\tilde{X}] = \sum_{k,l} \int_{Q(\zeta,h)} (1 - |z|^2 - |w|^2)[\tilde{X}_{k,l}]. \tag{2.11}$$

Pour une raison d'homogénéité de la pseudo-distance d, il existe une constante K telle que

$$\tilde{X}_{k,l} \cap Q(\zeta, h) \neq \varnothing \Rightarrow \zeta_{k,l} \in Q(\zeta, Kh). \tag{2.12}$$

De (2.11) et (2.12) on tire donc

$$\begin{aligned} I &\leqslant \sum_{\zeta_{k,l} \in Q(\zeta, Kh)} \int_{Q(\zeta,h)} (1 - |z|^2 - |w|^2)[\tilde{X}_{k,l}] \\ &\leqslant \sum_{\zeta_{k,l} \in Q(\zeta, Kh)} (1 - |\zeta_{k,l}|^2) \operatorname{vol}(\tilde{X}_{k,l}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Mais $\tilde{X}_{k,l}$ est une boule dans $\mathbf{B}_{n+1}$ de dimension $2n$ et de rayon $\sqrt{1-|\zeta_{k,l}|^2}$ d'où

$$\operatorname{vol}(\tilde{X}_{k,l}) \simeq (1-|\zeta_{k,l}|^2)^n \simeq a^{nk}. \tag{2.14}$$

D'autre part $Q(\zeta, Kh)$ induit sur la sous-boule $\{w=0\}$ une pseudo-boule dont la projection sur $\partial\mathbf{B}_n$ est $R(\zeta, Kh)$ car $\zeta \in \mathbf{B}_{n+1} \cap \{w=0\}$; grâce à (2.5) on a donc

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad \operatorname{Card}\{\mathfrak{F}_k \cap Q(\zeta, Kh)\} \lesssim \delta^{-n}h^n a^{-nk}; \tag{2.15}$$

on a donc, en portant dans (2.13)

$$\begin{cases} I \leqslant \sum_{\zeta_{k,l}\in Q(\zeta,Kh)} a^k.a^{nk} \lesssim \sum_{k,a^k\leqslant Kh} a^{(n+1)k} \sum_{l,\zeta_{k,l}\in Q(\zeta,Kh)} 1, \\ I \lesssim \sum_{k,a^k\leqslant Kh} \delta^{-n}h^n a^{(n+1)k}a^{-nk} \lesssim \delta^{-n}h^{n+1}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Car $\zeta_{k,l} \in Q(\zeta, Kh) \Rightarrow |\zeta_{k,l}| \geqslant 1 - Kh \Rightarrow a^k \leqslant Kh$, d'où le lemme.

Pour achever la preuve du A on utilise alors un théorème de N. Varopoulos **[7]** qui nous affirme que

$$\exists p > 0 \text{ et } f \in H^p(\mathbf{B}_{n+1}) \ t.q. \ \tilde{X} = f^{-1}(0). \tag{2.17}$$

Posons alors $g(z) = f(z, 0)$, $z \in \mathbf{B}_{n+1}$. On a bien

(1) $X = g^{-1}(0)$,

(2) $g \in A^p(\mathbf{B}_n)$ grâce au lemme de subordination.

(B) *X n'est pas un diviseur de la classe de Nevanlinna.* Dans **[12]** l'auteur montre que la condition

$$\int_B (1-|z|^2)[X] < +\infty \tag{2.18}$$

est nécessaire pour que X soit un diviseur de la classe de Nevanlinna, dans **[6** et **11]** les auteurs montrent, indépendamment, que (2.18) est aussi suffisant, résultat que nous n'utiliseront pas ici. Il nous suffit donc de montrer ici que (2.18) n'est pas satisfait i.e. $(1-|z|^2)[X]$ n'est pas une mesure finie dans $\mathbf{B}$, pour, utilisant **[12]**, obtenir que X n'est pas un diviseur de la classe de Nevanlinna.

On a vu que (1.4)

$$\int_{\mathbf{B}_n} (1-|z|^2)[X] = \int_{\mathbf{B}_{n+1}} [\tilde{X}] = \sum_{k,l} \operatorname{vol}(\tilde{X}_{k,l}) = \mathfrak{T}; \tag{2.19}$$

mais grâce à (2.4) on a

$$\mathfrak{T} = \sum_k a^{nk} \sum_l 1 \simeq \sum_k a^{nk}a^{-nk} = +\infty \tag{2.20}$$

la dernière équivalence grâce à (2.5) en y faisant $s = 1$ et $h = \delta a^k$.

Pour conclure, on peut poser deux questions: (a) Parmi tous les ensembles analytiques contenant les points de $\bigcup_{k=1}^{k_0} \mathfrak{F}_k$, l'ensemble $\tilde{X}_{k_0} = \bigcup_{k=1,l}^{k_0} \tilde{X}_{k,l}$ est-il celui ayant le plus petit volume?

(b) Est-il possible de trouver un diviseur de la classe de Nevanlinna de $\mathbf{B}_n$ contenant les points de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}_k$?

Le rapport avec le problème traité dans ce travail est le suivant.

Dans [**1**] on montre que si l'on prend $a > 0$ assez petit et $\delta > 0$ assez grand alors les points de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$ forment une suite d'interpolation pour $A^2(\mathbf{B}_n)$ donc aussi que ces points sont contenus dans le zéro d'une fonction de $A^2(\mathbf{B}_n)$; si la réponse est non au (b) (ce dont je suis convaincu) alors on a ainsi une autre preuve de la proposition donc du théorème.

Annexe.

LEMME DE SUBORDINATION. *Soit $p > 0$ et $f(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1})$ une fonction holomorphe dans $H^p(\mathbf{B}_{n+1})$ alors $g(z_1, \ldots, z_n) = f(z_1, \ldots, z_n, 0)$ est dans $A^p(\mathbf{B}_n)$. Réciproquement si $g(z_1, \ldots, z_n)$ est dans $A^p(\mathbf{B}_n)$ alors $f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = g(z_1, \ldots, z_n)$ est dans $H^p(\mathbf{B}_{n+1})$.*

PREUVE. On vérifie aisément que le mesure d'intégration μ sur $\{z_{n+1} = 0\} \cap \mathbf{B}_{n+1}$ est de Carleson dans B_{n+1} et on applique le théorème de Carleson-Hörmander [**10**]. Pour montrer la réciproque il suffit de décomposer la mesure de surface et d'appliquer Fubini.

Ce lemme lie aussi les noyaux de Bergman de $\mathbf{B}_n$ et de Szegö de $\mathbf{B}_{n+1}$ [**9**] mais nous n'en avons pas besoin ici.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Amar, *Suites d'interpolation pour les classes de Bergman de la boule et du polydisque de C^n*, Canad. J. Math. **30** (1978), 711–737.

2. B. Berndtsson, *Integral formulas and zeros of bounded holomorphic functions in the unit ball*, preprint.

3. R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math., vol. 242, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1971.

4. P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières*, Sém. Math. Sup. (Été 1967), Presses Univ. Montréal, Montréal.

5. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$*, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, vol. 241, Springer-Verlag, New York, 1980.

6. H. Skoda, *Valeurs au bord pour l'opérateur d'' et zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 225–299.

7. N. Varopoulos, *Zeros of H^p functions in several complex variables*, Publ. Anal. Harm. Orsay **334** (1978).

8. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of conjugate functions*, J. Funct. Math. **167** (1932), 405–423.

9. D. Amar et al., *Sur les suites d'interpolation en plusieurs variables*, Pacific J. Math. **75** (1978), 15–21.

10. L. Hörmander, *L^p estimates for (pluri-)subharmonic functions*, Math. Scand. **20** (1967), 65–78.

11. G. M. Henkin, *Solutions with estimates of the H. Lewy and Lelong-Poincaré equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **210** (1975), 771–774.

12. Pak Song Chee, *The Blaschke condition for bounded holomorphic function*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 248–263.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I, 351, COURS DE LA LIBÉRATION, 33405 TALENCE, FRANCE